MANIFESTE POUR L'UTILISATION D'UN C_X LINÉAIRE EN RÉGIME DE STOKES

Ce texte comporte des facilités de navigation interne.
Pour cette raison, et si vous ne lisez pas en pdf, il gagnera à être ouvert dans Word.
Pour naviguer agréablement dans ce fichier Word, vérifier que les deux flèches orientées vers la gauche et la droite ("Précédent" et "Suivant")) figurent bien dans votre barre d'outil. Si ce n'est le cas, installez ces flèches par : Affichage, Barres d'outils, Personnaliser, Catégorie : Web.
Sinon, les raccourcis clavier Alt+flèche gauche ou Alt+flèche droite produisent les mêmes résultats (retour à l'emplacement précédent ou suivant), ceci dans Word, et, nous semble-t-il, dans beaucoup de visionneuses de pdf.

Version du 11/12/18
L'adresse où ce texte est téléchargeable dans sa dernière version Word est :
http://perso.numericable.fr/gomars2/aero/cx_lineaire.doc

Résumé du présent texte :

Dans ce texte, après avoir constaté que, pour les écoulements à très faibles Nombres de Reynolds (en-dessous de l'unité), le Coefficient de Traînée adimensionnel actuellement en usage n'a pas de signification physique, nous insisterons sur le fait que la définition de cet actuel Coefficient de Traînée est de nature doublement quadratique (puisqu'elle fait appel au carré de la vitesse et au carré d'une longueur caractéristique). Puis nous nous ferons le défenseur d'un nouveau *Coefficient de Traînée linéaire adimensionnel* (linéaire parce que sa définition fait appel à la puissance **1** de la vitesse ainsi qu'à la puissance **1** d'une longueur caractéristique).

Nous avons découvert l'idée (fort utile) de ce *Coefficient de Traînée linéaire adimensionnel* dans un texte de Duan, He et Duan, même si nous militons pour une version simplifiée de sa définition (due à Horace Lamb) et différente d'un simple coefficient multiplicateur, de sorte que la force de Traînée puisse être tirée très simplement par simple multiplication de ce Coefficient de Traînée linéaire par les autres paramètres en jeu dans le régime de Stokes que sont la Viscosité Dynamique, la Vitesse de l'écoulement et une longueur caractéristique (souvent le diamètre, mais aussi la longueur, etc.) et ceci sans aucun coefficient multiplicateur.

Ces éléments posés nous donnerons la valeur de ce $\mathbf{C_x}$ linéaire pour la sphère en régime de Stokes, puis, pour l'anecdote, sur toute la plage des Reynolds possibles. Il faudra alors noter que la définition de ce $\mathbf{C_x}$ linéaire, quoique permettant un calcul valide de la Traînée sur toute la plage des Reynolds possibles, n'a de signification physique que dans la plage de Stokes, plage où, pour la sphère et de nombreux autres corps, il est constant et donc éminemment pratique.

Ceci fait, nous présenterons une collecte des $\mathbf{C_x}$ linéaires d'un grand nombre de corps en régime de Stokes (ellipsoïdes de divers élancements, disque, cylindre long ou court, palette de longueur infinie ou non, cubes, octaèdre, tétraèdres tronqués ou non, tores, et autres particules simples ou composites comme les conglomérats ou chaînes rectilignes de sphères identiques). Pour tous ces corps, ce $\mathbf{C_x}$ linéaire est constant en régime de Stokes, comme c'est le cas pour la sphère. Les cas particuliers du cylindre infini et de la palette seront éclairés par les travaux de Kohlman et C. M. White, travaux qui montrent que la formule de Lamb ne concerne pas, stricto sensu, le régime de Stokes. Nous constaterons que cette formule de Lamb ne permet pas la résolution du $\mathbf{C_x}$ linéaire dans le cas d'un cylindre en décantation puisqu'elle donne le $\mathbf{C_x}$ linéaire en fonction du Reynolds donc de la vitesse de décantation donc du $\mathbf{C_x}$ linéaire ; nous proposerons une résolution à ce problème…

Cette collecte de $\mathbf{C_x}$ linéaires faite auprès de grands auteurs (souvent grands mathématiciens), résulte en trois grands tableaux que nous avons déjà publiés dans les Wiki-Commons.

Chemin faisant, nous aurons défini la Longueur Équivalente de Traînée qui est l'analogue (pour le régime de Stokes) de la Surface Équivalente de Traînée utilisée pour les hauts Reynolds.

Nous aborderons ensuite le problème du corps de moindre Traînée à volume donné en régime de Stokes, cas où la longueur de référence doit être la racine cubique du volume.

Vers la fin de notre texte, nous expliquerons que nous n'avons en rien inventé ce *Coefficient de Traînée linéaire adimensionnel* puisque la plupart des auteurs en pressentent le concept ou l'évoquent sans le nommer : simplement nous pensons qu'il est grand temps de sauter le pas et d'en faire un usage

pratique et pragmatique. Un excellent candidat pour la paternité de ce C_x linéaire semble d'ailleurs être Lamb lui-même (1911).

Nous ne manquerons pas d'exploiter également les mesures de décantation de corps de formes diverses relayées par Carmichael, ainsi que les mesures de décantation de prismes rectangulaires, troués ou non, de Sheaffer.

Nous présenterons rapidement (et exploiterons quelque peu) le Nombre adimensionnel de Best ou de Davies qu'utilisent les météorologues dans la plage de Reynolds qui va du régime de Stokes jusqu'à des Reynolds de plusieurs centaines de mille, plage qui est celle des hydrométéores solides ou liquides.

Tout à la fin de ce texte, nous amorcerons l'extension de la plage de validité de certains de ces C_x linéaires au régime d'Oseen. Nous donnerons, dans ce régime, le C_x linéaire des cylindres de section elliptique de longueur infinie et de la palette en incidence.

Tout ce qui est dit dans ce texte concerne le déplacement de particules dans un fluide newtonien, la plupart du temps en régime de Stokes (même si nous abordons parfois les plages de Reynolds supérieurs à l'unité).

Introduction :

Dans une certaine plage de Nombre de Reynolds (dite parfois plage de Newton, cette plage allant de **1000** à **300 000** [1]), limitée au Reynolds **300 000** par l'accident particulier nommé « crise de la sphère », la force de Traînée aérodynamique d'un corps apparaît comme grossièrement proportionnelle au carré de sa vitesse.

Cette force de Traînée respecte donc peu ou prou l'équation :

$$\mathbf{F = ½ \rho V^2 SC_x}$$

…équation où la vitesse **V** apparaît bien au carré, **ρ** est la Masse Volumique de l'air, S la surface de référence (en général la surface frontale, mais pas forcément) et C_x le coefficient adimensionnel de Traînée attaché à la même surface de référence).

Pour certains corps profilés, le **Cx** qui figure dans cette même équation n'est pas strictement constant dans la plage de Newton : il dépend plus ou moins du Nombre de Reynolds longitudinal de l'écoulement.

Ce Nombre de Reynolds, nombre sans dimension qui représente l'importance des forces d'inertie par rapport aux forces de viscosité mises en jeu par l'écoulement, s'écrit, on s'en souvient :

$$R_e = \frac{VL}{\nu}$$

…**V** étant toujours la vitesse de l'écoulement, **L** la longueur caractéristique du corps et **ν**, qui apparaît au dénominateur, la Viscosité Cinématique…

Ces nuances ayant été rappelées, il faut convenir que, lorsque le Reynolds de l'écoulement se situe dans la plage de Newton précédemment évoquée, la définition du C_x adimensionnel que l'on tire de l'équation $\mathbf{F = ½ \rho V^2 SC_x}$, à savoir :

$$C_x = \frac{F}{½\rho V^2 S}$$

[1] Cette plage de Reynolds est ainsi nommée parce que Newton y a lui-même effectué des mesures du C_x de la sphère, au moins dans la partie sous-critique (voir à ce sujet notre texte : LES MESURES DE C_x DE LA SPHÈRE D'ISAAC NEWTON)

…possède vraiment une signification physique : pour beaucoup de corps (tels que .. le corps humain ou les maisons où l'humain se calfeutre, par exemple, mais aussi beaucoup de corps mal profilés comme le disque, le cube, la palette carrée ou rectangulaire placé(e)s face au vent) il est à peu près constant.

Puisque ce $\mathbf{C_x}$ est à peu près constant, l'évolution de la Traînée avec la vitesse de l'écoulement est donc à très peu près quadratique : un doublement de la vitesse de l'écoulement entraîne bien un quadruplement de la Traînée…

C'est un comportement que les premiers aérodynamiciens ne manquaient jamais de signaler, en particulier Eiffel qui constatait :

« Nos expériences de chute à la tour Eiffel ont montré nettement que dans les conditions ordinaires de la pratique, la résistance de l'air peut être représentée par la formule :

$R = KSV^2$ »[2]

Un tel comportement avait évidemment quelque chose de rassurant à une époque où les propositions émises par le grand Newton (à savoir la proportionnalité de la Traînée avec le carré de la vitesse) n'avaient pas encore été vérifiées par la pratique…

À cause de ce comportement *presque* quadratique, mais surtout parce que sa définition fait appel au quotient par le carré de la vitesse $\mathbf{V^2}$, le $\mathbf{C_x}$ dont nous avons donné ci-dessus la définition :

$$\mathbf{C_x = \frac{F}{½\rho V^2 S}}$$

…peut donc être appelé ***C_x* quadratique** et nous n'y manquerons pas dans ce texte puisque nous allons y introduire également un autre $\mathbf{C_x}$, *non quadratique* celui-là : le ***C_x* linéaire** (mais nous y reviendrons en temps et heure)…

Dans le présent texte, au demeurant, nous ne nous intéresserons qu'au $\mathbf{C_x}$, Coefficient adimensionnel de Traînée en repère vent, c.-à-d. le coefficient qui renseigne sur la projection de la force aérodynamique résultante sur la direction du courant de fluide (généralement nommé l'axe des **x**, d'où le nom du coefficient $\mathbf{C_x}$).

Mais il existe bien-sûr un certain nombre d'autres coefficients adimensionnels qui expriment les efforts aérodynamiques sur un corps : $\mathbf{C_y}$, $\mathbf{C_z}$ $\mathbf{C_m}$ (pour une représentation en *repère vent*) ou encore $\mathbf{C_a}$, $\mathbf{C_n}$, $\mathbf{C_y}$ etc. pour une représentation en *repère corps*). Des lois mathématiques simples permettent bien-sûr le changement de repères (voir à ce sujet notre texte : LES REPÈRES EN AÉRODYNAMIQUE).

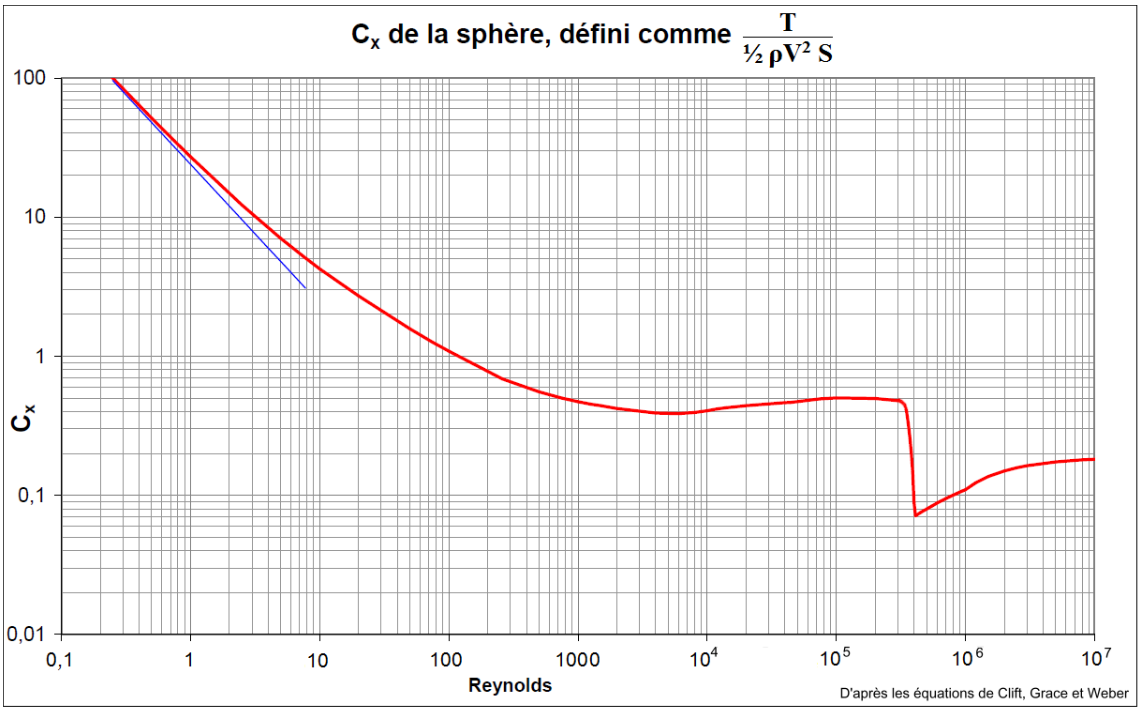
Tout ce que nous aurons l'occasion de dire sur le $\mathbf{C_x}$ des corps en régime de Stokes pourrait être dit à propos des autres coefficients adimensionnels, spécialement parce que la linéarité qui préside aux équations du régime de Stokes rend très aisé le passage d'un coefficient à un autre…

Nous avons apporté plus haut des nuances à la constance du ***C_x* quadratique**. On se remémore en effet que certains corps profilés connaissent *une crise de Traînée* : lorsque le Nombre de Reynolds de leur écoulement augmente : la sphère par exemple

[2] Voir LA RÉSISTANCE DE L'AIR ET L'AVIATION. EXPÉRIENCES EFFECTUÉES AU LABORATOIRE DU CHAMP-DE-MARS, Gustave EIFFEL.

voit son **C_x** quadratique brusquement chuter d'un facteur **~7** pour une très faible augmentation de son Reynolds diamétral (de l'ordre d'un tiers).

Cette crise se produit, pour la sphère parfaitement lisse dans un écoulement non turbulent, à un Reynolds diamétral [3] de ~ **300 000** :



Source : notre publication Wikipédia-Commons

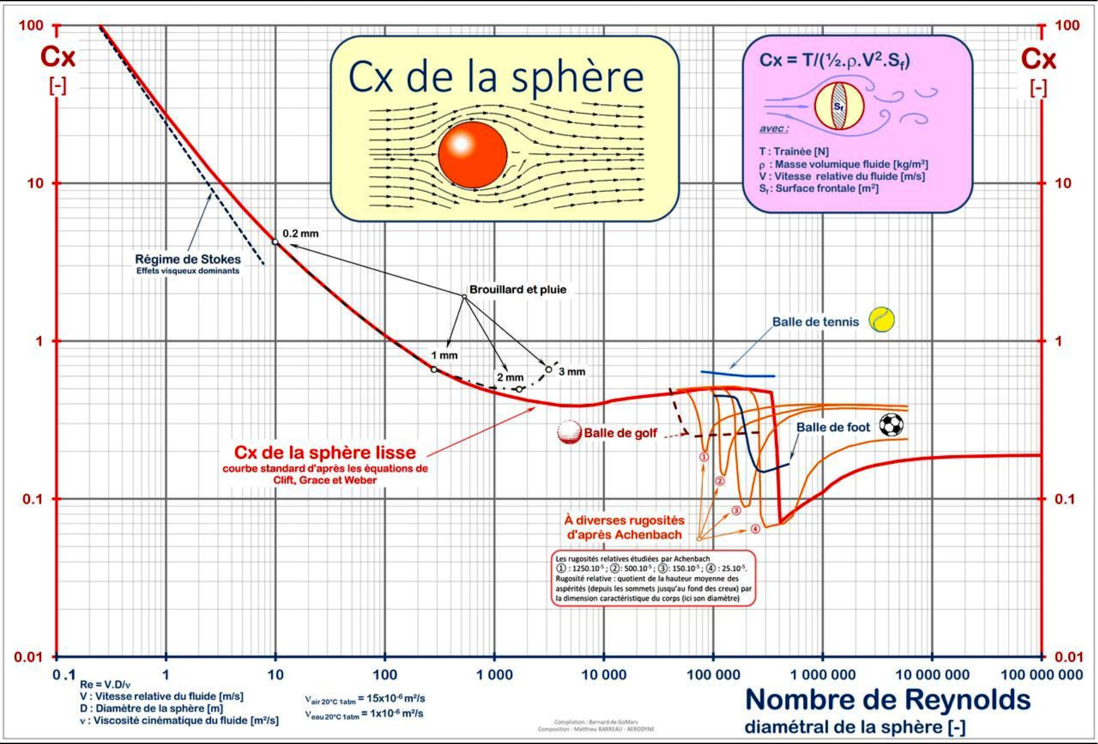
Nous avons assez parlé de cette crise de la sphère dans nos différents textes (en particulier **LE C_X DE LA SPHÈRE** ou même **LES MESURES DU C_X DE LA SPHÈRE PAR ISAAC NEWTON**) pour y revenir ici.

Cependant on peut attirer l'attention sur le fait que dans la très large plage de Reynolds allant de **1000** à la crise (cela correspond quand-même, toutes choses égales par ailleurs, à une multiplication de la vitesse d'écoulement par **300** !), le **C_x** quadratique de la sphère se montre à peu près constant (il vaut entre **0,4** et **0,5**).

Ce n'est plus le cas pour les Reynolds plus faibles (à gauche sur le graphe), où, si l'on s'en tient à notre graphe, le **C_x** quadratique dépasse largement plusieurs centaines (le **C_x** quadratique de **100** étant atteint, on le voit, pour un Reynolds de l'ordre de **0,2**).

Pour donner une idée plus quotidienne de l'évolution du **C_x** quadratique des corps sphériques selon leur Reynolds, nous pouvons montrer une autre de nos publications sur Wikipédia-Commons (ici avec l'aide de Matthieu Barreau, d'InterAction, pour l'iconographie) :

[3] C'est le diamètre qui est souvent choisi comme longueur de référence pour la sphère…



Cette image, mise en forme par Matthieu Barreau d'Aérodyne, est disponible dans les Wiki-Commons à ce lien (des indications supplémentaires y apparaissent par effleurement du pointeur).

Sur ce graphe, outre le C_x quadratique de différentes balles de sports et de sphères de différentes rugosités, apparaissent les C_x quadratique de ces petites sphères que sont les gouttes de brouillards et de pluie tombant sous l'effet de la gravité à leur vitesse de chute stabilisée ; ainsi une goutte de pluie de **1 mm** chute à la vitesse de **~ 4 m/s**, ce qui crée un Reynolds de **280** [4].

Nous avons arrêté à gauche la courbe des gouttes de pluie et brouillard à **0,2 mm** de diamètre parce que les gouttes plus petites suivent fidèlement la courbe rouge (elles sont parfaitement sphériques et sont donc pleinement du ressort de cette courbe rouge [5]).

Intéressons-nous plus précisément à cette courbe du C_x quadratique des sphères lisses (en rouge) pour les très petits Reynolds : on peut remarquer que pour ces très petits Reynolds (inférieurs à **1**), la courbe rouge vient tangenter la droite tiretée bleue : cette même droite tiretée bleue est donc, pour les Reynolds inférieurs à **0,1**, la courbe représentant le C_x quadratique selon le Reynolds.

Or, dans ce graphe Log/Log, cette droite bleue possède une pente unitaire : cela signifie que les C_x quadratiques situés sur cette droite bleue sont inversement proportionnels au Reynolds.

On est donc en droit de noter :

$$\mathbf{C_{xQuad} = k/R_e}$$

---

[4] Selon la simplification **70 000*D*V**, **D** et **V** étant exprimés en **m** et **m/s**, cette simplification valant pour les mouvement dans l'air…

[5] Lorsqu'elles grossissent, les gouttes d'eau (de brouillard, de bruine, ou de pluie) suivent fidèlement la courbe rouge jusqu'au moment où leur vitesse de chute accrue les déforme, ce qui augmente leur C_x. Ceci se produit au-dessus du diamètre de **1 mm**, diamètre au-dessus duquel ces gouttes ne peuvent plus être assimilées à des sphères.

À ce sujet voir notre texte LE C_X DE LA SPHÈRE.

…**k** étant un coefficient constant et R_e le Reynolds diamétral de la sphère.

Les travaux de Stokes permettent même d'être plus précis puisque celui-ci a calculé que :

$C_{xQuad} = 24/R_e$ (qui est l'équation de la droite bleue dans nos graphes Log/Log [6])

Si l'on introduit cette valeur du C_x quadratique dans l'équation de la Traînée de la sphère, à savoir :

$$F = ½ \rho V^2(\pi D^2/4)\ C_{xQuad}$$

…on obtient :

$$F = ½ \rho V^2(\pi D^2/4)*24/R_e$$

Comme le Reynolds diamétral de la sphère vaut $R_{eD} = \dfrac{VD}{\nu}$, la Traînée, dans ce régime de Stokes, s'écrit :

$$F = ½ \rho V^2(\pi D^2/4)*\frac{24}{\frac{VD}{\nu}}$$

…soit :

$$F = 3\pi V\ D\ \rho\ \nu$$

Il suffit alors de se souvenir que la Viscosité cinématique **ν** est le quotient de la Viscosité Dynamique **μ** par la Masse Volumique **ρ** du fluide en écoulement pour affirmer légitimement :

$$\boxed{F = 3\pi VD\mu}$$

…cet encadré donnant la Traînée de la sphère valide en régime de Stokes, c.-à-d. pour les Reynolds très inférieurs à **1**.

Donnons quelques exemples de *Viscosité Dynamique* (en $P_a.s$ [7]) : Air sec : **$1{,}8\ 10^{-5}$**, Eau : **$1\ 10^{-3}$**, mais Glycérine : **1,49** !

La Viscosité Dynamique de la glycérine est donc **1500 fois** plus forte que celle de l'eau. Une sphère qui décante dans la glycérine le fait donc avec une vitesse de chute **1500 fois** plus faible que lorsqu'elle décante dans l'eau ! Ceci explique pourquoi la glycérine est utilisée, en mélange avec l'eau (avec laquelle elle est tout à fait miscible), pour ralentir la chute de la *neige* dans les boules à neige :

[6] Ce libellé dessinerait évidemment une hyperbole dans un diagramme cartésien. On peut vérifier l'équation de la droite bleue tiretée en notant que sur le graphe, pour $R_e = 1$, $C_x = 24$…

[7] Oui : En Pascal multipliés par secondes, ou en Kg/(m s) !

Nous venons d'effectuer une quantification de la Traînée de la sphère en régime de Stokes sur la base de la valeur du $\mathbf{C_x}$ quadratique de la sphère établi par Stokes en 1851 (à savoir : $\mathbf{C_{xQuad} = 24/R_e}$) et en utilisant les définitions du Reynolds diamétral et du $\mathbf{C_x}$ quadratique (les deux quantités qui ont présidé à l'établissement de notre graphe).

Il est aisé de constater, au vu de l'encadré précédent, que, toujours dans cette plage de Reynolds très inférieure à **1**, la Traînée de la sphère n'est en rien proportionnelle au carré de la vitesse : elle est simplement proportionnelle à cette vitesse !

De même, cette Traînée n'est pas proportionnelle à la section frontale $\mathbf{\pi D^2/4}$ de la sphère, mais simplement à son diamètre.

Ces deux constats montrent bien qu'en régime de Stokes, la formulation classique de la Traînée (formulation que nous appellerons *quadratique*) :

$$\mathbf{F = \tfrac{1}{2}\rho V^2 S C_{xQuad}}$$

…n'a plus de signification physique, même si elle produit bien le bon résultat !

Cette réflexion vaut pour le cas de la sphère (dont nous venons de calculer la Traînée), mais elle vaut aussi pour une quantité d'autres corps, nous y reviendrons).

Note sur la persistance d'efforts d'inertie en régime de Stokes :

Pour dégager la quantification de la Traînée de la sphère au très faibles Reynolds, George Gabriel Stokes a dû poser l'hypothèse que les efforts d'inertie se faisaient négligeables, à ces très faibles Reynolds, dans les équations de Navier-Stokes (qu'il avait d'ailleurs participé à établir). C'était la seule façon de résoudre ces fameuses équations de Navier-Stokes (dont la résolution générale reste encore un défi).

Quant à nous, nous appuyant sur les travaux de ce géant, il nous est aisé de vérifier, a posteriori, si l'hypothèse de Stokes (la négligeabilité des efforts d'inertie aux très bas Reynolds) est réaliste. Comparons en effet la Pression Dynamique $\mathbf{\tfrac{1}{2}\rho V^2}$ s'exerçant au point d'arrêt de la sphère avec la *Pression Visqueuse* à bas Reynolds au même point d'arrêt Cette pression *visqueuse* a été calculée par Stokes comme valant : $\mathbf{1{,}5\mu V/R}$ (**R** étant le rayon de la sphère).

Le quotient des deux valeurs de pression donne :

$$\frac{\mathbf{1{,}5\mu V}}{\mathbf{R\,\frac{1}{2}\rho V^2}} = \frac{\mathbf{6\nu}}{\mathbf{DV}} = \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{R_{eD}}}$$

On remarque donc que la pression visqueuse au *point d'arrêt* est **60 fois** plus forte que la Pression Dynamique au Reynolds de **0,1**.

D'autre part, les calculs de Stokes indiquent que la Traînée de forme (due aux forces normales sur la surface de la sphère, ces forces naissant de la viscosité du fluide) ne compte que pour le tiers de la Traînée totale de la sphère, les deux autres tiers naissant des forces tangentielles de friction (également due à la viscosité du fluide).

Nous venons d'utiliser l'expression *Pression Visqueuse* mais nous aurions pu également parler de *Pression due à la viscosité*. Le concept qui est recouvert par ces expressions paraitra paradoxal aux impétrants (comme il nous l'est apparu à nous-même) : on ressent plus facilement la pression sur un corps (sur notre corps, par exemple, quand il y a du vent) comme due à l'inertie du fluide : on admet facilement que la pression du vent sur notre visage (s'il fait face au vent) est due à l'élan dont dispose le vent et à son impossibilité à contourner notre visage : comme il ne peut le contourner, il s'écrase sur lui.

Cette explication est encore plus évidente lorsque des particules de sables sont véhiculées par le vent : le sable non plus ne peut contourner notre visage : il s'y écrase donc de façon très douloureuse ; nous vient alors l'intuition que les particules d'air sont trop petites et trop douces pour nous piquer le visage mais que l'ensemble de leurs collisions sur notre peau est ressentie comme de la pression. [8]

En régime de Stokes, ces phénomènes inertiels n'ont plus cours (ou produisent des effets négligeables) : la pression (à savoir le quotient de la force normale s'appliquant sur un élément de surface du corps par la surface de cet élément) doit donc être expliquée autrement.

Dans le Mémorandum Technique N° 1316, Zbynek JANOUR donne l'explication suivante aux effets de ce que nous avons appelé *pression visqueuse* mais qu'il nomme *résistance de déformation* [9] :

« L'existence d'une *résistance de déformation* peut être expliquée comme suit : Si un corps est déplacé sur une courte distance dans un fluide visqueux, ce fluide se déforme d'abord comme un milieu élastique [10]. Les particules de fluide dans le voisinage du corps sont perturbées en traction ou en compression par le mouvement de ce corps […]. La forte viscosité ne permet alors qu'une lente égalisation des tensions internes des particules et n'autorise donc qu'une annulation différée des contraintes du milieu dans sa nouvelle situation. Dans le cas où le mouvement du corps dans le fluide devient continu, c'est une déformation constante des particules qui se produit au voisinage du corps. » [11]

---

[8] Cette explication *collisionnelle* de la pression est celle de Newton. Elle vaut tout à fait pour la région proche du point d'arrêt des corps mais ne permet pas d'expliquer le reste de la distribution des pressions sur ces corps…

[9] "deformation resistance" en anglais.

[10] Le terme *élastique* peut prêter à confusion : les écoulement de Stokes se produisent bien-sûr de façon incompressible, c.-à-d. que la densité du fluide y reste tout à fait constante. Zbynek Janour veut sans doute signifier que les particules de fluide peuvent être déformée (en flexion ou en torsion) de façon élastique mais sans que leur volume ne soit modifié (NdBdGM).

[11] "The occurrence of the deformation resistance may be explained as follows: If a body is moved a small distance along its path in a very viscous fluid, the fluid deforms at first like an elastic medium. The individual volume elements in the neighborhood of the body are disturbed in tension or in compression (in transverse contraction or dilatation). The high viscosity permits only slow and delayed equalization of these internal stresses of the volume element to its new shape. In the case of continuous motion of the body, a constant deformation of the volume elements in the fluid occurs."

Que demande-t-on à un Coefficient de Traînée ?

Nous devrions d'ailleurs demander dans ce titre : Que demande-t-on actuellement à un coefficient de Traînée ? En effet, le cahier de charge auquel répond le $\mathbf{C_x}$ actuel (ce $\mathbf{C_x}$ est quadratique, nous l'avons précisé plus haut) s'est étoffé au fil des décennies.

Si, comme l'homme de la rue, les premiers chercheurs en Mécaniques des Fluides avaient l'intuition que la Traînée d'un corps (soumis, par exemple, à un vent, ou à un courant d'eau) est d'autant plus importante que ce corps est de grande taille, ces mêmes chercheurs ne savaient pas si ladite Traînée était ou non proportionnelle à la surface frontale du corps.

On remarque par exemple que, lors des premières mesure par Eiffel du $\mathbf{C_x}$ quadratique d'une plaque carrée, ce $\mathbf{C_x}$ quadratique, aujourd'hui réputé indépendant du Reynolds donc de la taille de la plaque [12], semblait dépendre de ladite taille de la plaque (ce qui paraissait en désaccord avec les intuitions de Newton, même si celles-ci concernaient plutôt l'aérodynamique des gaz raréfiés) :

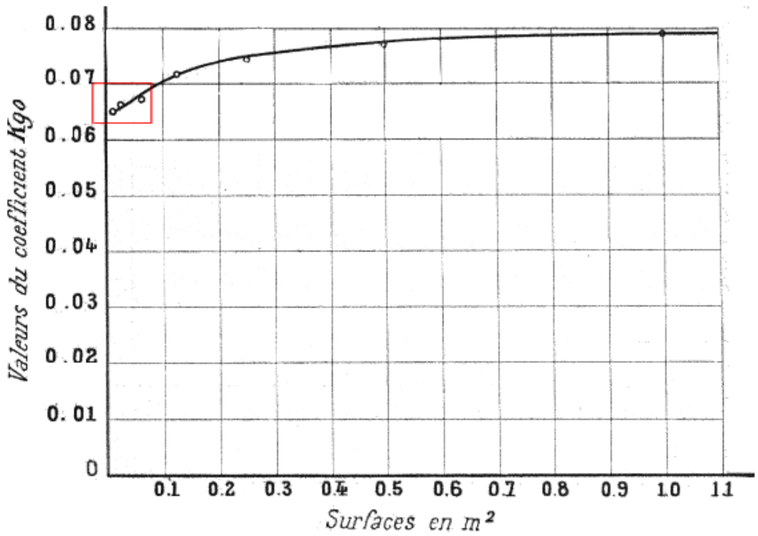


FIG. 17. — *Variation du coefficient des plaques carrées avec la surface.*

Ce graphe est tiré de « LA RÉSISTANCE DE L'AIR ET L'AVIATION. EXPÉRIENCES EFFECTUÉES AU LABORATOIRE DU CHAMP-DE-MARS » de Gustave Eiffel, 1910…

Dans cet ouvrage, Eiffel indique que seule les marques entourées par nous d'un carré rouge correspondent à des mesures effectuées à la soufflerie d'Auteuil (soufflerie existant encore de nos jours), les autres marques, mettant en jeu de plus grandes surfaces, ayant été obtenues avec l'appareil de chute qui tombait depuis le premier étage de la Tour Eiffel.

Eiffel écrit d'ailleurs pour présenter ce graphe : « Nous avons tracé la courbe ci-dessus (fig. 17) qui représente, pour des plans carrés, la variation du coefficient K avec la surface ».

Le coefficient K (nommé sur le graphe *Kgo*) qu'utilisait Eiffel n'est cependant pas un coefficient adimensionnel [13].

---

[12] Voir cependant à ce sujet les travaux de Bearman : AN INVESTIGATION OF THE FORCES ON FLAT PLATES NORMAL TO A TURBULENT FLOW
…

[13] Ils sont en Kilogrammes-force par mètre carrés pour une vitesse d'écoulement ramenée à **1 m/s**. En première intention, il faut donc les multiplier par **16,016** pour obtenir nos $\mathbf{C_x}$ adimensionnels modernes (étant entendu qu'Eiffel rapportait toujours ses mesures à la Masse Volumique standard de l'air de **1,225 Kg/m³**).

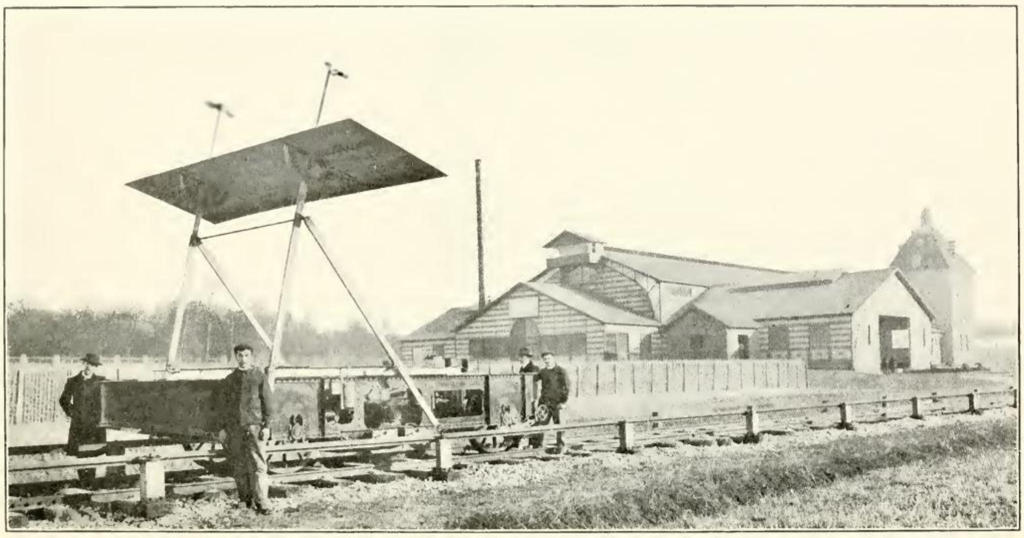
Ce coefficient K (ou ici Kgo) doit être multiplié par **16,016** pour donner notre moderne coefficient quadratique adimensionnel (ce qui place les points le plus à droite de la courbe ci-dessus à **1,25**, ce qui est un peu trop fort (puisque le C_x quadratique de la plaque carrée est actuellement considéré comme valant **1,18**, et ceci quel que soit la taille de cette plaque carrée)…

On peut penser qu'une étude précise des conditions d'expériences des diverses tailles de plaques expliquerait les disparités de mesures d'Eiffel…

D'autres questions se posaient cependant aux premiers expérimentateurs : L'effort exercé par un fluide immobile sur un corps se déplaçant dans ce fluide immobile est-il le même que l'effort exercé par un fluide en mouvement sur un corps fixe ?

À l'époque, en effet, coexistaient deux méthodes d'essais aérodynamiques : les essais de corps placés dans la veine d'une soufflerie et les essais de corps placés sur un charriot mobile :

SMITHSONIAN MISCELLANEOUS COLLECTIONS VOL. 62, NO. 3, PL. 10

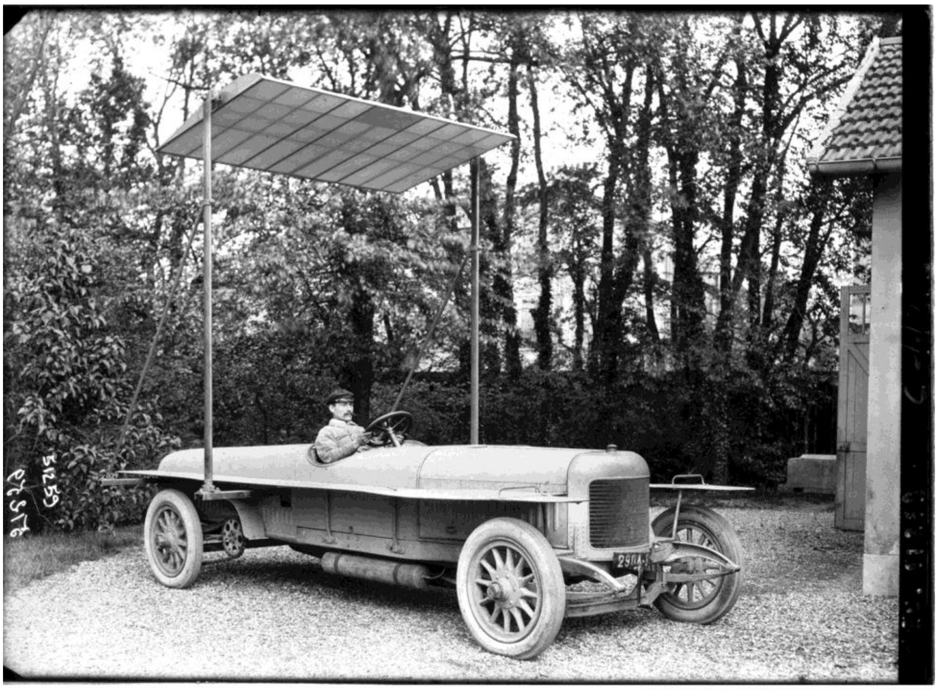


AEROTECHNIC INSTITUTE OF SAINT-CYR. VIEW OF FIRST PLATFORM EQUIPPED FOR A TRIAL

À propos de ses différents essais de traînée de plaques carrées (avec l'appareil de chute puis en soufflerie), Eiffel notait d'ailleurs :

« La continuité des résultats obtenus dans les deux méthodes montre qu'une plaque en mouvement dans l'air immobile a même résistance qu'un plaque immobile dans le vent, ce qui est parfois contesté. »

La polémique enflant, en particulier avec le duc de Guiche qui mesurait les efforts sur des corps portés par un véhicule automobile :

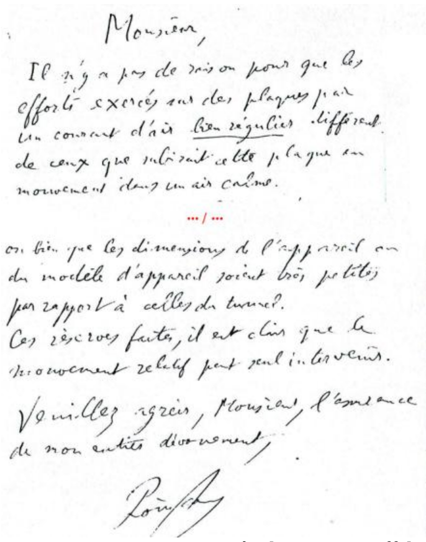


Institut aérodynamique du duc de Guiche : [photographie de presse] / Agence Meurisse,
Source : Gallica : http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/btv1b9042301g

…Eiffel demanda l'avis d'un grand mathématicien et physicien, Henri Poincaré. Celui-ci lui répondit, en 1912 :

« Il n'y a pas de raison pour que les efforts exercés sur des plaques par un courant d'air *bien régulier* *diffèrent de ceux que subirait cette plaque [sic.] en mouvement dans un air calme »*, à condition *« que les dimensions de [la plaque] soient très petites par rapport à celles du tunnel »*. Enfin, le même Poincaré conclut : *« Ces réserves faites, il est clair que le mouvement relatif peut seul intervenir.* [14] [15] »

Martin Peter, conservateur de la Soufflerie Eiffel, 67 Rue Boileau, 75016 Paris, nous à obligeamment fait parvenir une copie du courrier de Poincaré à Eiffel ; en voici deux extraits :



Monsieur,

Il n'y a pas de raison pour que les efforts exercés sur des plaques par un courant d'air bien régulier diffèrent de ceux que subirait cette plaque en mouvement dans un air calme.

…/…

ou bien que les dimensions de l'appareil ou du modèle d'appareil soient très petites par rapport à celles du tunnel.
Ces réserves faites, il est clair que le mouvement relatif peut seul intervenir.

Veuillez agréer, Monsieur, l'assurance de mon entier dévouement,

Poincaré

source : Aérodynamique Eiffel

[14] Poincaré reprend ici l'expression d'Eiffel qui lui demandait dans son courrier : *« Est-il possible de supposer que les pressions sur la plaque […] varient suivant l'une ou l'autre manière de procéder ou, au contraire, le mouvement relatif est-il seul en jeu. »*

[15] Des extraits de cette réponse de Poincaré sont publiés par Gustave Eiffel lui-même, p. 389 de Nouvelles Recherches sur la résistance de l'air et l'aviation faites au laboratoire d'Auteuil, 1924.

Notons d'ailleurs que l'existence des excellentes souffleries actuelles n'interdit en rien la pratique d'essais de corps tractés par des mobiles (terrestres ou aériens), par exemple, ces essais étant bien-sûr effectués au petit matin en air calme (voir le graphe plus loin).

Une autre qualité que l'on demande au Coefficient de Traînée est de représenter par un nombre si possible constant les qualités de pénétration dans un fluide d'un corps d'une certaine forme, ceci indépendamment de la taille du corps et de la vitesse de l'écoulement (au fond, comme on demande à un thermomètre d'indiquer par un seul nombre la température d'un corps, ou à une balance d'indiquer la masse d'un certain corps)…

Ceci, au moins dans une certaine plage de Reynolds (ce qui correspond, pour l'ingénieur, à une certaine plage de taille et de vitesse, dans un fluide donné).

Cette demande est d'ailleurs assez proche de celle d'un pense-bête : il est plus facile de retenir le **C_x** du disque que toute la formule donnant sa Traînée…

Cette requête d'un Coefficient de Traînée constant est presque parfaitement satisfaite dans le cas des corps non profilés. Ainsi les **C_x** quadratique du disque, de la palette de longueur infinie ou carrée, du cube,, sont connus pour être constant, du moins dans une large plage de Reynolds au-delà de **10^4**.

Cette même requête d'un Coefficient de Traînée constant est également remplie de façon satisfaisante avec le **C_x** quadratique de la sphère lisse dans la première partie de la plage de Reynolds précédemment nommée *plage de Newton* : on note sur notre graphe déjà montré que du Reynolds diamétral **1000** au Reynolds **300 000**, ce **C_x** quadratique est à peu près constant.

Cependant, en dehors de cette plage, et plus spécialement pour les Reynolds inférieurs à **1000** et pour les Reynolds supérieurs à **300 000**, le **C_x** quadratique de la sphère lisse varie notablement et même parfois *catastrophiquement*, non l'avons déjà dit.

Une dernière qualité que l'on attend du Coefficient de Traînée est d'être issu d'une définition simple. Dans le cas du **C_x** quadratique, cette définition peut paraître assez compliquée pour les étudiants qui abordent la Mécanique des Fluides :

$$\mathbf{C_x = \frac{F}{½\rho V^2 S}}$$

…du moins s'ils ne savent reconnaître, dans ses différents termes, les éléments constitutifs de l'effort de Traînée, à savoir :

→ la Pression Dynamique (surpression relative effectivement mesurée au point d'arrêt), cette Pression Dynamique donnant l'échelle des efforts sur tout le corps considéré :

$$\mathbf{q = ½\rho V^2}$$

→ et la surface **S**.

Un libellé réellement simplifié du C_x quadratique est d'ailleurs :

$$C_x = \frac{F}{qS}$$

Cette définition actuelle du C_x quadratique adimensionnel :

$$C_x = \frac{F}{½\rho V^2 S} = \frac{F}{qS}$$

…est due à Richard Knoller. Prandtl l'adopta et en fit la promotion [16].

Avant que cette définition de Knoller fût adoptée universellement par les chercheurs, certains auteurs, tombant dans ce que l'on pourrait appeler un *simplisme complicateur*, proposèrent l'idée (fort mauvaise à notre goût) de retirer de cette définition, par exemple, le ½ qui y siège, ou encore, s'agissant du C_x quadratique de la sphère, de retirer le **π/4** de la section **πd²/4** : la définition du C_x quadratique se *simplifiait* alors, dans le premier cas, en :

$$C_x = \frac{F}{\rho V^2 S}$$

…expression où **F** est la Traînée, **ρ** la Masse Volumique du fluide, **V** la vitesse de l'écoulement et **S** la section de référence choisie (en général la section frontale).

…ou encore, dans le deuxième cas, *se simplifiait* en :

$$C_x = \frac{F}{½\rho V^2 d^2}$$

…expression où **d** est évidemment le diamètre. En voici un exemple, au texte francisé par nos soins, dans le Rapport NACA N°185 :

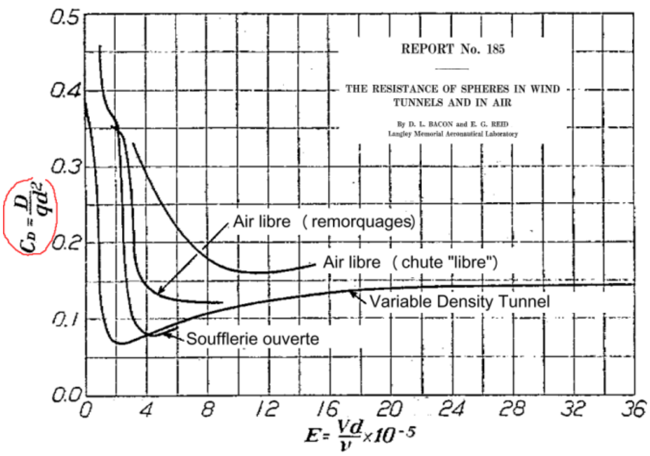


FIG. 17.– Résistance des sphères dans l'air

(en anglais **D** signifie *Drag*, c.-à-d. Traînée et C_D signifie C_x)
q est ici la Pression Dynamique **½ρV²**.

---

[16] Il est dit dans la Note Technique NACA N° 134 : « Dans l'hebdomadaire *Aerial Age* du 3octobre [1921], le Professeur Prandtl commentait les avantages de réduire la vitesse de l'air à l'expression ½ **ρV²** comme proposé en premier en 1914 par le Professeur [Richard] Knoller et adopté par tous les laboratoires allemands [et Autrichiens] depuis 1917. Il a également préconisé l'introduction générale de coefficients absolus. » [On disait plus facilement, à l'époque, « coefficients absolus » que « coefficients adimensionnels ». NdBdGM]

Ces deux dernières *simplifications* simplifiaient effectivement l'écriture de la définition du $\mathbf{C_x}$ quadratique, mais nullement sa lecture et encore moins sa mémorisation. À titre d'exercice, on peut par exemple simplifier l'écriture de l'expression *Pression Dynamique* en en faisant disparaître certaines lettres, écrivant par exemple « *ressio ynamque* » : ces suppressions de lettres simplifient peut-être l'écriture mais surement pas la lecture !

Autre exemple de mauvaise simplification, ce texte britannique de Bairstow, Cave et Lang qui date de 1921.

La proposition de C_x linéaire adimensionnel de Duan, He et Duan

Nous avons eu la chance de tomber sur un texte où ces auteurs beijingois, prenant acte du fait que dans la plage des faibles Reynolds (plage de Stokes) le $\mathbf{C_x}$ quadratique adimensionnel classique n'avait plus de signification physique, prônaient l'utilisation d'un $\mathbf{C_x}$ linéaire [17] adimensionnel.

Ils écrivent :

« [Un] coefficient de traînée *approprié* est proposé [dans ce texte] pour remplacer le coefficient à définition inertielle proposé par Newton. On constate que ce coefficient approprié est le paramètre adimensionnel désiré pour décrire le comportement physique des flux de fluides, de telle sorte que les problèmes de mécanique des fluides puissent être résolus d'une façon simple et intuitive. [Ce] coefficient de traînée approprié est présenté graphiquement et apparaît comme plus général et plus logique pour refléter le comportement physique des fluides en mouvement que le traditionnel coefficient de traînée centenaire. [18] »

Les auteurs beijingois ont eu l'idée d'adopter comme définition de ce nouveau coefficient de Traînée (que nous symboliserons par $\mathbf{C}_{\mathbf{x}\mathrm{LinDuan}}$) le produit :

$\mathbf{C}_{\mathbf{XQuad}}*\mathbf{R}_e$

...$\mathbf{R}_e$ étant bien-sûr le Reynolds diamétral (ce n'est pas précisé) et $\mathbf{C}_{\mathbf{xQuad}}$ l'actuel (et centenaire) $\mathbf{C_x}$ quadratique, probablement en référence à la surface frontale de la sphère.

Ce Coefficient de Traînée *linéaire* $\mathbf{C}_{\mathbf{x}\mathrm{LinDuan}}$ [19] étant le produit de deux quantités sans dimension ($\mathbf{C}_{\mathbf{xQuad}}$ et $\mathbf{R}_e$), il est évidemment adimensionnel.

À titre d'exemple, le produit du $\mathbf{C_x}$ quadratique de la sphère en régime de Stokes (**24/$\mathbf{R}_e$**) par son Reynolds donne tout simplement $\mathbf{C}_{\mathbf{x}\mathrm{LinDuan}} = \mathbf{24}$.

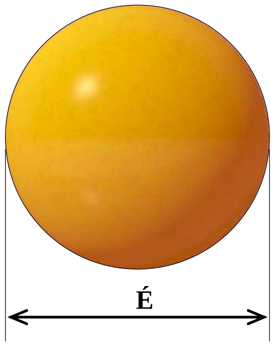
S'agissant toujours du cas de la sphère (de diamètre nommé **D**) :

---

[17] Ils n'écrivent d'ailleurs pas ce mot *linéaire* qui nous paraît pourtant essentiel pour caractériser ce coefficient. Ils qualifient simplement ce coefficient d'adimensionnel et d'« *appropriate* ».

[18] "The appropriate drag coefficient is proposed to replace the inertia type definition proposed by Newton. It is found that the appropriate drag coefficient is a desirable dimensionless parameter to describe fluid flow physical behavior so that fluid flow problems can be solved in the simple and intuitive manner. The appropriate drag coefficient is presented graphically, and appears more general and reasonable to reflect the fluid flow physical behavior than the traditional century old drag coefficient diagram."

[19] C'est nous qui ajoutons ce mot *linéaire* pour caractériser ce coefficient…



…et en s'appuyant sur la valeur de la définition du $\mathbf{C_x}$ quadratique :

$$\mathbf{C_{xQuad}} = \frac{\mathbf{F}}{\frac{1}{2}\boldsymbol{\rho} \mathbf{V}^2 \frac{\boldsymbol{\pi} \mathbf{D}^2}{\mathbf{4}}}$$

…ainsi que sur la définition du Reynolds :

$$\mathbf{R}_e = \frac{\mathbf{VD}}{\boldsymbol{\nu}} = \frac{\mathbf{VD}}{\frac{\boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{\rho}}}$$

…les trois auteurs poursuivent, en écrivant :

$$\mathbf{C_{x\mathrm{LinDuan}}} = \mathbf{C_{XQuad}} * \mathbf{R}_e = \frac{\mathbf{F}}{\frac{\pi}{8}\boldsymbol{\mu}\mathbf{VD}}$$

Ceci est leur double définition du $\mathbf{C_x}$ linéaire [20] (nommé par nous ici $\mathbf{C_{x\mathrm{LinDuan}}}$) : nous écrivons « double définition » car les auteurs posent deux signes **=**, ce qui pose des problèmes, nous le verrons plus bas.

Au demeurant, cette définition n'est valable que pour la sphère ou pour les corps à section frontale circulaire (puisque, pour la bâtir, ils ont posé $\mathbf{S = \pi D^2/4}$ dans le $\mathbf{C_{XQuad}}$).

Note sur l'inapplicabilité de la double définition de Duan, He et Duan :

En effet, la première égalité de la définition double de ces auteurs, lorsqu'elle est appliquée, non plus à la sphère mais au cube, fait écrire, toujours en s'appuyant sur la définition du $\mathbf{C_x}$ quadratique :

$$\mathbf{C_{xQuad}} = \frac{\mathbf{F}}{\frac{1}{2}\ \boldsymbol{\rho}\mathbf{V}^2\mathbf{c}^2}$$

…où $\mathbf{c^2}$ est la surface frontale du cube d'arête **c**, surface généralement adoptée)

…et en s'appuyant également sur la définition du Reynolds couramment admise pour le cube :

[20] Le lecteur aura compris que c'est nous qui qualifions ce $\mathbf{C_x}$ de linéaire car, quant à eux, ils ne le qualifient pas ainsi.

$$R_e = \frac{Vc}{\nu} = \frac{Vc}{\frac{\mu}{\rho}}$$

$$C_{xLinDuan} = C_{XQuad} * R_e = \frac{F}{\frac{1}{2}\rho V^2\ c^2}\ \frac{Vc}{\frac{\mu}{\rho}} = \frac{F}{\frac{1}{2}\ \mu V\ c}$$

…qui est le C_x linéaire de Duan et coll. pour le cube.

On remarque facilement qu'à la place du coefficient $\frac{\pi}{8}$ qui intervenait dans le calcul du C_x linéaire de Duan pour la sphère, c'est à présent le coefficient ½ qui intervient.

Ceci est extrêmement troublant et surtout malcommode à mémoriser.

Pour faire apparaître de coefficient ½ nous n'avons fait qu'honorer la première égalité ($C_{xLinDuan} = C_{XQuad} * R_e$) de la double définition de Duan et coll.

Si, par contre, nous avions choisi d'honorer la deuxième égalité, à savoir :

$$C_{xLinDuan} = \frac{F}{\frac{\pi}{8}\mu VD}$$

…il aurait fallu considérer que **D** était l'arête **c** du cube [21] et le C_x linéaire de Duan et coll. aurait pris la valeur :

$$C_{xLinDuan} = \frac{F}{\frac{\pi}{8}\mu Vc}$$

…ce qui est en contradiction avec la valeur précédemment trouvée à partir de la première égalité de la double définition.

Admettons cependant que pour des corps sphériques (ou de révolution), nous adoptions cette définition du C_x linéaire $C_{xLinDuan}$. La Traînée **F** du corps en ressort comme :

$$F = \frac{\pi}{8}\ C_{xLinDuan}\ \mu VD$$

Cette Traînée **F** est donc déterminée facilement d'après les seuls quatre paramètres que sont : le coefficient de Traînée $C_{xLinDuan}$ des trois auteurs, la viscosité dynamique **µ**, la Vitesse **V** de l'écoulement et le diamètre **D** de la sphère…

Cependant, le coefficient $\frac{\pi}{8}$ qui apparaît dans ce libellé de la force de Traînée ne nous séduit nullement !

Nous pensons en effet que ce coefficient est inutile et qu'on peut fort bien s'en passer en adoptant une définition plus simple du Coefficient de Traînée linéaire :

L'idéal, pour nous, est que la force de Traînée s'écrive tout simplement :

$$F = C_{xLin\ D}\ \ \mu VD$$

[21] Mais on pourrait faire appel à un diamètre moyen du cube, par exemple…

…ce qui équivaut à utiliser un nouveau coefficient $\mathbf{C_{xLin}}$ défini par :

$$\boxed{\mathbf{C_{x}}_{\text{Lin D}} = \frac{\mathbf{F}}{\mathbf{\mu V D}}}$$

…cet encadré constituant notre définition du $\mathbf{C_x}$ linéaire.

Attention au fait qu'alors ce n'est plus l'égalité :

$\mathbf{C_{xLin} = C_{XQuad}*R_e}$

…qui sera en vigueur pour les corps de révolution présentés face à l'écoulement (le $\mathbf{C_x}$ quadratique étant basé sur la surface frontale de ces corps), mais plutôt :

$$\mathbf{C_{x}}_{\text{Lin D}} = \frac{\pi}{8}\mathbf{C_{XQuad}*R_e}$$

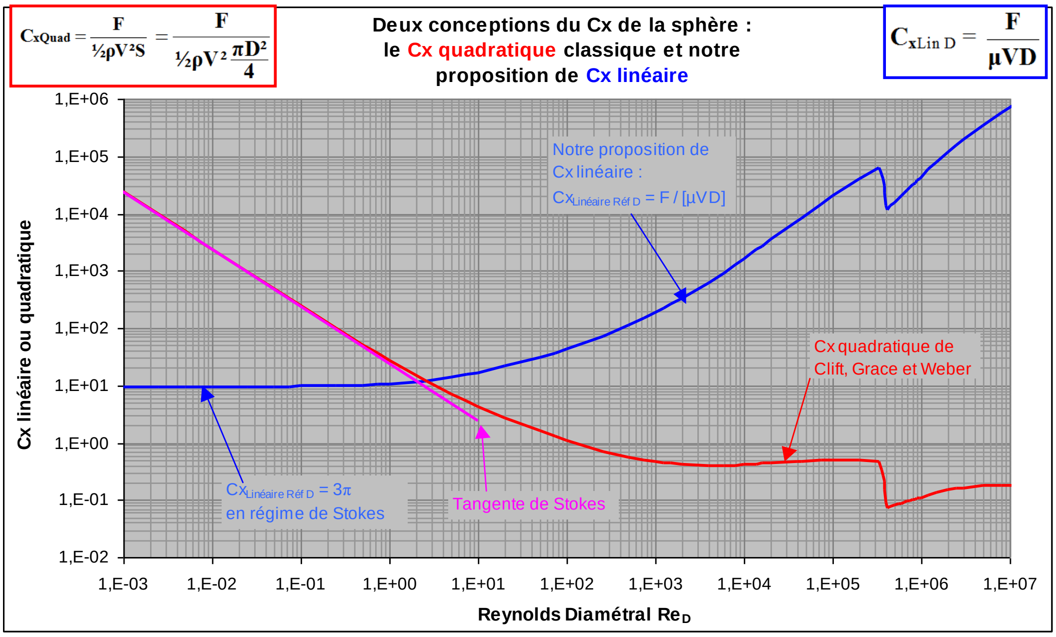
Ce coefficient $\frac{\pi}{8}$ est bien-sûr gênant mais, à notre sens, c'est sans importance puisque cette égalité est une égalité annexe qui n'a pas à être mémorisée par les étudiants ; d'ailleurs elle n'est plus valable pour les corps autres que de révolution (les corps prismatiques, par exemple).

Si nous résumons notre réflexion, nous pouvons dire que nous adoptons avec grand intérêt la proposition des beijingois Duan, He et Duan en la pondérant d'un coefficient qui simplifie l'énoncé de la Traînée en y faisant disparaître un paramètre numérique arbitraire et, à notre sens inutile.

Dans ces conditions, le Coefficient de Traînée linéaire $\mathbf{C_{xLin}}$ que nous attacherons à la sphère en régime de Stokes n'est pas **24**, mais $\frac{\pi}{8}$ ***24**, soit $\mathbf{C_{x}}_{\text{Lin D}} = \mathbf{3\pi}$.

Et il est bien-sûr constant dans toute la plage de Stokes…

D'une façon plus générale, il est aisé de dessiner sur toute la plage des Reynolds possibles l'évolution du $\mathbf{C_x}$ linéaire de la sphère lisse (celui-ci étant défini comme $\mathbf{C_{x}}_{\text{Lin D}} = \frac{\mathbf{F}}{\mathbf{\mu V D}}$) :



Sur ce graphe, nous avons rappelé à droite notre définition du $\mathbf{C_x}$ linéaire pour la sphère et à gauche la définition classique du $\mathbf{C_x}$ quadratique pour la même sphère.

Il est patent que ce $\mathbf{C_x}$ linéaire est constant dans la plage de Stokes (pour les Reynolds inférieur à **0,1**) même si on peut admettre cette constance jusqu'au Reynolds unitaire ; de fait P. Chassaing, dans son ouvrage MÉCANIQUE DES FLUIDES, écrit p. 339 à propos de la formule de Stokes (**3πµVD**) donnant la Trainée de la sphère : « sa vérification expérimentale a montré que sa plage de validité s'étendait au-delà de la clause d'établissement théorique $\mathbf{R_e{<<}1}$ puisqu'elle s'applique en fait jusqu'à des nombres de Reynolds de l'ordre de l'**unité**. [22] »

Au demeurant, Oseen puis Lamb ont étendu la connaissance de la Traînée de la sphère un peu à l'extérieur de la plage de Stokes. Nous y revenons plus bas…

Nous pourrions conclure sur ce sujet de la définition du $\mathbf{C_x}$ linéaire, que c'est bien avant que de mauvaises habitudes soient prises qu'il faut faire la promotion d'un $\mathbf{C_x}$ linéaire pragmatique, simple et facile à mémoriser (puisque sans coefficient numérique arbitraire).

Mais, avant de poser le point final à cette partie de notre texte, nous devons ajouter que dans leur texte, Duan, He et Duan vont jusqu'à prétendre que l'ensemble des ingénieurs de la planète (ou peut-être du cosmos) gagneraient à adopter leur Coefficient de Traînée *approprié* ; nous ne pensons pas que chez Airbus ou chez Boeing on va abandonner des coefficients adimensionnels quadratiques qui donnent pleine satisfaction pour d'autres coefficients linéaires (linéarité qui n'apportent réellement de simplifications qu'en régime de Stokes).

Avec cette proposition, les chercheurs beijingois se montrent donc quelque peu naïfs, mais la naïveté est une qualité qui nous possède aussi puisque nous avons celle de croire que le présent texte pourra faire fléchir peu à peu les habitudes prises par les Mécaniciens des Fluides de notre planète [23]…

---

[22] Autre son de cloche : cité par en.wikipedia, *Martin Rhode, dans Introduction to Particle Technology écrit cependant : « Expérimentalement, la loi de Stokes s'avère exacte à* ***1%*** *près pour* $\boldsymbol{R_e < 0{,}1}$, *à* ***3%*** *pour* $\boldsymbol{R_e \leq 0{,}5}$ *et* **9 %** pour $\mathbf{R_e \leq 1}$. »

[23] Ne doutons pas que nos amis extra-terrestres ont déjà adopté cette option simplificatrice.

Que doit-on s'imposer lorsque l'on fait usage d'un Coefficient adimensionnel et en particulier de notre C_x linéaire ? :

Donner la valeur d'un coefficient adimensionnel quadratique (**C_x**, **C_y**, **C_z**, **C_m**, etc.) dans un texte de Mécanique des Fluides n'a de sens que si l'on précise la surface de référence (pour un coefficient adimensionnel aux Reynolds aéronautiques). De même, en régime de Stokes, donner la valeur d'un **C_x** linéaire n'aura de sens que si la longueur de référence est précisée.

Déroger à cette règle est un crime contre la logique et contre la science. Nous avons nous-même assez fréquemment été victime de tels crimes au hasard de nos lectures de travaux de chercheurs et cela nous a bien remonté contre ces chercheurs car l'ambigüité sur la surface de référence utilisée par eux nous empêchait d'exploiter leurs textes (souvent passionnants).

De la même façon que, dans le présent texte, nous préciserons par l'indice *Lin* que le **C_{xLin}** est un **C_x** linéaire, nous nous ferons un devoir de préciser (jusqu'à devenir souvent importun) la longueur de référence de ce **C_x** linéaire (longueur ayant présidé à l'obtention de ce **C_x** linéaire).

Cela sera fait en ajoutant, toujours sous forme d'indice, une lettre (**D** ou **L** par exemple) ou même plusieurs lettres : cela donnera :

$C_{x\mathrm{Lin}\,\mathbf{D}}$, $C_{x\mathrm{Lin}\,\mathbf{L}}$ ou $C_{x\mathrm{Lin}\,\mathbf{Longueur}}$

Nous verrons d'ailleurs qu'il est très aisé de changer la longueur de référence d'un **C_x** linéaire pour essayer de le faire mieux parler (exactement comme on joue avec les surfaces de référence des **C_x** quadratiques).

Notion de *Longueur Équivalente de Traînée* en régime de Stokes :

En Mécanique des Fluides des hauts Reynolds, dans certains cas où la surface frontale est difficile à définir (parce que variable dans le temps, par exemple) comme dans l'étude de la Traînée aérodynamique des athlètes ou des cyclistes, on fait appel à la *surface équivalente de Traînée* qui n'est autre que le produit **$S\,C_x$** .

Cette *surface équivalente de Traînée* (ou *surface de Traînée* tout court, ou, bien-sûr **$S\,C_x$**) possède évidemment la dimension d'une surface (**m^2** pour nous autres et pied-carré-du-Roy ou autres unités médiévales pour les États-Uniens).

Dans la même optique, mais s'agissant des très bas Reynolds du régime de Stokes qui nous intéresse, **nous utiliserons parfois dans ce texte la notion de *Longueur de Traînée*, ou *Longueur Équivalente de Traînée***.

Cette quantité est évidemment le produit du **C_x** linéaire par la longueur qui à présidé à son établissement : $C_{x\mathrm{Lin}\,\mathbf{L}}*\mathbf{L}$, par exemple, ou $C_{x\mathrm{Lin}\,\mathbf{D}}*\mathbf{D}$, et sa dimension est évidemment celle d'une longueur (le mètre, pour nous).

Cette *Longueur Équivalente de Traînée* est une forme de *Traînée réduite* (elle n'est autre que le quotient de la Traînée en Newton par la viscosité dynamique **μ** du fluide et la vitesse **V** de la particule), mais elle affiche sa dimension (c'est une longueur), ce qui lève toute ambigüité.

En conséquence de quoi il faut la faire suivre obligatoirement de sa dimension (**le mètre** chez nous ou Verge du Roy ou Pied-de-la-Reine chez les médiévaux)…

L'usage de cette Longueur de Traînée n'oblige plus, par contre, à préciser la longueur de référence, mais il sera toujours utile, à fins de comparaisons, de préciser la forme du corps ainsi que sa taille.

C'est vers ce concept de *Longueur Équivalente de Traînée* qu'il faudra se rabattre dès que l'on aura du mal à manipuler le $\mathbf{C_x}$ linéaire d'un corps (et toujours en précisant la dimension choisie : le mètre pour nous mais possiblement certains sous-multiples comme le millimètre ou même le micron pour limiter le nombre de zéro après la virgule ou même le nombre de chiffres devant cette virgule. Ainsi, la Longueur de Traînée d'une sphère de diamètre **6 mm** est **3 π*6 mm** [24], soit **56,55 mm**, ou si l'on veut **5,655 cm**.

Ce concept de *Longueur Équivalente de Traînée* est d'autant plus pratique que l'action des autres paramètres intervenant dans la Traînée (en Newton) est plus intuitive (plus le liquide est visqueux et plus la Traînée est forte, et de même pour la vitesse) et donc plus facile à négliger par la pensée.

Autre façon d'exprimer la Traînée en régime de Stokes : le Coefficient de Friction de Stokes

On trouve dans certains textes de Mathématiques appliquées à la Mécanique des Fluides des bas Reynolds le concept de **Coefficient de Friction en régime de Stokes** (Stokes Friction Coefficient ou Translationnal Stokes Friction Coefficient ou Frictional Drag Coefficient dans la langue de Guantanamo).

Cette quantité représente une Traînée réduite des corps, cette réduction se faisant par quotient par la seule vitesse desdits corps.

Ainsi, par exemple, Ui écrit dans sa thèse :

« **6 π μ a** est le coefficient de friction de Stokes [pour la sphère de rayon **a]** »

Ou encore Bartuschat et coll. écrivent dans leur texte (que nous exploiterons plus bas) :

$$\mathbf{U_{//} = F/\gamma_{t//}} \quad \text{ou} \quad \mathbf{U_{\perp} = F/\gamma_{t\perp}}$$

…**F** étant la Traînée et $\gamma_{t//}$ et $\gamma_{t\perp}$ étant les Coefficients de Friction en régime de Stokes des corps lors de translations axiales et transverses.

Ce qui définit les Coefficients de Friction en régime de Stokes $\gamma_{t//}$ et $\gamma_{t\perp}$ comme :

$$\gamma_{t//} = \mathbf{F/U_{//}} \quad \text{et} \quad \gamma_{t\perp} = \mathbf{F/U_{\perp}}$$

Lorsqu'un chercheur donne le *Coefficient de Friction en régime de Stokes* d'un corps, il est alors assez facile d'en tirer la Traînée (en multipliant par la simple vitesse)

[24] Nous le verrons cent fois dans ce texte : **3 π** est le C_x linéaire de la sphère, en référence à son diamètre.

ainsi que notre **C_x** linéaire (en divisant par la viscosité cinématique et la longueur caractéristique que l'on souhaite adopter [25]).

Ceci étant, il est important de prendre conscience que ce *Coefficient de Friction en régime de Stokes* n'est pas adimensionnel : le quotient **F/V** d'une force par une vitesse a la dimension d'un débit massique (le **Kg/s**) : il vient alors l'idée de l'appeler plutôt *Débit Massique Frictionnel*, ce qui serait une dénomination plus rigoureuse. [26]

Cependant l 'usage de ce Coefficient de Friction en régime de Stokes, défini comme **F/V**, constitue donc une certaine simplification dans l'énoncé de la Traînée (par rapport à toutes les comparaisons que d'autres textes font avec la sphère ou autres corps). Mais force est de constater que ce Coefficient de Friction en régime de Stokes crée une confusion regrettable avec le Coefficient de Friction utilisé souvent pour les corps fuselés et les parois planes aux hauts Reynolds (ce dernier Coefficient de Friction étant défini comme **F/(qS)**, **S** étant la surface prise comme référence (souvent la surface totale de friction, sur un avion ou un dirigeable, par exemple) et **q** étant la Pression Dynamique de l'écoulement.

Au demeurant, nous utiliserons nous-même ce Coefficient de Friction **F/(qS)** dans notre exploitation des textes consacrés à la friction de la plaque plane en régime de Stokes…

Passons à présent en revue les corps simples les plus fréquents et donnons leur un **C_x** linéaire :

C_x linéaire de l'ellipsoïde :

Un texte du professeur Goodarz Ahmadi, du Department of Mechanical and Aeronautical Engineering de l'Université de Clarkson donne (citant probablement les travaux d'Oberbeck, en 1876) un coefficient de correction **k'** permettant de passer de la Traînée de la sphère à celle d'ellipsoïdes.

Pour nous ce coefficient **k'** sera évidemment à appliquer au **C_x** linéaire de la sphère pour construire le **C_x** linéaire de ces ellipsoïdes.

Le texte donne deux valeurs assez complexes du coefficient **k'** selon que l'ellipsoïde est allongé dans le sens de son déplacement (nous dirons également pointu) ou aplati (toujours dans le sens de son déplacement).

[25] Comme nous venons de le dire, il n'est pas nécessaire de connaître la longueur caractéristique utilisée (ou non) pour l'établissement dudit Coefficient de Friction en régime de Stokes.

[26] La signification physique de ce *Débit Massique Frictionnel* pourrait faire l'objet d'une étude particulière ; gageons qu'une telle étude montrerait que ce *Débit Massique* a un lien étroit avec la diminution du débit du fluide créée par la présence du corps immobile dans l'écoulement de fluide.

Déplacement polaire des ellipsoïdes de révolution :

Nous appellerons *polaire* (ou axial) ce déplacement lorsqu'il se fait selon l'axe qui relie les pôles (désignés ci-dessous par les lettres **N** et **S**), comme ci-dessous dans la direction de la flèche bleue

Déplacement polaire

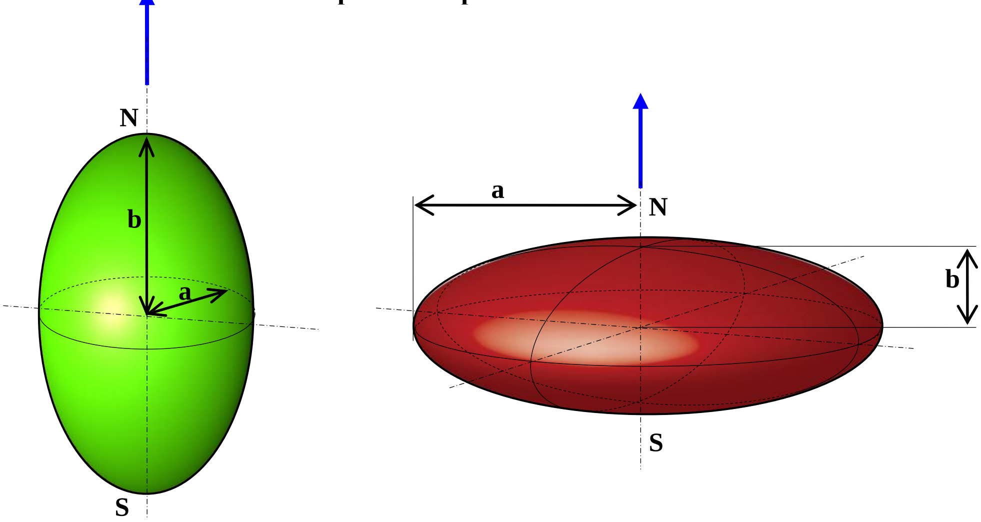


Schéma a **Schéma b**

Nous symboliserons par **λ** et nommerons *élancement* le rapport **b/a** (rapport du rayon polaire sur le rayon équatorial, qui vaut le rapport du diamètre polaire sur le diamètre équatorial, rapport qui est fréquemment utilisé en Mécanique des Fluides sous ce même nom d'*élancement*).

Quand l'ellipsoïde est allongé selon ses pôles (corps vert ci-dessus) et <u>qu'il se déplace selon l'axe polaire</u>, le coefficient de correction à appliquer à la Traînée de la sphère (et donc, pour nous à son C_x linéaire) est :

$$k' = \frac{\frac{4}{3}(\lambda^2 - 1)}{\frac{(2\lambda^2 - 1)}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} \mathrm{Ln}\left[\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}\right] - \lambda} \qquad \text{avec } \lambda = \mathbf{b/a} \text{ et } > \mathbf{1}$$

Notons d'ailleurs que le texte de Srivastava, Yadav & Yadav donne implicitement, pour ce coefficient de correction **k'** la valeur :

$$k' = \frac{8e^3}{3\sqrt{1 - e^2}\left[(1 + e^2)\mathrm{Ln}\left(\frac{1 + e}{1 - e}\right) - 2e\right]}$$

…ceci pour peu que dans « Log » on lise « Ln ».

Dans cet énoncé le paramètre **e** est l'<u>*excentration*</u>, à savoir :

$$e = \sqrt{1 - \frac{1}{\left(\frac{b}{a}\right)^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{\lambda^2}}$$

(ladite *excentration* est nulle pour la sphère et s'approche de **1** pour les grands allongements)

Cet énoncé produit exactement les mêmes résultats numérique que celui de Goodarz Ahmadi (ce qui donnera envie à certains d'en effectuer la comparaison mathématique)…

De même Clift, Grace et Weber, dans leur ouvrage BUBBLES, DROPS, AND PARTICLES proposent le libellé :

$$k' = \frac{\frac{4}{3}(\lambda^2 - 1)}{\left[\frac{(2\lambda^2 - 1)\mathrm{Ln}\left(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}\right)}{\sqrt{\lambda^2 - 1}}\right] - \lambda}$$

…libellé qui donne le même résultat numérique que les précédents !

Ces auteurs proposent également une approximation de ce coefficient **k'** :

k' = 0,2 (4+λ) = 0,2 λ +0,8

C'est la droite que nous trouverons également plus bas pour ce même cas.
Il s'avère que cette approximation est valable pour les élancements inférieurs à **7**, limite où elle atteint une erreur de **2,7%**. Pour les élancements supérieurs à **7**, nous proposons nous-même l'approximation :

$$k' = \frac{\frac{4}{3}\lambda}{2\mathrm{Ln}(2\lambda) - 1}$$

Cette approximation est bonne pour les élancements supérieurs à **7** (borne où l'erreur est inférieure à **2%**) Pour les élancements supérieurs ou égaux à **10**, l'erreur est inférieure à **1 %** puis rapidement décroissante.

Le coefficient **k'** faisant référence à la sphère de même diamètre **2a = D** que l'ellipsoïde (puisque, par définition, on a **k'= F/3πµVD**), on peut tirer facilement de ces valeurs (équivalentes) de **k'** le C_x linéaire de l'ellipsoïde allongé en déplacement polaire [27] :

$$C_{xLin\,D} = \frac{4\pi(\lambda^2 - 1)}{\frac{(2\lambda^2 - 1)}{\sqrt{\lambda^2 - 1}}\mathrm{Ln}\left[\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}\right] - \lambda} \quad \text{avec } \lambda = b/a \text{ et } > 1$$

…qui est le C_X linéaire de l'ellipsoïde allongé **en déplacement polaire** selon son élancement **λ**, en référence à son petit diamètre **D = 2a**.

Nous dessinerons cette courbe plus bas.

D'autres libellés donnant ce même C_x linéaire existent. Citons l'un des plus élégants, évoqué par E. O. Tuck dont nous étudierons plus bas le texte ; après correction d'une erreur de transcription et quelques manipulations, ce libellé est :

[27] En multipliant tout simplement **k'** par **3π**.

$$\boxed{C_{xLin\,L} = \frac{4\pi e^3}{(1+e^2)\mathrm{Artanh}(e) - e}}$$

…qui est le C_x linéaire en référence à sa longueur **L = 2b** (et non à son diamètre **D = 2a**) de l'ellipsoïde allongé **en déplacement polaire**, libellé où **e** est l'excentration de l'ellipsoïde, soit **e** = $\sqrt{1-\frac{1}{\lambda^2}}$, si λ est l'élancement de l'ellipsoïde, et **Artanh( )** la fonction Argument tangente hyperbolique.

Tout ces libellés sont évidemment reliés algébriquement les uns aux autres ; pour ce dernier, en particulier, il faut songer à l'expression en logarithme népérien de la fonction Artanh( ). Il faut parfois aussi en changer la longueur de référence.

Changement de longueur de référence :

Comme avec les C_x quadratiques, il est assez facile de changer la longueur de référence d'un C_x linéaire : il suffit de multiplier le C_x linéaire d'origine par sa longueur de référence et de diviser ce produit par la nouvelle longueur de référence. Ainsi le C_x linéaire de l'ellipsoïde allongé en déplacement polaire en référence à sa longueur **L = 2b** sera le produit par **D/L** (soit **1/λ**) du libellé encadré ci-dessus.

On ne peut pas prétendre cependant que la Traînée d'un corps en régime de Stokes soit due à une longueur plutôt qu'à une autre (alors que, par exemple, pour les hauts Reynolds, la Traînée de beaucoup de corps non profilés est vraiment dépendante de leur surface frontale et que la Traînée de beaucoup de corps bien profilés est vraiment dépendante de leur surface mouillée, surfaces qu'on aura donc intérêt à prendre comme référence).

Si donc, en régime de Stokes, l'on prend une longueur de référence ou une autre (le diamètre du corps ou sa longueur, par ex.) se sera afin de proposer un libellé simple du C_x linéaire et souvent aussi pour proposer une évolution simple de celui-ci par rapport à un autre paramètre (comme l'élancement du corps, par exemple, pour les ellipsoïdes de révolution) ; le plus souvent, donc, la longueur de référence choisie ne sera pas la longueur de référence la plus pertinente du point de vue physique…

Lorsque l'ellipsoïde est aplati selon l'axe de ses pôles (corps rouge ci-dessus), le déplacement se faisant toujours **selon l'axe polaire**, le coefficient **k'** vaut :

$$k' = \frac{\frac{4}{3}(\varepsilon^2-1)}{\frac{\varepsilon(\varepsilon^2-2)}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}\mathrm{ATan}\left[\sqrt{\varepsilon^2-1}\right]+\varepsilon} \quad \text{avec } \varepsilon = a/b \text{ et } >1$$

…ou encore, ainsi que nous l'avons calculé avec le scrupule de conserver l'élancement λ (qui est alors inférieur à **1**) :

$$k' = \frac{\frac{4}{3}(1-\lambda^2)}{\frac{(1-2\lambda^2)}{\sqrt{1-\lambda^2}}\mathrm{ATan}\left[\frac{1}{\lambda}\sqrt{1-\lambda^2}\right]+\lambda} \quad \text{avec } \lambda = b/a \text{ et } <1$$

Srivastava et ses collaborateurs proposent implicitement, quant à eux, une autre rédaction de ce coefficient **k'** pour ces ellipsoïdes de révolution aplatis en déplacement polaire. C'est :

$$k' = \frac{\frac{4}{3}e^3}{e\sqrt{1-e^2} - (1-2e^2)\mathrm{Asin}(e)}$$

Clift, Grace et Weber proposent eux-mêmes un libellé en ArcCosinus, d'ailleurs mal rédigé et donc difficile à lire. Par contre ils considèrent toujours comme valide l'approximation **k'= 0,2λ +0,8** dont nous verrons les limites plus bas.

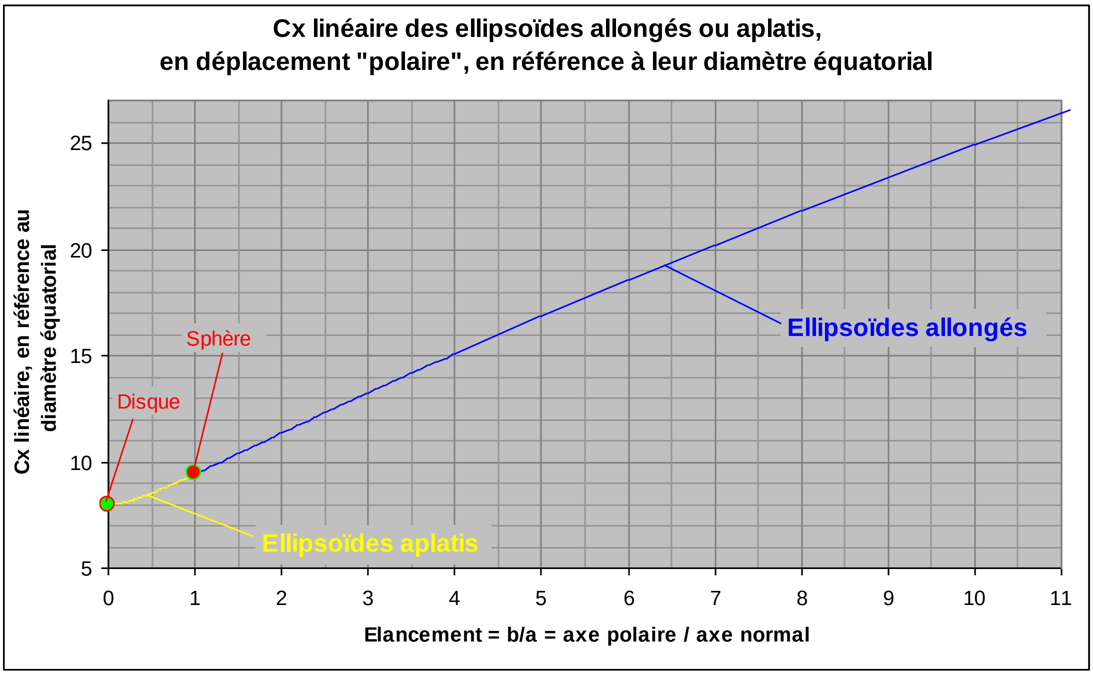
De même, on peut tirer de ces valeurs équivalentes le C_x linéaire de l'ellipsoïde aplati à ses pôles en déplacement polaire :

$$C_{x\mathrm{Lin}\,D} = \frac{4\pi(1-\lambda^2)}{\frac{(1-2\lambda^2)}{\sqrt{1-\lambda^2}}\mathrm{ATan}\left[\frac{1}{\lambda}\sqrt{1-\lambda^2}\right]+\lambda} \qquad \text{avec } \lambda = b/a \text{ et } <1$$

…qui est le C_X linéaire de l'ellipsoïde aplati en **déplacement polaire** selon son élancement λ, en référence à son diamètre **D = 2a**.

Répétons qu'il est assez facile de déterminer le C_x linéaire du même ellipsoïde aplati en déplacement polaire en référence à sa longueur **L = 2b** : l'énoncé de ce C_x linéaire est le même que ci-dessus à ceci près qu'il est multiplié par **1/λ**.

Voici l'évolution du C_x linéaire des ellipsoïdes allongés ou aplatis en déplacement polaire, en référence à leur diamètre équatorial :



On note que ces deux courbes honorent le $\mathbf{C_x}$ linéaire de la sphère (**3** $\boldsymbol{\pi}$) et celui du disque (**8**) lorsqu'il est en déplacement perpendiculaire à son plan (donc également polaire).

Déplacement transverse (perpendiculaire à l'axe des pôles) des ellipsoïdes de révolution :

Déplacement perpendiculaire à l'axe des pôles

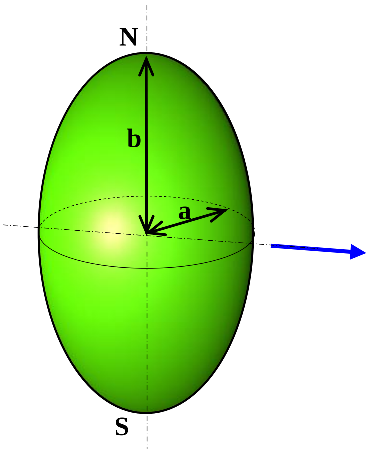


Schéma c

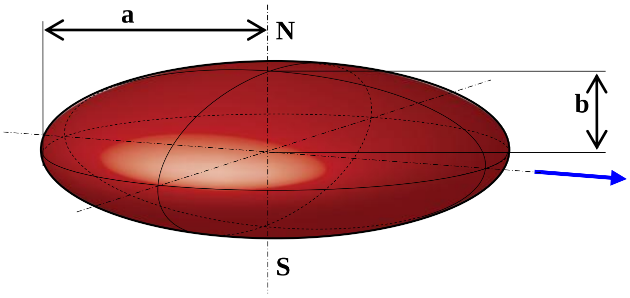


Schéma d

Pour les déplacements perpendiculaires à l'axe des pôles d'ellipsoïdes allongés selon leur axe polaire (corps vert ci-dessus), le coefficient de correction à appliquer à la Traînée ou au $\mathbf{C_x}$ linéaire est :

$$\mathbf{k'} = \frac{\frac{8}{3}(\lambda^2-1)}{\frac{(2\lambda^2-3)}{\sqrt{\lambda^2-1}}\mathrm{Ln}\left[\lambda+\sqrt{\lambda^2-1}\right]+\lambda}$$ avec encore $\boldsymbol{\lambda}$ = **b/a** et >**1**

Le texte de Srivastava, Yadav & Yadav donne de même, implicitement, pour ce coefficient de correction **k'** des ellipsoïdes de révolution allongés en déplacement polaire, la valeur :

$$\mathbf{k'} = \frac{16e^3}{3\sqrt{1-e^2}\left[2e+(3e^2-1)\mathrm{Ln}\left(\frac{1+e}{1-e}\right)\right]}$$

…ceci toujours quand on traduit « Log » en « Ln ».

Dans cet énoncé le paramètre **e** est toujours l'excentration, à savoir :

$$\mathbf{e} = \sqrt{1-\frac{1}{\left(\frac{b}{a}\right)^2}}$$

Clift, Grace et Weber proposent un autre libellé en Ln. Pour ces ellipsoïdes allongés en déplacement transverse, ils proposent une régression linéaire pour le coefficient **k'** dont nous verrons les limites plus bas :

k' = 0,4 λ +0,6

Il est aisé de tirer un C_x linéaire de ces valeurs de **k'** :

$$C_{x\text{Lin D}} = \frac{8\pi(\lambda^2-1)}{\frac{(2\lambda^2-3)}{\sqrt{\lambda^2-1}}\,\mathrm{Ln}\left[\lambda+\sqrt{\lambda^2-1}\right]+\lambda}$$ avec encore **λ = b/a** et **>1**

…qui est le C_X linéaire de l'ellipsoïde allongé en déplacement transverse selon son élancement **λ**, en référence à son petit diamètre **D = 2a**.

Si à présent c'est un ellipsoïde aplati selon l'axe de ses pôles (corps rouge ci-dessus) qui se déplace perpendiculairement à son axe polaire, le coefficient **k'** vaut :

$$k' = \frac{\frac{8}{3}(\varepsilon^2-1)}{\frac{\varepsilon(3\varepsilon^2-2)}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}\,\mathrm{ATan}\left[\sqrt{\varepsilon^2-1}\right]-\varepsilon}$$ avec **ε = a/b** et **>1**

…ou encore, en conservant l'élancement **λ** (qui est alors inférieur à **1**) :

$$k' = \frac{\frac{8}{3}(1-\lambda^2)}{\frac{(3-2\lambda^2)}{\sqrt{1-\lambda^2}}\,\mathrm{ATan}\left[\frac{1}{\lambda}\sqrt{1-\lambda^2}\right]-\lambda}$$ avec toujours **λ = b/a** et **<1**

Pour ces mêmes ellipsoïdes de révolution aplatis en déplacement perpendiculaire à leur axe polaire, le texte de Srivastava et coll. donne de même, implicitement, pour ce coefficient de correction **k'** la valeur :

$$k' = \frac{\frac{8}{3}e^3}{-e\sqrt{1-e^2}+(1+2e^2)\,\mathrm{Asin}(e)}$$

Clift et coll. proposent bien-sûr un libellé pour ce même coefficient **k'** des ellipsoïdes aplatis (libellé en ArcCosinus), mais mal rédigé. Ils indiquent également que la régression linéaire **k' = 0,4 λ +0,6** est toujours valide (il conviendrait d'en vérifier la précision).

Tirons le C_x linéaire de ces valeurs de **k'** :

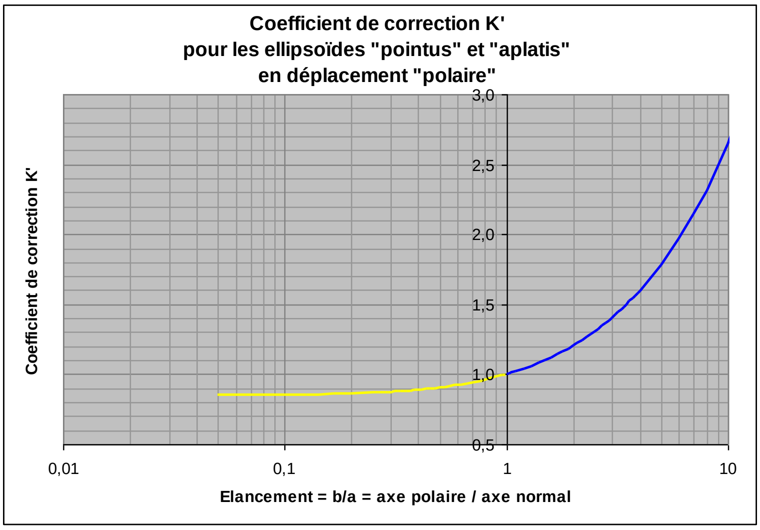
$$C_{x\text{Lin D}} = \frac{8\pi(1-\lambda^2)}{\frac{(3-2\lambda^2)}{\sqrt{1-\lambda^2}}\,\mathrm{ATan}\left[\frac{1}{\lambda}\sqrt{1-\lambda^2}\right]-\lambda}$$ avec toujours **λ = b/a** et **< 1**

…qui est le C_X linéaire de l'ellipsoïde aplati en déplacement transverse selon son élancement λ, en référence à son diamètre **D = 2a**.

Il faut noter que pour les élancements unitaires (λ ou ε **= 1**) toutes ces fonctions ne sont pas définies mais c'est sans importance puisque qu'alors la valeur de **k'** est connue comme étant égale à **1** (ce qui signifie « pas de correction par rapport à la sphère).

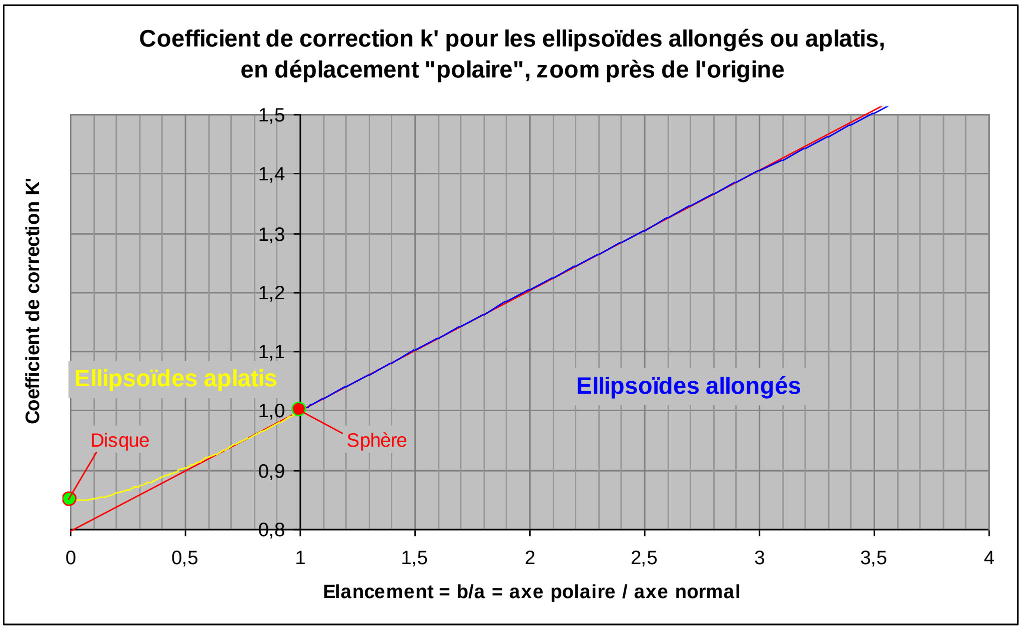
Cette dichotomie entre le libellé de **k'** selon que l'élancement est plus ou moins grand que l'unité est, bien-sûr, une nécessité des mathématiques qui ont conduit à ces résultats. Cependant, pour Mère Nature, il ne peut y avoir de discontinuité entre les libellés, spécialement autour de l'élancement unitaire.

Pour nous en assurer, nous avons calculé l'évolution du coefficient **k'** pour les déplacements polaires en fonction de l'allongement de l'ellipsoïde ou de son aplatissement, deux déformations que nous avons pris en compte sous la dénomination unique et classique d'élancement (à savoir le rapport du diamètre dans le sens du déplacement au diamètre normal au déplacement) :



(ce graphe utilise des abscisses logarithmiques)

Nous avons trouvé une régression linéaire simple pour les ellipsoïdes d'allongements raisonnables et d'aplatissements modérés en déplacement polaires. C'est le segment de droite rouge ci-dessous :



…ligne qui ne décroche des valeurs analytiques qu'au dessus de l'élancement **3** et en dessous de l'élancement **0,66**.

(noter sur le graphe la représentation du coefficient de correction pour le disque et la sphère)

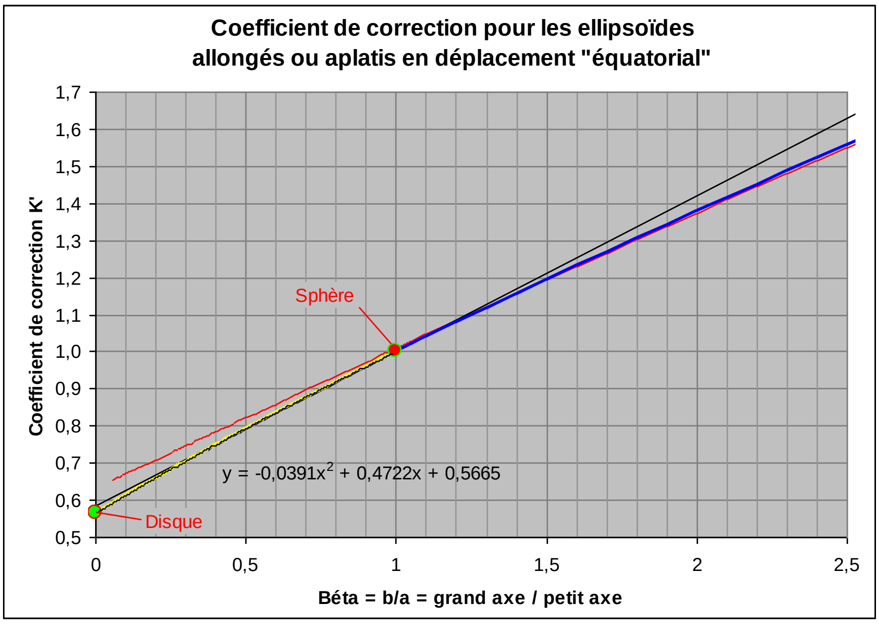
Cette régression linéaire est :
k' = 0,2029 λ + 0,7973
…où **λ** est l'élancement **b/a**.

La droite **k' = 0,2 λ + 0,8** , entre les élancements **1** et **4**, ne se fourvoie que de **0,4 %** au plus. Elle adi la qualité de passer par le point **(1 ;1)** qui représente la sphère.

Entre les élancements **4** et **20**, la droite **k' = 0,161 λ +0,985** ne dépasse pas **2 %** d'erreur. La droite à coefficients plus simples **k' = 0,16 λ +0,99** ne s'égare que de **2,16 %** au plus.

De même, entre les élancements **20** et **60**, la régression :
k' = 0,13 λ + 1,6
…commet une erreur de moins de **1,2 %**.

Pour les coefficients de correction attachés aux déplacements *équatoriaux* des ellipsoïdes allongés ou aplatis, il existe de même une régression parabolique (en rouge ci-dessous) :



La courbe bleue est celle représentant les ellipsoïdes allongés, la jaune celle représentant les ellipsoïdes aplatis (noter la façon non asymptotique dont cette dernière aboutit au coefficient pour le disque).

La régression parabolique rouge représente assez bien l'évolution des ellipsoïdes allongés (mais pas celle des ellipsoïde aplatis).

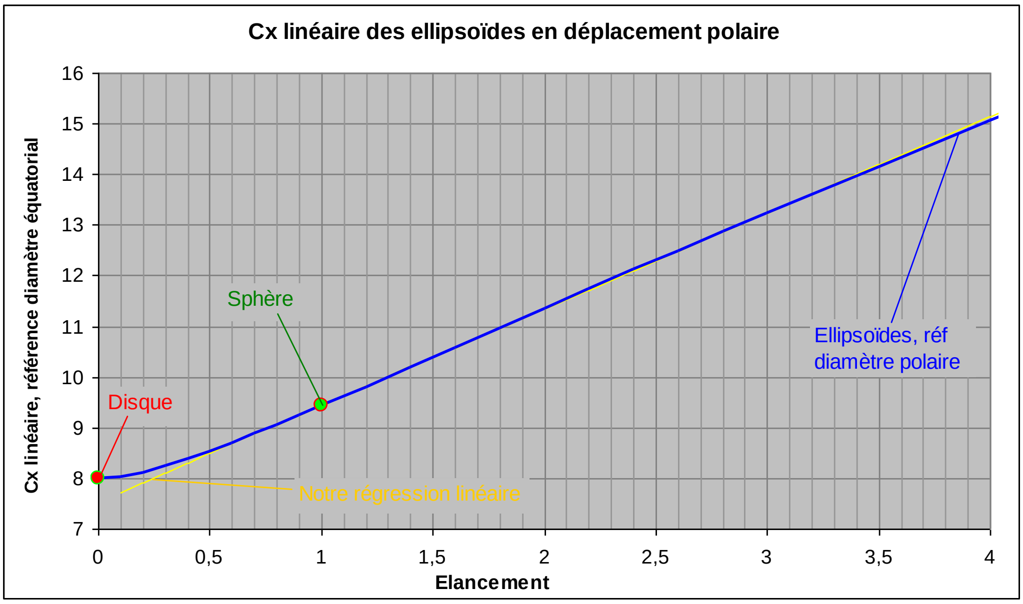
Cette régression (courbe rouge) est :

k' = -0,0067 λ² + 0,3832 λ + 0,6336

Elle a le tort (minime) de ne pas passer exactement par le point **(1 ; 1)**.

Pour les ellipsoïdes aplatis une régression linéaire est possible (droite noire) (qui ne convient pas pour les ellipsoïdes allongés), mais une régression parabolique est beaucoup plus seyante (courbe noire passant par le disque) : son équation est indiquée sur le graphe.

Nous devons néanmoins aller jusqu'au bout de notre promotion des $\mathbf{C_x}$ linéaires et proposer une régression donnant directement ce $\mathbf{C_x}$ linéaire pour les élancements raisonnables ; c'est la droite jaune que l'on remarque à peine, serpentant derrière la courbe bleue représentant le $\mathbf{C_x}$ linéaire des ellipsoïdes de révolution allongés ou aplatis en déplacement polaire (en référence à leur diamètre équatorial ou frontal dans le déplacement) :



Cette régression linéaire s'écrit :

$$C_{x\text{Lin D équatorial}} = 1{,}9\ \lambda + 7{,}54$$

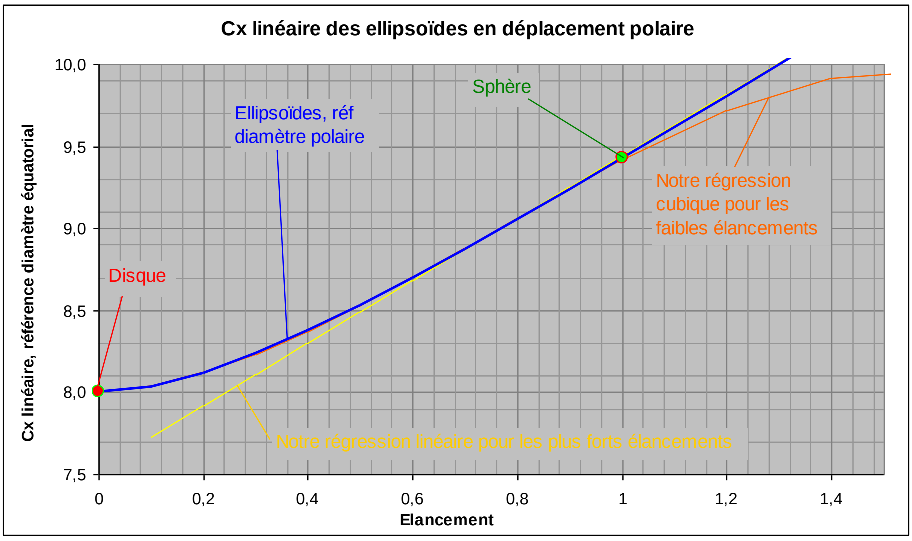
…et elle donne accès au C_x linéaire des ellipsoïdes allongés ou aplatis en déplacement polaire, en référence à leur diamètre équatorial (ou frontal dans le déplacement), valable à **1 %** près pour les élancements λ allant de **0,4** à **4,6** compris.

Pour les faibles et forts élancements, d'autres régressions peuvent être facilement déduites des régressions que nous avons proposées, ci-dessus, pour les coefficients de correction **k'** (il suffit de multiplier le libellé de ces régressions par **3 π**)…

Par exemple, la régression cubique :

$$C_{x\text{Lin D équatorial}} = -0{,}95\ \lambda^3 + 2{,}15\ \lambda^2 + 0{,}22\ \lambda + 8$$

…dessine la courbe orange à peine visible derrière la courbe bleue ci-dessous :



(le lecteur aura remarqué que nous signalons ces régressions dans les zones d'élancements où elles sont les moins efficaces, donc les plus visibles)

C_X linéaire du disque :

Les libellés du coefficient de correction **k'** (correction de la Traînée ou du $\mathbf{C_x}$ par rapport à ceux de la sphère) conduisent, pour les élancements tendant vers **zéro**, au coefficient **k'** pour le disque ; c'est **k' = 0,8488** pour le disque en déplacement frontal (c.-à-d. en déplacement parallèle à l'axe du disque.

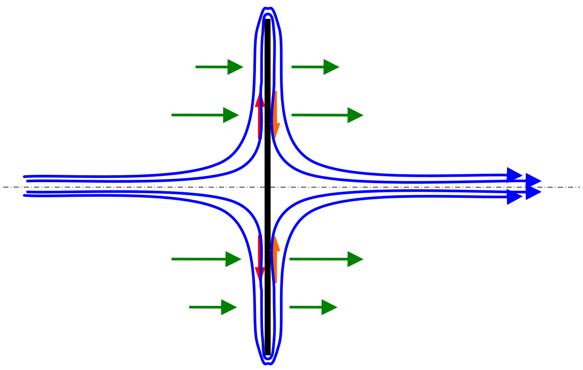
Il s'ensuit que le $\mathbf{C_x}$ linéaire du disque se déplaçant frontalement, en référence à son diamètre **D,** vaut **0,8488*3π**, soit :

$$\boxed{\mathbf{C_{xLin\,D} = 8}}$$

De fait, Comolet, dans MÉCANIQUE EXPÉRIMENTALE DES FLUIDES, donne pour le $\mathbf{C_x}$ quadratique du disque se déplaçant frontalement en régime de Stokes la valeur mesurée expérimentalement : $\mathbf{C_{xQuad} = 64/(\pi R_e)}$, soit $\mathbf{C_{xQuad} = 20{,}37/R_e}$, ce qui conduit au même résultat. On peut remarquer que ce $\mathbf{C_x}$ quadratique de $\mathbf{20{,}37/R_e}$ est un peu plus faible que celui de la sphère (qui vaut $\mathbf{24/R_e}$).

Notre $\mathbf{C_x}$ linéaire du disque (**8**) est évidemment dans la même proportion avec celui de la sphère ($\mathbf{3\pi = 9{,}425}$), en référence bien-sûr à leur diamètre, ce qui est troublant et démontre bien la singularité des écoulements en régime de Stokes.

Un autre enseignement que l'on doit tirer du cas du disque se déplaçant frontalement, est que l'ensemble des frictions que crée le fluide à sa surface n'a aucune possibilité de se traduire en Traînée (la projection des forces élémentaires de friction sur l'axe de symétrie est nulle) (indépendamment du fait que, par raison de symétrie de révolution, ces forces élémentaires de frictions s'annulent deux à deux) :



Au vu de ce schéma approximatif, on prend conscience que, entre autres, les deux forces de friction élémentaire rouges s'annulent deux à deux (outre le fait qu'elles n'ont aucune projection sur l'axe) ; et de même pour les deux forces orange…

Ce qui signifie que <u>le $\mathbf{C_x}$ linéaire de **8** du disque est dû intégralement aux forces de pression</u> (forces vertes dont nous ne connaissons pas d'ailleurs la valeur réelle)… [28]

[28] De même, le $\mathbf{C_x}$ du disque exposé frontalement à un écoulement à grand Reynolds est dû intégralement à l'intégration des pressions sur sa surface…

Les mesures de nombreux chercheurs ont permis de dessiner le C_x quadratique du disque sur toute l'étendue des Reynolds envisageables. On trouve un exemple de cette courbe sur ce graphe que nous présentons plus loin. Cependant, Clift et coll. considèrent comme erronée le petit maximum que montre cette courbe au Reynolds de **300**. Au contraire, ils optent pour une constance du C_x quadratique (à la valeur **1,17**) dès les Reynolds supérieurs à **133** [29].

Quant au disque qui se déplace dans son propre plan, la même méthode qui consiste à diminuer l'élancement de l'ellipsoïde de révolution jusqu'à **zéro** conduit à **k' = 0,5659**. Le C_x linéaire, en référence à son diamètre **D**, de ce même disque se déplaçant dans son plan est donc :

$$\boxed{C_{x\text{Lin } D} = 5{,}333}$$

On rencontre aussi la rédaction **16/3**, plus exacte.

C'est la même valeur que donne aussi Hoerner page 17 de son ouvrage Drag.

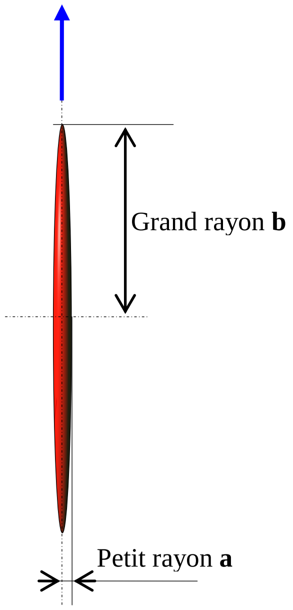
Notons que dans ce cas, les **5,333** du C_x linéaire sont intégralement dus aux efforts de friction sur la surface du disque…

[29] "There is some indication that C_D passes through a minimum of about 1.03 for Re ≈ 400 […], but most data are correlated within 10% by Eq. (6-3) with C_D = 1.17 for Re >133."

Traînée des aiguilles ellipsoïdales :

Le texte de Goodarz Ahmadi donne la Traînée d'aiguilles ellipsoïdales ("ellipsoidal needles") en déplacement parallèle à leur grand axe (image ci-contre).

Nul doute que l'auteur du texte s'est basé sur l'étude de ce qu'advient le coefficient **k'** des ellipsoïdes allongés lorsque l'élancement **b/a** devient très grand (comme il l'a fait en faisant tendre vers **zéro** ce même élancement pour déterminer le comportement du disque).



La Traînée (nous verrons que la valeur en est erronée) que ce texte donne est :

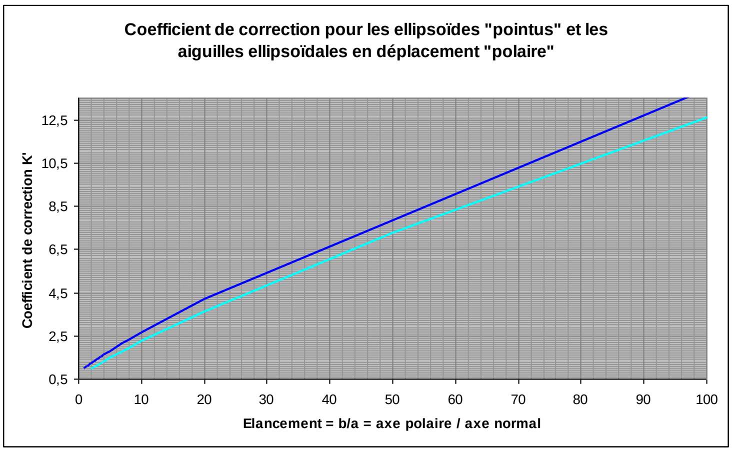
$$F_{//} = \frac{4\pi\mu V b}{Ln(2\frac{b}{a})}$$

Il faut noter que cette Traînée prend en compte le grand rayon **b** de l'aiguille ellipsoïdale. La comparaison de ce libellé avec celui dévolu depuis Stokes à la sphère (sphère de rayon **a**) conduit à un coefficient de correction **k'** valant :

$$k'_{//} = \frac{4\frac{b}{a}}{6\,Ln(2\frac{b}{a})}$$

…qui est donc le coefficient de correction à appliqué à la Traînée de la sphère de même diamètre **2a** pour trouver la Traînée de l'aiguille ellipsoïdale de diamètre **2a**.

Hélas, ce coefficient de correction fait mauvais ménage (et spécialement pour les grands allongements) avec celui déjà aperçu pour les ellipsoïdes :



(en bleu dense est le coefficient **k'** des ellipsoïdes et en bleu clair celui des aiguilles ellipsoïdales)

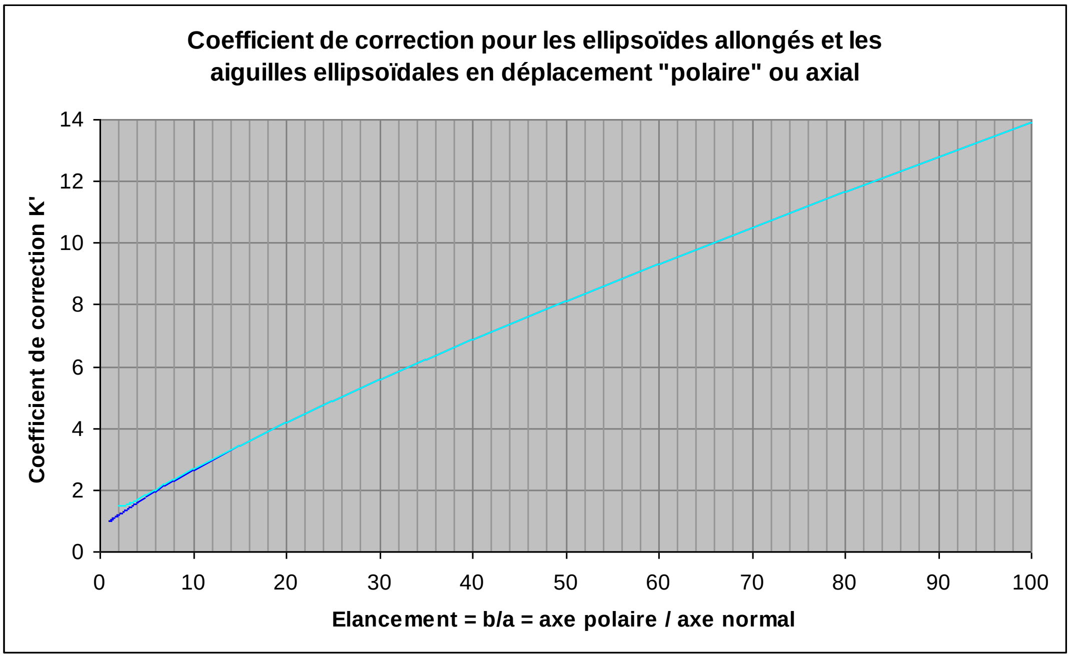
Une étude mathématique du coefficient **k'** donné par Goodarz Ahmadi aux ellipsoïdes allongés en déplacement polaire, à savoir :

$$\mathbf{k'//=\frac{\frac{4}{3}(\lambda^2-1)}{\frac{(2\lambda^2-1)}{\sqrt{\lambda^2-1}}Ln\left[\lambda+\sqrt{\lambda^2-1}\right]-\lambda}}$$ avec $\boldsymbol{\lambda}$ = **b/a**

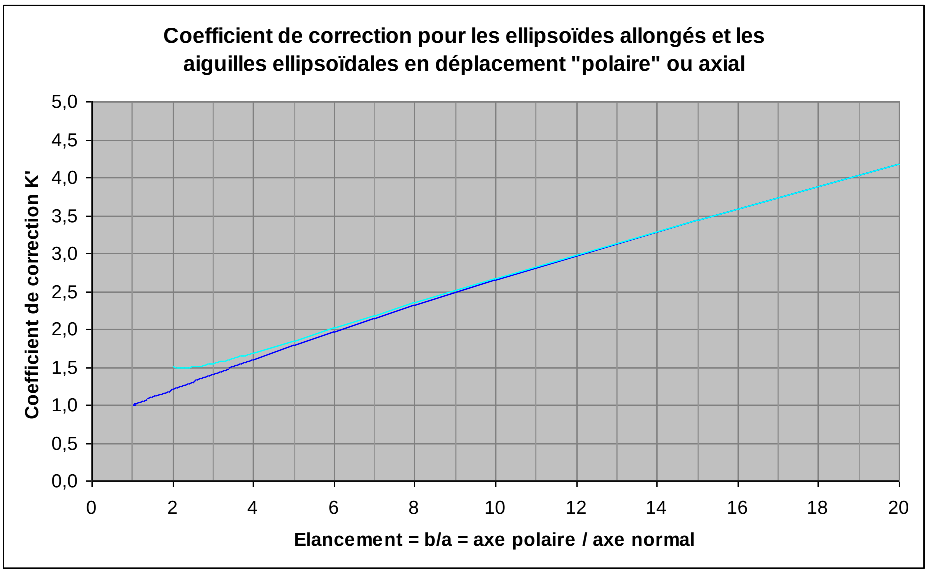
…nous a conduit facilement, pour les $\boldsymbol{\lambda}$ = **b/a** très grands, à la valeur (que nous croyons plus juste) :

$$\mathbf{k'//=\frac{\frac{4}{3}\lambda}{2Ln[2\lambda]-1}}$$

Ce coefficient apparaît par contre en bonne place vis-à-vis de celui de l'ellipsoïde allongé en déplacement polaire :



Un zoom sur les élancements plus faibles :



…montre bien que les deux libellés deviennent indiscernables pour l'élancement **14** (le coefficient **k'** pour les aiguilles est toujours en bleu clair).

En tout état de cause, le $\mathbf{C_x}$ linéaire valant **k'*3π** , il est sans doute plus simple de donner directement ce $\mathbf{C_x}$ linéaire plutôt que de conserver la référence à la sphère. Ce $\mathbf{C_x}$ linéaire vaut donc :

$$\boxed{\mathbf{C_{xLin\ 2a}} = \frac{\mathbf{2\pi\lambda}}{\mathbf{Ln[2\lambda] - 0{,}5}}}$$

…qui est le C_x linéaire des aiguilles en déplacement parallèle à leur grand axe, la longueur de référence étant le petit diamètre **2a** de cette aiguille.

De même Goodarz Ahmadi donne une valeur de la Traînée des aiguilles ellipsoïdales en déplacement transverse (soit perpendiculaire à leur grand axe).

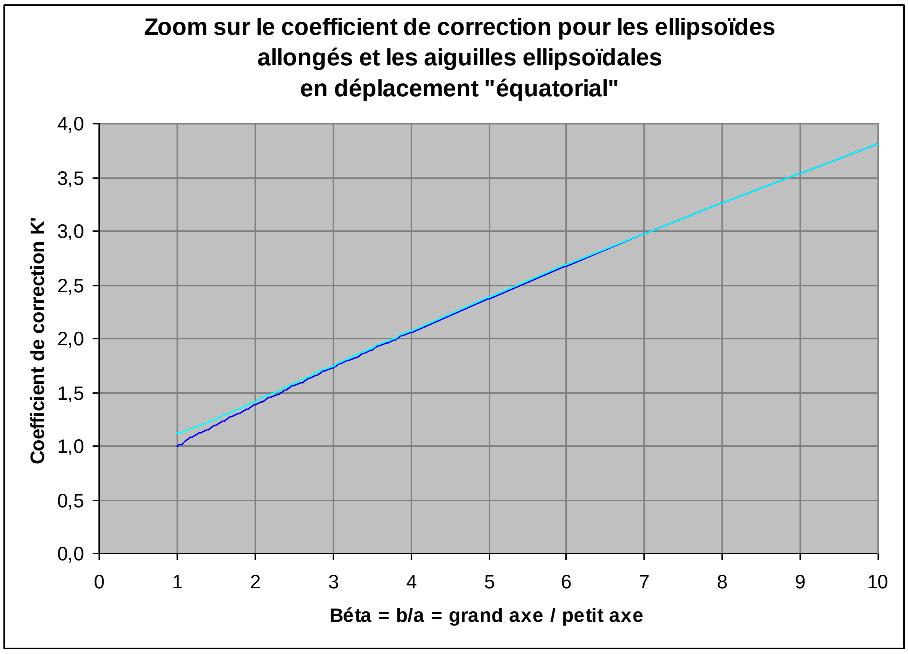
Cette valeur nous apparaît également erronée en comparaison avec la Traînée des ellipsoïdes de grands élancements.

Des calculs simples nous ont conduit, pour ces aiguilles ellipsoïdales en déplacement transverse, à un coefficient de correction de :

$$\mathbf{k'_{\perp}} = \frac{\frac{8}{3}\lambda}{\mathbf{2Ln[2\lambda] + 1}}$$

Coefficient à appliquer à la Traînée de la sphère de rayon **a** (qui est le petit rayon de l'aiguille).

Il s'avère que, lors de tels déplacement transverses (ou équatorial), ce coefficient **k'** (en bleu clair ci-dessous) recoupe de façon très satisfaisante celui exprimant le comportement des ellipsoïdes (en bleu dense) à partir des élancements **3** ou **4** (selon la précision requise) :



On peut tirer de cette expression de **k'** une valeur directe du $\mathbf{C_x}$ linéaire des aiguille en déplacement transverse. C'est :

$$\boxed{\mathbf{C_{xLin\ 2a}} = \frac{\mathbf{4\pi\lambda}}{\mathbf{Ln[2\lambda]+0{,}5}}}$$

…qui est le C_x linéaire des aiguilles en déplacement perpendiculaire à leur grand axe, la longueur de référence étant le petit diamètre **2a** de cette aiguille.

Notons que ce $\mathbf{C_x}$ linéaire s'approche, pour les grands élancements, du double de celui de l'aiguille en déplacement parallèle à son grand axe…

<u>Note sur la distribution de la pression visqueuse sur l'ellipsoïde :</u>

Dans leur texte publié en 1975 dans le Journal of Fluid Mechanics, Chwang et Wu donnent, en plus d'une valeur de la Traînée complète des ellipsoïdes allongés, une valeur de la pression visqueuse à la surface de ces même corps (nous écrivons ici *pression visqueuse* car, on s'en souvient, cette pression est créée par la viscosité du fluide et non par son inertie).

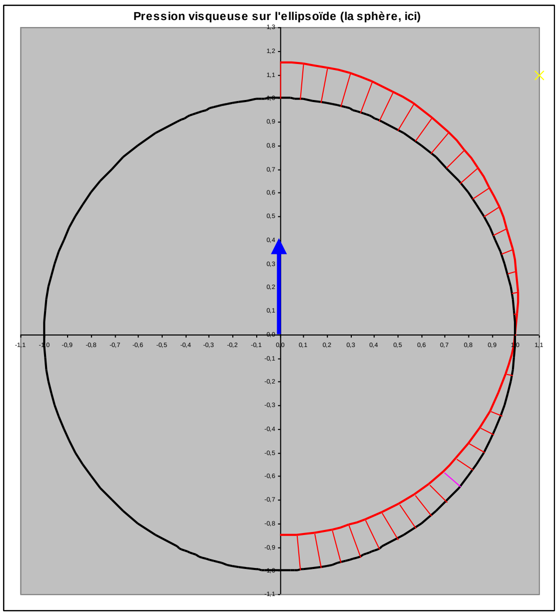
Cette pression vaut, selon l'abscisse **x** à la quelle est mesurée sur le grand axe de l'ellipsoïde allongé :

$$\mathbf{P(x)} = \frac{\mathbf{-4e^3x\ \mu V}}{\left(\mathbf{a^2-e^2x^2}\right)\left[\mathbf{-2e+(1+e^2)Ln\left(\frac{1+e}{1-e}\right)}\right]}$$

Dans cette équation, **a** est le grand rayon de l'ellipsoïde, **e** son excentration, **µ** la viscosité du fluide et **V** sa vitesse parallèle à l'axe de révolution.

Il est souhaitable d'adimensionnaliser ce libellé en le divisant, par exemple, par **µ V/a** : ce faisant on obtient un coefficient de pression $\mathbf{C_p}$. On peut alors songer à représenter la distribution de ces coefficients de pression à la surface de l'ellipsoïde, de façon à observer comment cette distribution varie avec l'élancement **L/D** de ce corps.

Par exemple, pour l'élancement unitaire (qui forme une sphère), la distribution des pressions est celle-ci :



La sphère est dessinée ici en ascension dans le fluide immobile. La pression à sa surface est maximale au point d'arrêt supérieur (**C_p = 1,5**) et minimale au point d'arrêt inférieur (**C_p = -1,5**) : sur l'hémisphère aval, en effet, les coefficients de pression visqueuse sont négatifs : il y a donc une dépression d'origine visqueuse à l'aval de la sphère, ce qui nous rappelle –même si les deux cas ne sont en rien comparables– la dépression existant aux hauts Reynolds sur l'hémisphère aval de la sphère.
La symétrie de l'écoulement de Stokes donne, il faut également le mémoriser, la même valeur absolue à la pression (ou dépression) aux deux points d'arrêt.

Si l'on le désire, on peut transformer ce **C_p** de pression visqueuse en un coefficient de pression plus classique (adimensionnalisé avec la Pression Dynamique) : nommons-le **k_p**. Il suffit, pour faire apparaître ce **k_p**, de recomposer la Pression au point d'arrêt en *désadimensionnalisant* le précédent **C_p** :

$$\mathbf{P(x)} = \frac{\mathbf{C_p \mu V}}{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{4\ C_p \mu \frac{1}{2} \rho V^2}}{\mathbf{2aV\rho}}$$

Dans le dernier quotient, on peut reconnaître la Pression Dynamique et le Reynolds longitudinal **R_{eL} = 2aVρ/μ** (car **2a** est la longueur de l'ellipsoïde).

Il reste donc :

$$\frac{\mathbf{P(x)}}{\frac{1}{2}\rho \mathbf{V}^2} = \mathbf{k_p} = \frac{\mathbf{4C_p}}{\mathbf{R_{eL}}}$$

On a donc entre **C_p** et **k_p** la relation :

$$\mathbf{k_p} = \frac{\mathbf{4C_p}}{\mathbf{R_{eL}}}$$

(notons que **k_p** dépend du Reynolds alors que **C_p** non ; c'est ce qui rend ce dernier coefficient plus pratique)
On peut déduire de ce qui précède qu'aux points d'arrêt de la sphère le coefficient de pression classique **k_p** vaut **6/R_{eL}** , ce qui est évidemment bien supérieur à l'unité pour les Reynolds inférieurs **1** [30].

[30] Aux hauts Reynolds, le **k_p** au point d'arrêt vaut **1**, par définition.

Ceci doit nous être un rappel qu'en régime de Stokes, la Pression au point d'arrêt, bien que due uniquement à des phénomènes visqueux, est beaucoup plus forte que les **½ρV²** des hauts Reynolds.

Dans son ouvrage Drag, Hoerner le signale aussi en précisant que « pour des corps mal profilés, l'effet appelé *effet Barker* donne approximativement un $\mathbf{k_p}$ [c.-à-d. le coefficient de pression adimensionnalisé par la Pression Dynamique] $\approx \mathbf{1+6/R_{eD}}$ [aux points d'arrêt], le Reynolds $\mathbf{R_{eD}}$ étant basé sur le diamètre ou l'épaisseur des corps ».

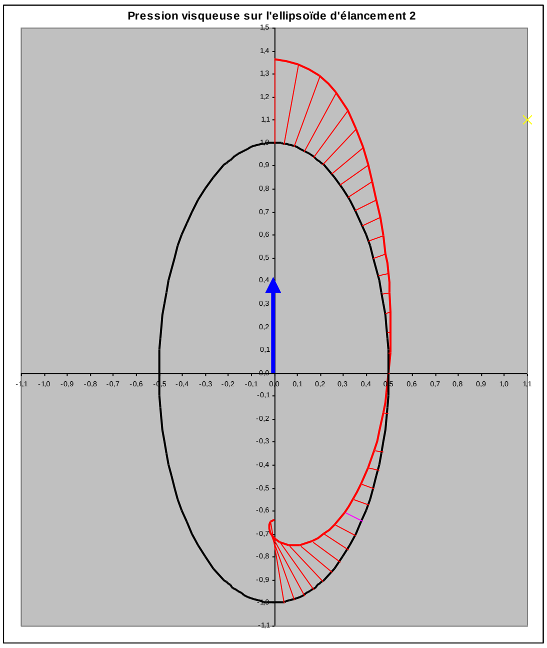
Ce qui fait également $\mathbf{k_p} \approx \mathbf{1+6\lambda/R_{eL}}$

Il constate que cela fait presque $\mathbf{k_p} \approx \mathbf{60}$ au Reynolds **0,1**.

Lorsque l'on trace la courbe du $\mathbf{k_p}$ de l'ellipsoïde selon son élancement, on vérifie effectivement cette règle pour les ellipsoïdes d'élancement **1** à **2**.

Ces valeurs numériques étant posées, il ne faut pas s'y tromper : C'est justement parce que la Pression Dynamique **½ρV²** est extrêmement faible en régime de Stokes (et de fait on l'y néglige par principe) que la prendre comme référence (par quotient)rend le $\mathbf{k_p}$ aux points d'arrêt très fort. On doit donc se persuader qu'en régime de Stokes, la pression aux points d'arrêt est d'origine visqueuse et que la rapporter à la Pression Dynamique **½ρV²** est dénué de signification physique, ne serait-ce que parce que, en régime de Stokes, la Masse Volumique **ρ** n'intervient pas dans les écoulements et donc dans la distribution des pressions…

Lorsque l'élancement de l'ellipsoïde augmente, par exemple lorsqu'il prend, comme ci-dessous, la valeur **2**, la surpression au point d'arrêt amont (ou supérieur, ici) augmente également, la dépression au point d'arrêt aval gardant, par symétrie, la même valeur absolue :

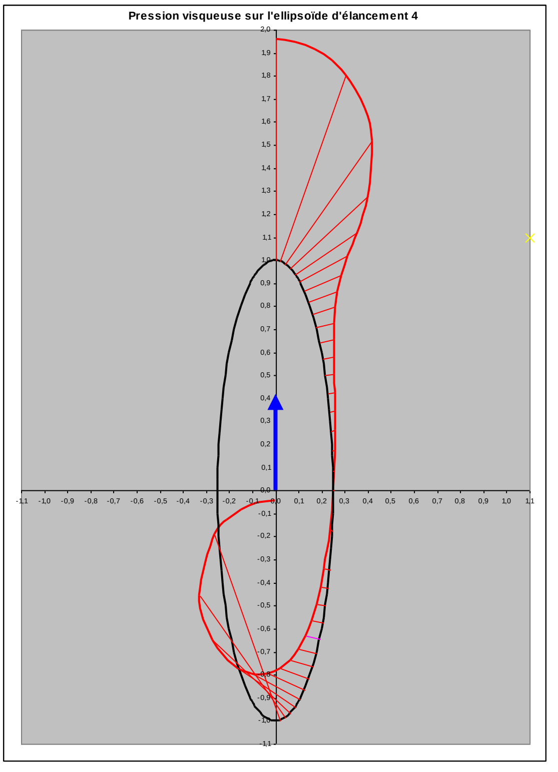


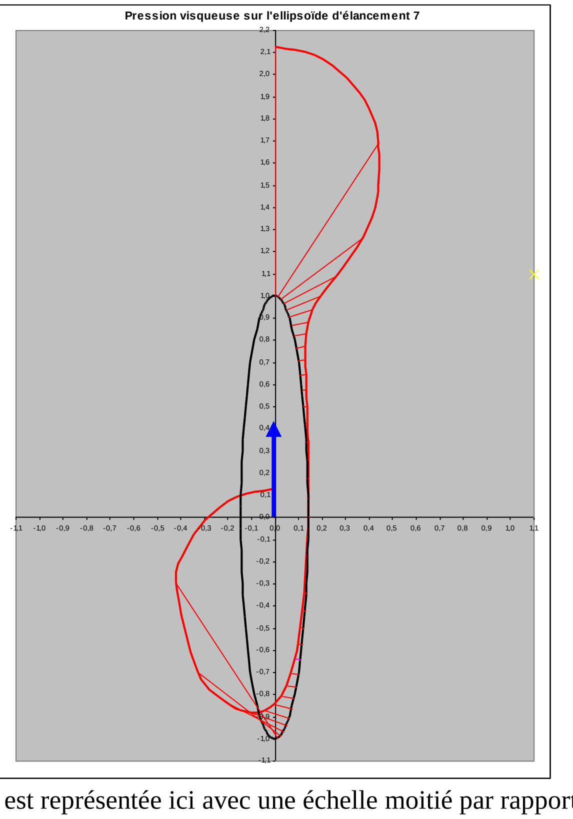
Ici, le type de représentation que nous avons choisi rend la symétrie de la distribution plus difficile à observer. Au contraire, les vecteurs dépressions du bas du schéma amorcent ici un croisement près du point d'arrêt aval.

Les coefficients de pression $\mathbf{C_p}$ aux points d'arrêt amont et aval sont **3,61** et **–3,61**.

Au maître-couple du corps ce coefficient de pression tombe à zéro, comme pour la sphère précédemment et comme tous les corps possédant une symétrie avant-arrière…

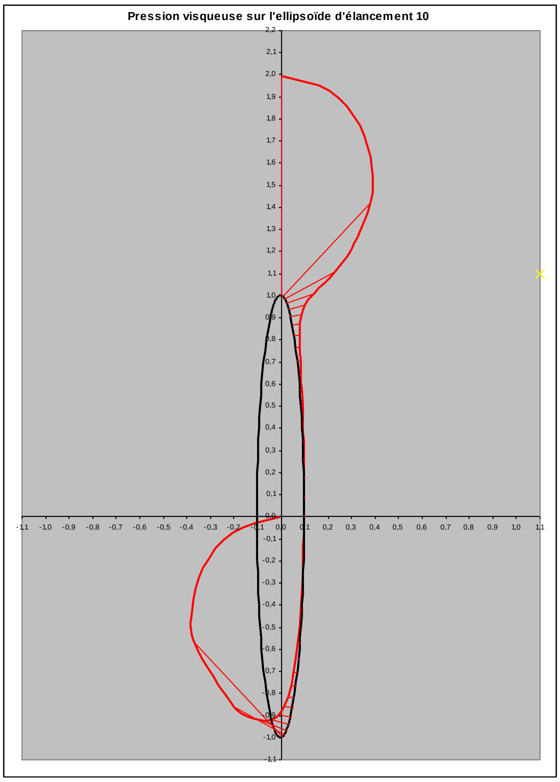
Lorsque l'élancement atteint **4**, la valeur absolue des pressions et dépression aux points d'arrêt se fait encore plus forte (**9,58**) :



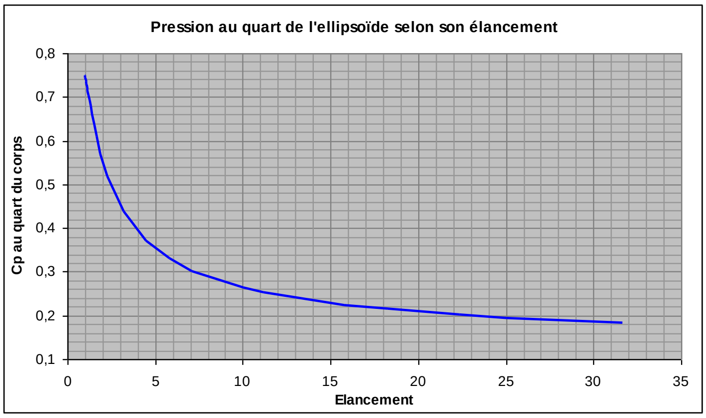


La pression est représentée ici avec une échelle moitié par rapport aux précédentes distributions ; en valeur absolue, elle atteint, pour cet élancement **7**, **22,53**.

Pour des élancements encore plus forts (par exemple pour l'élancement **10**, comme ci-dessous, la surpression au point d'arrêt amont et la dépression au point d'arrêt aval apparaissent de plus en plus comme des isolats, la distribution de pression sur le reste du corps apparaissant comme presque nulle :

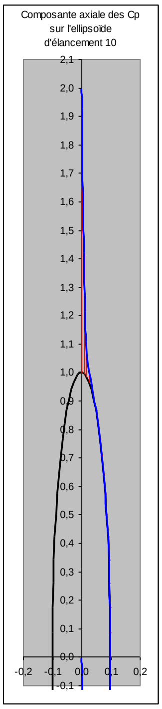


Certes, cette impression pourrait être exagérée dans notre esprit par les choix que nous avons fait de l'échelle des pressions (cette échelle valant ci-dessus encore la moitié de celle de l'image précédente), mais un saisie du $\mathbf{C_p}$ du corps à son abscisse **0,5** (en son premier quart, donc) donne le résultat suivant :



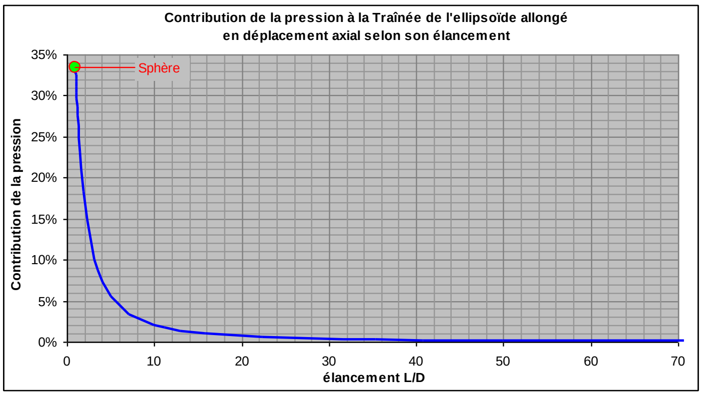
Au demeurant, il est évident que, s'agissant des forts élancements, l'orientation de la surface de l'ellipsoïde en dehors des zones des points d'arrêt (la surface du corps, dans une grande partie médiane, ressemblant beaucoup à celle d'un cylindre) laisse peu de possibilités aux forces de pression locales de projeter une composante significative de Traînée sur l'axe du corps…

La représentation que nous avons donnée de l'isolat de pression aux points d'arrêt peut prêter à confusion du fait de son développement en largeur ; mais la symétrie axiale du corps de révolution fait que les composantes radiales des $\mathbf{C_p}$ s'annulent deux à deux avec les composantes des éléments de surface diamétralement opposés. Ce qui justifie une représentation des seules composantes axiales des $\mathbf{C_p}$:



Les composantes axiales des coefficients de pression sont ici dessinées en bleu. L'on observe que ces composantes axiales sont presque inexistantes sur les neuf dixièmes du corps.

Le fait qu'aux grands élancements la distribution des pressions montre un pic marqué dans les zones de points d'arrêt n'empêche pas que la contribution de la pression à la Traînée totale de l'ellipsoïde en déplacement axial tombe à presque rien pour ces grands élancements. Chang et Wu ont calculé la contribution relative de la pression à la Traînée complète de l'ellipsoïde allongé en déplacement axial. Cette contribution dessine la courbe suivante :



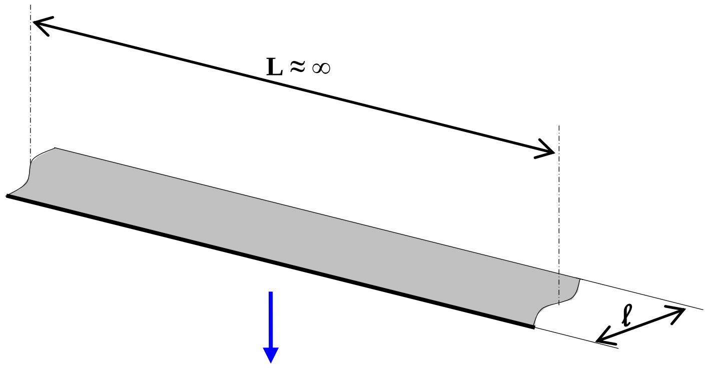
À l'élancement **1** on reconnaît la contribution bien connue de la pression à la Traînée de la sphère (**33 %**). Quand l'élancement croît, la contribution de la pression diminue fortement : la contribution de la pression à la Traînée de l'ellipsoïde d'élancement **10** n'est que de **2 %** ; à l'élancement **16**, elle est inférieure à **1 %**. Pour cet élancement, **99 %** de la Traînée sont donc dus à la friction.

De fait, nous avons pu intégrer *graphiquement* la distribution de pression sur les ellipsoïdes à l'aide de notre tableur et nous retrouvons bien, par exemple pour l'ellipsoïde d'élancement **10**, une contribution très faible (**2 %**) de cette pression à la Traînée complète (cette dernière calculée par l'une des formules classiques de la Traînée de l'ellipsoïde).

Des conclusions plus générales gagneraient à être tirées par des gens plus compétents que nous sur l'existence (et la fonction) de cet isolat de pression aux points d'arrêt des corps (profilés) de forts allongements. Mais ce qu'on peut en mémoriser c'est que ces corps de forts allongements doivent l'essentiel de leur Traînée à la friction tout au long de leur surface…

Des représentations du même type pour la distribution <u>des frictions</u> sur l'ellipsoïde serait à faire, même si Chwang et Wu n'en indiquent pas la valeur au long du corps…

<u>C_X linéaire de la palette de longueur infinie exposée face à l'écoulement :</u>



L'ouvrage MÉCANIQUE DES FLUIDES de Brun et Martinet-Lagarde donne comme mesure expérimentale du $\mathbf{C_x}$ quadratique de cette palette :

$$C_{xQuad} = \frac{8\pi}{R_{e\ell}\left[2{,}2 - Ln(R_{e\ell})\right]}$$

On en tire facilement l'information que le $\mathbf{C_x}$ linéaire vaut :

$$\boxed{C_{xLin\ L} = \frac{4\pi}{2{,}2 - Ln(R_{e\ell})}}$$

…ce $\mathbf{C_x}$ linéaire étant établi <u>en référence à la longueur **L** de la palette</u> (supposée suffisamment grande), la longueur intervenant dans le Reynolds étant la largeur ℓ de la palette, c.-à-d. qu'on pourra tirer la Traînée **F** d'une telle palette de longueur **L** à partir du $\mathbf{C_x}$ linéaire indiqué ci-dessus en effectuant simplement le produit :

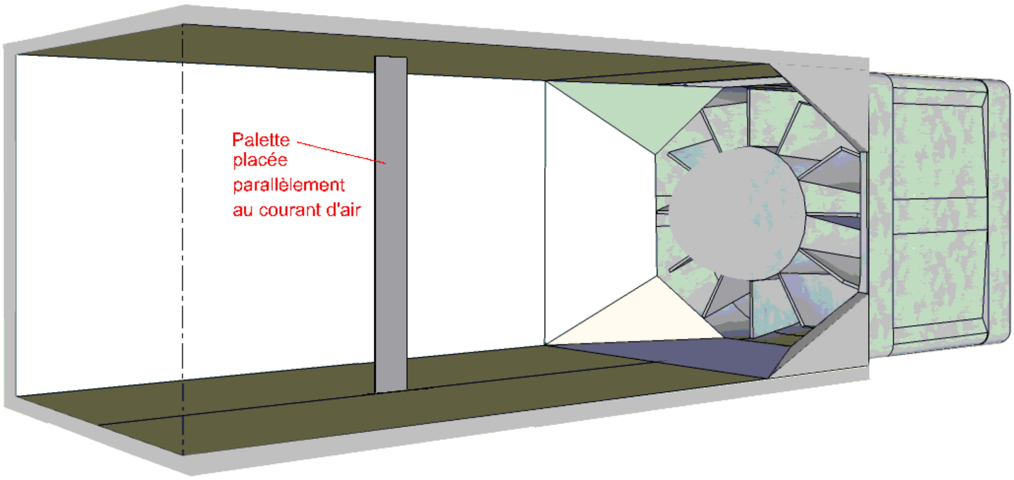
$$F = C_{xLin}\ \mu VL$$

…le $\mathbf{C_x}$ linéaire $\mathbf{C_{xLin}}$ dépendant de la longueur ℓ à travers le $\mathbf{R_{e\ell}}$ …

Il est important de constater que ce <u>$\mathbf{C_x}$ linéaire de la palette infinie dépend du Reynolds de l'écoulement</u>. Ceci peut semble paradoxal puisqu'en régime de Stokes les corps ont un $\mathbf{C_x}$ linéaire constant (cette constance du $\mathbf{C_x}$ linéaire étant la conséquence de l'additivité des solutions aux équations de Stokes). **<u>Gageons que l'explication de ce paradoxe empruntera largement à celle de Kohlman et C. M. White à propos du cylindre infini (explication que nous relaterons plus loin).</u>**

S'agissant toujours de ce libellé du $\mathbf{C_x}$ linéaire, comme des libellés du $\mathbf{C_x}$ quadratique dont il provient, il est important de noter qu'ils ne sont pas définis pour des $\mathbf{R_{e\ell}}$ de **9,025** (exactement : **Exp(2,2)**), et qu'ils deviennent d'ailleurs négatifs pour les $\mathbf{R_{e\ell}}$ plus grands, ce qui n'est pas gênant puisque cette limite est en dehors du régime de Stokes.

Il est sans doute ici utile de revenir sur ce que signifie la notion de *palette de longueur infinie* : ce n'est bien-sûr pas d'une plaque de tôle rectangulaire de longueur infinie que l'on a mesuré la Traînée aérodynamique. On a simplement mesuré la Traînée d'une plaque de tôle de longueur finie placée en travers de l'écoulement (cette longueur correspondant à la largeur de la veine, comme sur le schéma de principe ci-dessous :



Ce montage est parfois qualifié de « entre parois » et il est synonyme d'une volonté d'effectuer les mesures en **2D** (même si cela est beaucoup plus difficile qu'il y paraît). L'effet des parois, à chaque extrémité de la palette est en effet de priver l'écoulement des possibilités de contournement de la palette par ses extrémités ou plutôt par l'extérieur de ses extrémités comme il se produit à l'extérieur des ailes d'avions…

De même on teste les ailes d'avion grâce à un montage identique en plaçant leurs profils *entre parois* (c.-à-d. entre les parois latérales de la soufflerie, comme ci-dessous) :

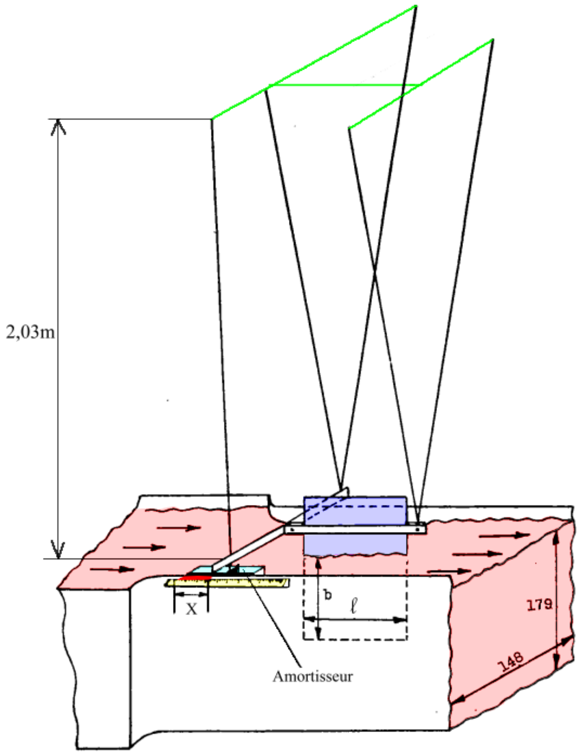
N.A.C.A. Technical Note No. 695

Figure 1.- 5-foot airfoil mounted in wind tunnel.

Le résultat de ce montage n'est d'ailleurs par parfait car il se développe sur chaque paroi d'une soufflerie une Couche Limite dont il faut décompter les effets (à moins qu'on ne mesure la Traînée que sur la partie centrale du corps)…

Néanmoins, c'est de cette façon que l'on peut s'approcher des écoulements **2D**.

Pour les très petits Reynolds, plage où aucune mesure n'avait été faite, Zbynek JANOUR a réussi en 1935 sous le contrôle de Ludwig Prandtl des mesures en veine d'huile. Ces mesures sont relatées dans le Technical Memorendum NACA TM 1316. Elles ont été opérées à l'aide d'un dispositif pendulaire porteur d'une plaque plane verticale dont on mesurait le recul sous l'action de la friction de l'huile :



(schéma coloré et francisé d'après le mémorandum NACA)

La partie non immergée de la plaque est colorée ci-dessus en violet clair. En vert au haut du schéma est représenté la partie fixe du système de suspension.

La lecture du recul **X** se faisait sur la règle jaune à l'aide du vernier rouge.

Une palette se déplaçant dans un petit bassin rempli d'huile (en bleu clair) amortissait les oscillations aux plus fortes vitesses d'écoulement.

C_X linéaire de la palette de longueur finie exposée face à l'écoulement :

Ici se pose en effet cette question : quel sera le $\mathbf{C_x}$ linéaire de palettes moyennement longues ou même peu longues ? Par exemple, quel sera le $\mathbf{C_x}$ linéaire d'une plaque carrée se déplaçant frontalement ?

Nous savons par notre expérience des hauts Reynolds que le $\mathbf{C_x}$ quadratique d'une palette non infinie dépend fortement de son élancement **L /ℓ**. Il en va de même du $\mathbf{C_x}$ quadratique du cylindre non infini qui dépend fortement de son élancement **L /D** [31].

Pour les bas Reynolds dont traite le présent texte, le seul renseignement dont on a longtemps disposé est le $\mathbf{C_x}$ linéaire du disque se déplaçant frontalement ; c'est, ainsi que nous l'avons vu :

$$\mathbf{C_{x\text{Lin D}} = 8}$$

En toute logique, le $\mathbf{C_x}$ linéaire d'une plaque carrée devrait être du même ordre que celui de ce disque circulaire, sans doute un peu plus fort [32].

[31] Cette très grande dépendance du $\mathbf{C_x}$ de la palette et du cylindre vis-à-vis de leur allongement ou élancement trouve sa raison dans une très forte *ventilation* de leur aval par leurs extrémités ; cette raison n'est malheureusement pas applicable ici à nos particules en écoulement de Stokes…

Dans leur texte, Subrata Mukherjee, Srinivas Telukunta et Yu Xie Mukherjee proposent une méthode de calcul informatique de la Traînée de la plaque carrée en régime de Stokes et en mouvement perpendiculaire à son plan, Traînée qui, à la connaissance de ces chercheurs, n'est connue par aucune solution analytique.

Au passage, ils vérifient que leur méthode fonctionne correctement pour le disque circulaire (elle ne crée qu'une erreur de moins d'**1 %** par rapport à la solution analytique pour ce corps).

S'agissant de la plaque carrée, ils dégagent une Traînée *réduite* de **9,136**, cette Traînée étant la force de Traînée pour une viscosité dynamique unitaire, pour une surface de la plaque unitaire et pour une vitesse également unitaire.

Pour obtenir notre **C_x** linéaire, en nous remémorant sa définition :

$$\mathbf{C}_{\mathbf{x}\mathrm{Lin}\ \mathbf{L_{réf}}} = \frac{\mathbf{F}}{\boldsymbol{\mu} \mathbf{V} \mathbf{L}_{\mathbf{réf}}}$$

…il nous suffit donc de diviser la Traînée réduite **9,136** par **µ V** (donnés comme unitaires) et le côté **a** (également unitaire puisque la surface du carré est unitaire) si nous l'adoptons comme longueur de référence $\mathbf{L_{réf}}$.

Le nombre qui caractérise la Traînée réduite en demeure inchangé [33], ce qui nous permet d'écrire, sur la foi des travaux de Mukherjee et coll. :

$$\boxed{\mathbf{C}_{\mathbf{x}\mathrm{Lin}\ \mathbf{a}} = \mathbf{9{,}136}}$$

…qui est une estimation fort intéressante du **C_x** linéaire de la plaque carrée en mouvement perpendiculaire, en référence à son côté **a**…

Les travaux de Sunada, Tokutake et Okada que nous exploiterons plus bas indiquent, quant à eux, pour cette plaque carrée d'épaisseur nulle en déplacement frontal un **C_x** linéaire (en référence côté) de **9,15**. Cette valeur a été relevée par nous sur le graphe des auteurs japonais mais elle est tout à fait en accord avec celle de Mukherjee et coll..

Note sur une estimation du C_x linéaire de la plaque carrée :

Est-il possible d'estimer le **C_x** linéaire de la plaque carrée d'après notre connaissance de celui de la sphère et du disque ?

Les Mécaniciens des Fluides des bas Reynolds font parfois usage pour la détermination de la Traînée de corps de formes complexes du *Rayon Équivalent de Stokes*. Celui-ci, que l'on trouve également nommé ***Rayon Stokésien*** et que nous symboliserons par $\mathbf{R_{St}}$, est défini comme valant :

$$\mathbf{R}_{\mathrm{St}} = \sqrt{\frac{\mathbf{S}}{\boldsymbol{\pi}}}$$, **S** étant la surface frontale du corps considéré.

$\mathbf{R}_{\mathrm{St}}$ est donc le rayon d'un cercle (ou d'une sphère) offrant la même surface frontale **A** que le corps considéré.

[32] À longueur caractéristique égale, il présente un peu plus de surface…

[33] La même méthode, appliquée aux Traînées du disque circulaire calculées selon la même méthode par les mêmes auteurs donne bien les **C_x** linéaires de **8** et **5,33** (déplacement frontal et déplacement dans le plan du disque).

Dans notre cas où le corps considéré est une plaque carrée de côté **a**, le rayon de Stokes devient :

$$\mathbf{R_{St}} = \sqrt{\frac{\mathbf{a^2}}{\pi}}$$

Et de fait la surface frontale d'un corps présentant ce rayon de Stokes est bien $\pi \mathbf{R_{St}}^2 = \mathbf{a}^2$**,** qui est bien la surface du carré.

Si l'on calcule, la Longueur Équivalente de Traînée de la sphère de rayon $\mathbf{R_{St}}$, on dégage :

$$\mathbf{F' = 3\,\pi*\left[2*\sqrt{\frac{a^2}{\pi}}\ \right]}$$

Et son $\mathbf{C_x}$ linéaire, en référence au côté **a** est donc :

$$\mathbf{C_x{}'_{Lin\,a} = 6\,\pi\sqrt{\frac{a^2}{\pi}}\ /a = 6\sqrt{\pi} = 10{,}635}$$

… valeur qui serait une première estimation (sur le modèle de la sphère) du $\mathbf{C_x}$ linéaire de la plaque carrée en déplacement frontal en régime de Stokes, en référence à son côté **a**.

Mais ce n'est évidemment pas la sphère de rayon $\mathbf{R_{St}}$ qui représente le mieux l'écoulement sur la plaque carrée ; l'écoulement sur le disque est évidemment beaucoup plus proche de celui sur la plaque carrée.

Le $\mathbf{C_x}$ linéaire du disque, en référence à son diamètre, étant **8** (comme nous l'avons déjà vu), on peut calculer la Longueur Équivalente de Traînée du disque de diamètre $\mathbf{2\,R_{St}}$, c'est :

$$\mathbf{F'' = 8*2\,R_{St} = 16\sqrt{\frac{a^2}{\pi}}}$$

En référence au côté **a**, le $\mathbf{C_x}$ linéaire de la plaque carrée serait donc :

$$\mathbf{C_x{}''_{Lin\,a} = \frac{16}{\sqrt{\pi}} = 9{,}027}$$

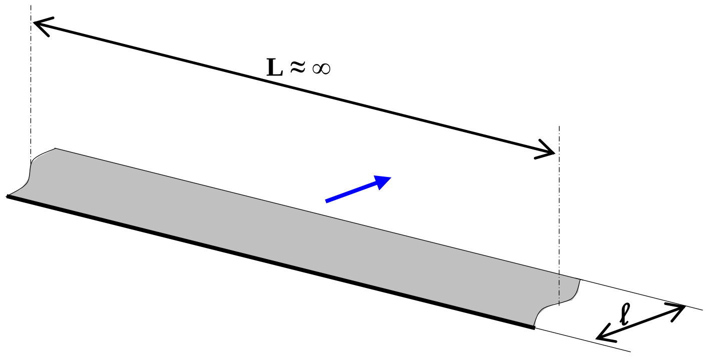
Il est satisfaisant de constater que ce dernier $\mathbf{C_x}$ linéaire est assez proche de celui déterminé par le calcul de Mukherjee et coll. ainsi que par Sunada et coll. ($\mathbf{C_{xLin\,a}}$ = **9,136** et **9,15**).

Mais il faut également mémoriser que l'approximation du $\mathbf{C_x}$ linéaire effectuée à l'aide du Rayon Équivalent de Stokes (et à partir du $\mathbf{C_x}$ linéaire du disque) est plus faible que ce qui constitue sans doute la vraie valeur…

En ce qui concerne les plaques rectangulaires de dimensions finies, Sunada et coll. en ont calculé le $\mathbf{C_x}$ linéaire (pour des rapport $\mathbf{L}/\ell$ allant jusqu'à **6**).

Comme prévisible, ces $\mathbf{C_x}$ linéaires sont indépendant du Reynolds de l'écoulement. Nous exploitons plus bas ces travaux de Sunada et coll.

Palette de longueur infinie se déplaçant dans son plan :



L'INSA de Lyon **Introduction to Fluid Mechanics** Par James A. Fay (voir dans nos marque-page en Aéro) donne, citant l'ouvrage de James A. Fay, pour une telle plaque infiniment longue et de largeur ℓ un $\mathbf{C_x}$ quadratique de :

$$\mathbf{C_{xQuad}} = \frac{4\pi}{R_{e\ell}\,\mathrm{Ln}(24{,}4/R_{e\ell})}$$ valeur valable pour $\mathbf{R_{e\ell}} \mathbf{<<1}$

…ce Reynolds $\mathbf{R_{e\ell}}$ étant basé sur la largeur ℓ de la palette mesurée dans le sens de son déplacement.

Ceci étant posé, il faut faire attention au fait que ce $\mathbf{C_X}$ quadratique est référencé à la surface totale **2** ℓ***L** de la palette (voir l'ouvrage de James A. Fay).

En référence à la surface alaire de la palette, soit ℓ***L**, (surface qui a été prise en référence dans l'étude de la Traînée frontale de la palette), ce $\mathbf{C_x}$ quadratique serait double.

Il est aisé (toujours par multiplication par la Pression Dynamique et par la surface de référence de la plaque) de tirer de ce $\mathbf{C_x}$ quadratique la Traînée en Newton de cette plaque. C'est :

$$\mathbf{F_{//}} = \frac{4\pi\mu VL}{3{,}1946 - \mathrm{Ln}(R_{e\ell})}$$

On peut en tirer le $\mathbf{C_x}$ linéaire, en respect de nos convention (à savoir par simple quotient par **µV** ainsi que par la longueur caractéristique, ici : **L**)

$$\boxed{\mathbf{C_{xLin\ L}} = \frac{4\pi}{3{,}1946 - \mathrm{Ln}(R_{e\ell})}}$$

…qui est le $\mathbf{C_x}$ linéaire, établi en référence à la longueur **L** de la palette de longueur **L** infinie et de largeur ℓ se déplaçant dans son propre plan, valable pour $\mathbf{R_{e\ell}}$ **<<1**, la largeur ℓ (mesurée dans le sens du déplacement) servant à la construction du Reynolds présent dans le dénominateur.

Il est important de bien mémoriser ici que ce $\mathbf{C_x}$ linéaire est référencé à la largeur **L** mesurée transversalement au déplacement (la largeur ℓ n'intervenant qu'à travers le Reynolds $\mathbf{R_{e\ell}}$).

Il est important aussi de réaliser que, s'agissant de ce corps en déplacement dans son propre plan, ce $\mathbf{C_x}$ linéaire est issu d'un coefficient de friction (d'ailleurs référencé au Reynolds bâti sur la longueur de friction ℓ).

Comparons ce $\mathbf{C_x}$ linéaire avec le $\mathbf{C_x}$ linéaire de la palette exposée face à l'écoulement :

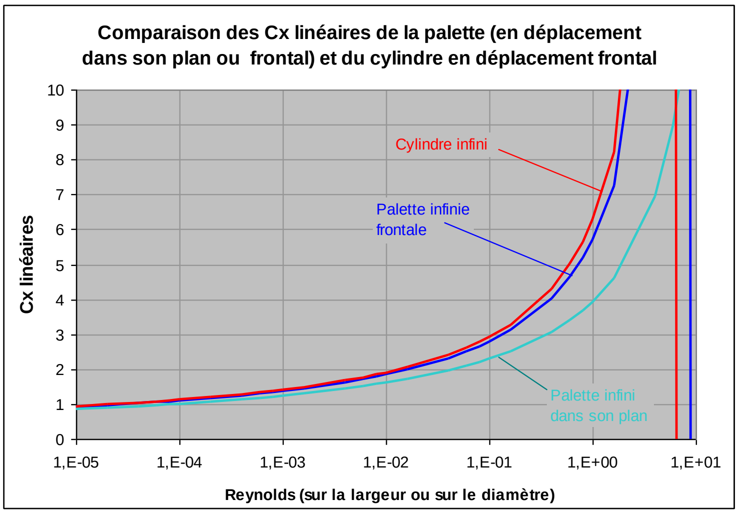
$$\mathbf{C_x}_{\text{Lin L}} = \frac{\mathbf{4\pi}}{\mathbf{2{,}2 - Ln(R_{e\ell})}}$$

…ou avec celui du cylindre que nous étudierons à l'instant :

$$\mathbf{C_x}_{\text{Lin L}} = \frac{\mathbf{4\pi}}{\mathbf{2{,}002 - Ln(Re_D)}}$$

…ces deux $\mathbf{C_x}$ linéaires étant référencés à la longueur **L** de la palette ou du cylindre, mesurée transversalement à l'écoulement et supposée très grande, la Reynolds étant bâti sur la largeur ℓ de la palette ou le diamètre **D** du cylindre).

Cette comparaison montre que tous ces $\mathbf{C_x}$ linéaires sont du même ordre :



En effet, pour les petits Reynolds, le logarithme népérien prend vite le pas sur le coefficient qui le précède dans le dénominateur…

Le cours de l'INSA Lyon l'explique ainsi, citant l'ouvrage de James A. Fay, INTRODUCTION TO FLUID MECHANICS : « Ceci reflète le fait qu'en régime de Stokes, la Traînée n'est pas très influencée par la forme du corps. »

À l'extrême droite de ce dernier graphe, les quasi verticales font état de l'indétermination des équations pour des valeurs du Reynolds extérieures à la Plage de Stokes ; ce comportement particulier est sans intérêt dans la présente étude…

Mais revenons-en à la valeur du C_x quadratique de la palette se déplaçant dans son propre plan :

$$C_{xQuad} = \frac{4\pi}{R_{e\ell}\,Ln(24{,}4/R_{e\ell})} \quad \text{valeur valable pour } R_{e\ell} \ll 1$$

...C_X quadratique calculé en référence à la surface totale **2 ℓ*L** de la palette.

Nous venons de faire remarquer que ce C_x quadratique est un C_x de friction (puisque la palette n'est pas censée présentée de surface frontale).

Le calcul du **C**oefficient de Friction agissant sur les surfaces de la palette est automatique puisque ce C_x est déjà donné en référence à la surface totale de la palette (**2 ℓ***L) : ce C_x quadratique est aussi le coefficient de friction C_f qui agit sur chacune de ces deux faces vaut donc :

$$C_f = \frac{4\pi}{R_{e\ell}\,Ln(24{,}4/R_{e\ell})} \quad \text{valeur valable pour } R_{e\ell} \ll 1$$

Il vient alors à l'esprit de chacun de comparer cette valeur du C_f avec la valeur du C_f laminaire bien connue de Blasius :

$$C_f = \frac{1{,}3282}{\sqrt{R_{e\ell}}}$$

…ce C_f de Blasius étant de même celui qui agit sur chacune des faces de la plaque.

Bien-sûr, le calcul de Blasius et les expérimentations qui confirment ce calcul ne valent que nettement au-dessus du régime de Stokes. Ainsi Hoerner, p. 21 de son ouvrage Drag, la limite-t-il, vers le bas, au Reynolds **1000**. James A. Fay la donne cependant comme encore valide au Reynolds de **10**.

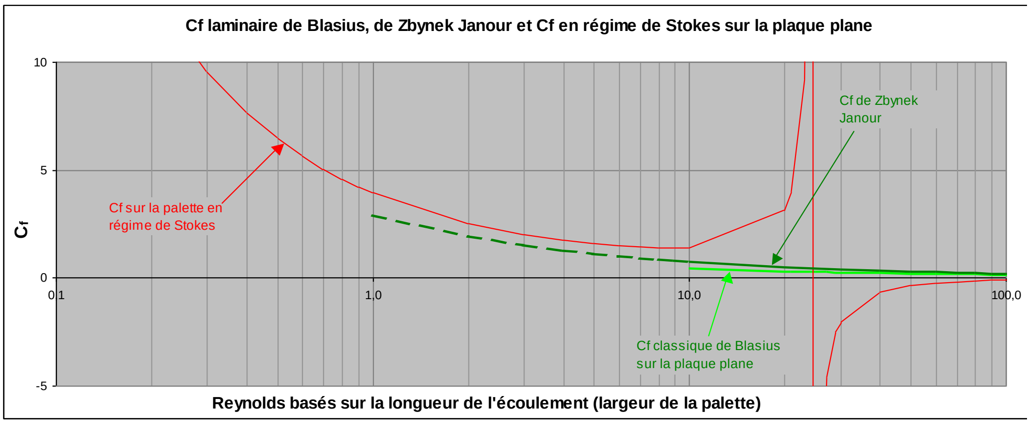
Zbynek JANOUR a prouvé en 1935 par des mesures en veine d'huile, sous le contrôle de Ludwig Prandtl lui-même, que la limite inférieure de validité de l'équation de Blasius se situe vers le Reynolds $\mathbf{2\ 10^4}$. Ces mesures sont relatées dans le Technical Memorendum NACA TM 1316.

Lui-même a effectué des mesures du coefficient de friction de la plaque plane (en déplacement dans son plan) entre les Reynolds **10** et **1000** (voir le schéma de son dispositif ici) : Dans cette plage, il trouve un coefficient de friction :

$$C_f = \frac{2{,}90}{R_{e\lambda}^{\,0{,}601}}$$

…ce coefficient de friction étant basé sur la surface mouillée de la plaque plane (donc sur l'aire de ses deux faces).

Notre tableur n'a pas de mal à illustrer ces mesures dans la plage de Reynolds qui nous intéresse :



Sur ce graphe, nous avons prolongé de façon illicite le $\mathbf{C_f}$ de Janour en dessous du Reynolds **10** (en vert dense tireté).

Il apparaît que le $\mathbf{C_f}$ mesuré par Janour est environ deux fois plus fort que la prolongation également *illicite* de celui de Blasius (ce dernier $\mathbf{C_f}$ n'étant plus valide en dessous du Reynolds $\mathbf{2\ 10^4}$).

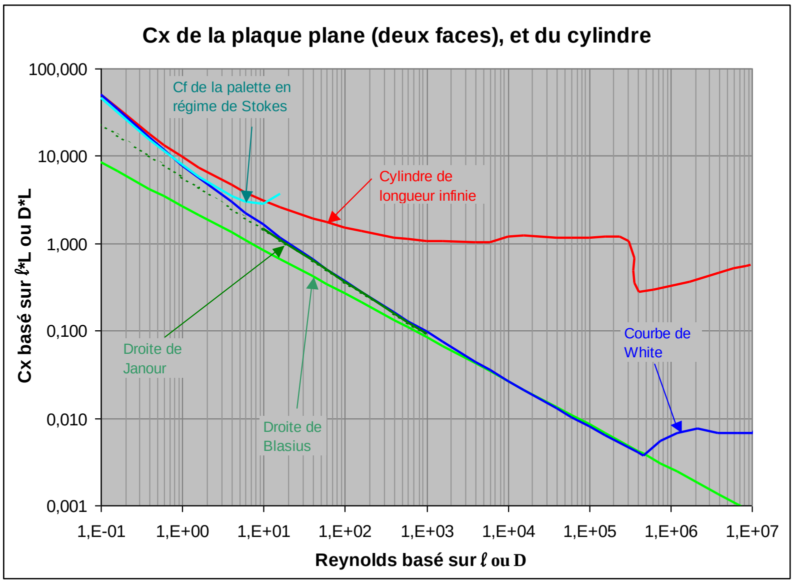
On note qu'au haut de la plage de Stokes, le $\mathbf{C_f}$ sur la palette (en rouge) et le $\mathbf{C_f}$ de Janour (prolongé en vert dense tireté) sont de même ordre (ils se rapprochent à **24 %** d'erreur relative au Reynolds **2**).

La valeur du $\mathbf{C_x}$ quadratique de la palette en régime de Stokes (courbe rouge) est d'ailleurs elle-même disqualifiée en dehors du régime de Stokes par un problème d'écriture (elle n'est pas définie pour $\mathbf{R_{eL} = 24}$, ce qui donne la singularité visible autour de ce Reynolds)

Cependant, la connaissance de ce $\mathbf{C_f}$ de la palette en régime de Stokes est passionnante dans la mesure où ce $\mathbf{C_f}$ n'est autre que celui de la plaque plane !

Le libellé du $\mathbf{C_f}$ de la palette en régime de Stokes vient donc prolonger les courbes de Blasius puis de Janour dans une plage de faibles Reynolds où cette dernière n'est plus valide.

C'est cette prolongation qu'a effectué Franck M. White dans un graphe de son ouvrage qui donne le $\mathbf{C_x}$ quadratique de différents corps dont celui du cylindre infini, de la palette (pour ses deux faces) et de la plaque plane également infinie pour ses deux faces également) :



White opère ici la jonction, par sa courbe bleue dense, entre la droite de Janour (en gros vert) et le C_x quadratique de la palette (en bleu clair et qui divague au-dessus du Reynolds **1**).

Cette *jonction* vaut d'ailleurs qu'on s'y attarde : elle est bien le triomphe de la notion de Reynolds puisqu'elle en pousse la validité jusqu'aux confins de l'infiniment petit [34].

Ce n'est pas, bien-sûr, dans des souffleries ou des tunnels à eau qu'ont été déterminées les Traînées dont nous tirons nos C_x ou C_f en régime de Stokes : ces souffleries ou tunnels à eau ont pu prouver la validité des calculs de Blasius jusqu'au Reynolds minimal de **1000**. Ce Reynolds de **1000** correspond, il faut en prendre conscience :

→ à un courant d'air, par exemple, de **1 m/s** s'écoulant sur une plaque plane de **1,4 cm** de *largeur*,

→ ou encore une courant d'eau de **0,1 m/s** sur une plaque de **1 cm** de *largeur* (*largeurs* mesurées dans la direction de l'écoulement)…

Nous pensons que de telles vitesses d'écoulement et de telles dimensions sont au minimum de ce que la technologie est capable de réaliser de nos jours…

Une autre comparaison s'impose, à propos du C_x quadratique de la palette se déplaçant dans son plan : celle avec le C_x quadratique du disque se déplaçant également dans son plan.

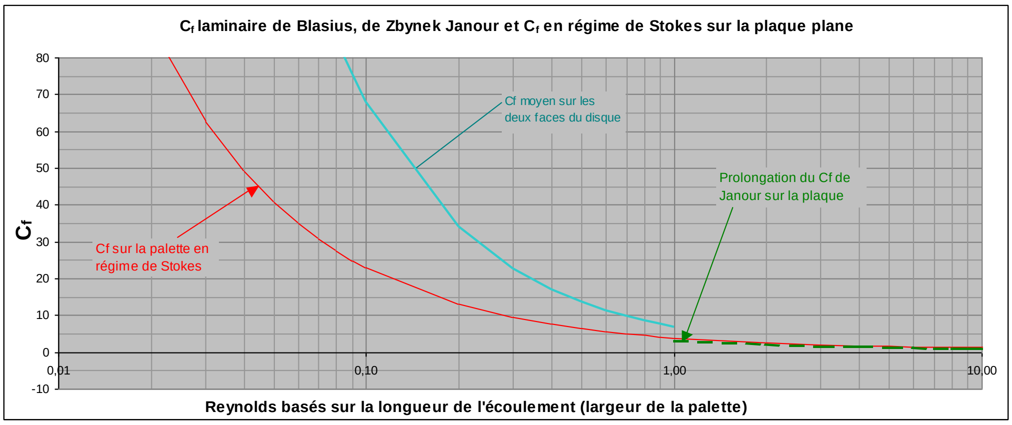
Si le C_x quadratique du disque se déplaçant dans son plan est bien **5,333/8** fois celui du disque se déplaçant frontalement (soit **0,666** fois), ainsi que nous l'avons trouvé lors de notre étude du disque, puisque le C_x quadratique du même disque en déplacement frontal est $\mathbf{C_{xQuad} = 64/(\pi R_e)}$, le C_x quadratique du Disque se déplaçant dans son plan est :

$$\frac{0{,}666*64}{\pi R_{e\ell}} = \frac{13{,}58}{R_{e\ell}}$$

---

[34] En fait le régime de Stokes (qui s'avère donc un domaine où le Reynolds est valide) s'étend, vers les bas Reynolds, jusqu'aux dimensions où le mouvement brownien prend une telle importance qu'il interdit la décantation des très petites particules.

Cette valeur, divisée par **2** pour tenir compte de la présence des deux faces du disque, donne le $\mathbf{C_f}$ moyen bleu clair sur le graphe ci-dessous :



Ce $\mathbf{C_f}$ du disque en régime de Stokes passe de **5,5 fois** à **3 fois** celui de la palette de longueur infinie entre les Reynolds **0,001** et **0,1**.

Le $\mathbf{C_f}$ du disque apparaît donc comme du même ordre que le $\mathbf{C_f}$ de la palette de longueur infinie en régime de Stokes mais quand-même plus fort…

Mesure du C_x des plaques de faibles élancement par Jones et Knudsen :

Le texte de ces deux auteurs date de Mai 1960 et succède à la thèse de Jones (1958) où il n'avait pas été tenu compte de l'influence sur les Traînées des parois (pourtant très proches) de la cuve renfermant les fluides…

Voici le dispositif expérimental déplaçant des corps (sphères, cylindres et plaques planes) dans des huiles à la température soigneusement régulée :

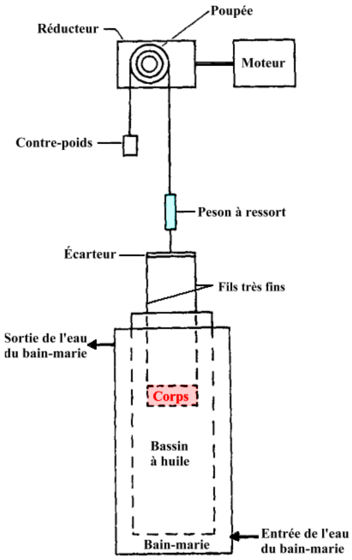


Fig. 1 : Schéma du dispositif de Jones et Knudsen

Les mesures d'efforts étaient effectuées grâce à un peson à ressort (en bleu clair ci-dessus) ; les corps (en rouge) étaient déplacés dans le bain d'huile par des fils très fins entraînés eux-mêmes par un fil enroulé sur une poupée (une poulie) mue par un moteur.

La connaissance de la Traînée de sphère (due à Stokes) a permis aux auteurs d'établir la Traînée des fils de traction dans le fluide.

Les mêmes auteurs constatent que la présence des parois du bassin agit fortement sur la Traînée des corps : ils précisent :

« Pour les cylindres [en déplacement perpendiculaire à leur axe], il faut au moins une distance de **500** diamètres (de cylindre) pour que les effets des parois deviennent négligeables . »

Jones et Knudsen ont pratiqué des mesures de plaque plane d'allongement **1** à **4** en déplacement perpendiculaire mais ces mesures sont également tributaires de fortes influences des parois de la cuve.

On retirera quand-même de ces difficiles mesures une estimation du $\mathbf{C_x}$ quadratique de la plaque plane d'envergure **L** infinie en déplacement parallèle à son plan (estimation moins sujette à l'influence des parois de la cuve) :

$$\mathbf{C_{xQuad} = 5{,}91 / R_{e\ell}}$$

…ce $\mathbf{C_x}$ quadratique étant basé sur la surface mouillée **2 ℓ L** de la plaque plane et le Reynolds $\mathbf{R_{e\ell}}$ étant basé sur la corde **ℓ** de la plaque (c.-à-d. sa longueur mesurée dans le sens de l'écoulement).

Après conversion, cette estimation prône donc, pour la plaque plane infinie en mouvement dans son plan, un $\mathbf{C_x}$ linéaire de **5,91** (en référence à son envergure **L** supposée très grande).

Sunada et coll. ont trouvé par le calcul, pour une plaque de rapport **L/ℓ =6**, un $\mathbf{C_x}$ linéaire (réf. **L**) de **3,31**. Pour des rapports **L/ℓ** plus grand, ce $\mathbf{C_x}$ linéaire réf. **L** ne peut que diminuer : Jones et Knudsen sont donc dans le bon ordre de grandeur même s'ils donnent un résultat trop fort.

Pour comparaison, ce $\mathbf{C_x}$ linéaire est donné par l'équation classique :

$$C_{xLin\ L} = \frac{4\pi}{3{,}1946 - \mathrm{Ln}(R_{e\ell})}$$

…au $\mathbf{R_{e\ell}}$ de **2,91** (bien que cette équation ne soit valide que pour les $\mathbf{R_{e\ell}}$ <<1) alors que Jones et Knudsen présentent leur résultat comme valide dans la plage de Reynolds **0,01** à **2**.

Note sur la Traînée forfaitaire des bords marginaux de Jones et Knudsen :

Faisons remarquer aussi que dans l'équation (15) de Jones et Knudsen qui donne la Traînée due à un bord marginal :

$$\mathbf{F_{edge} = 1{,}6\ L V \mu} \qquad (15)$$

...cette équation étant une extrapolation aux très bas Reynolds des résultats de Janour [35], ce n'est pas **L** qui devrait apparaître mais **W** (c.-à-d. la corde de la plaque et non son envergure) ; peut-être s'agit-il d'une erreur de transcription totalement isolée…

Nous reviendrons sur cette question de la Traînée forfaitaire des bords marginaux plus bas.

Il est d'ailleurs édifiant que Janour utilise pour cette quantification de la force de Traînée d'un bord marginal la définition de notre $\mathbf{C_x}$ linéaire (qu'il appelle *Formule ou Expression de Stokes*). Le même Janour avait les idées très claires au sujet des différentes formulations possibles de la Traînée (nous y revenons en fin de texte)…

[35] Janour a fait ses mesures dans la plage de Reynolds de **30** à **2300**.

Plaque plane de longueur finie se déplaçant dans son plan :

Sunada et coll. ont calculé la Traînée de plaques rectangulaires se déplaçant de façon coplanaire (c.-à-d. dans leur propre plan). Comme celle de tous les corps qui se déplacent strictement en régime de Stokes, cette Traînée est indépendante du Reynolds. Nous exploitons leur travail plus bas.

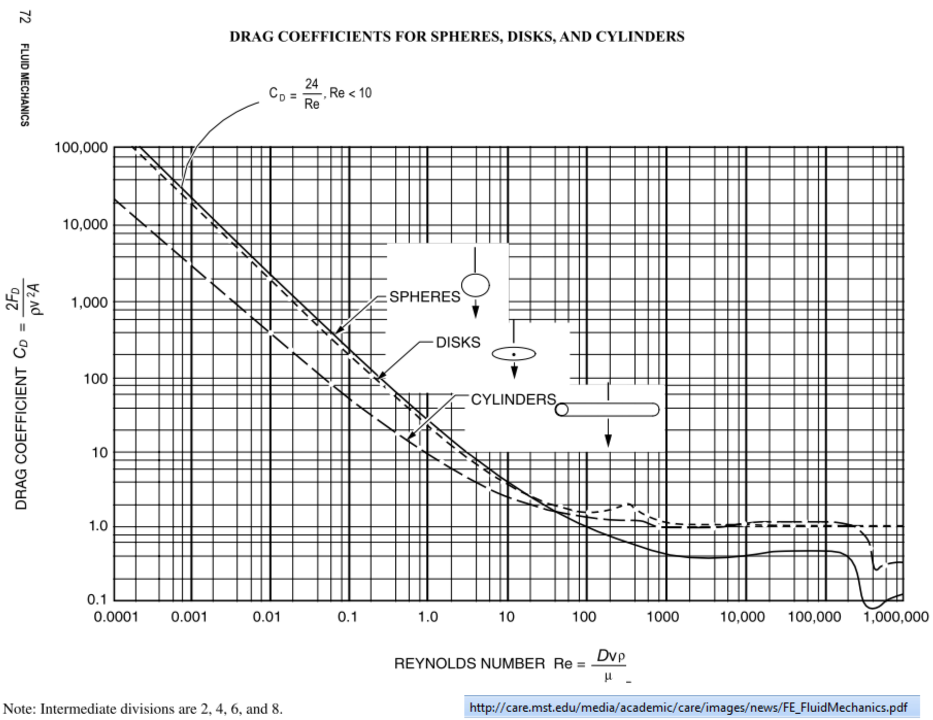
Toujours à propos des plaques planes se déplaçant dans leur propre plan, l'extrapolation aux plus faibles Reynolds des mesures de la Traînée des bords marginaux de Janour dont nous parlions à l'instant promet à chaque bord marginal un **C_x** linéaire de **1,6** (relativement à sa corde).

La Traînée des deux bords marginaux d'une plaque de corde **a** (se déplaçant dans son plan) est donc **3,2 aμV**.

Cette valeur devra rester indicative mais peut rendre des services. Nous donnons d'autres renseignements sur cette question plus bas.

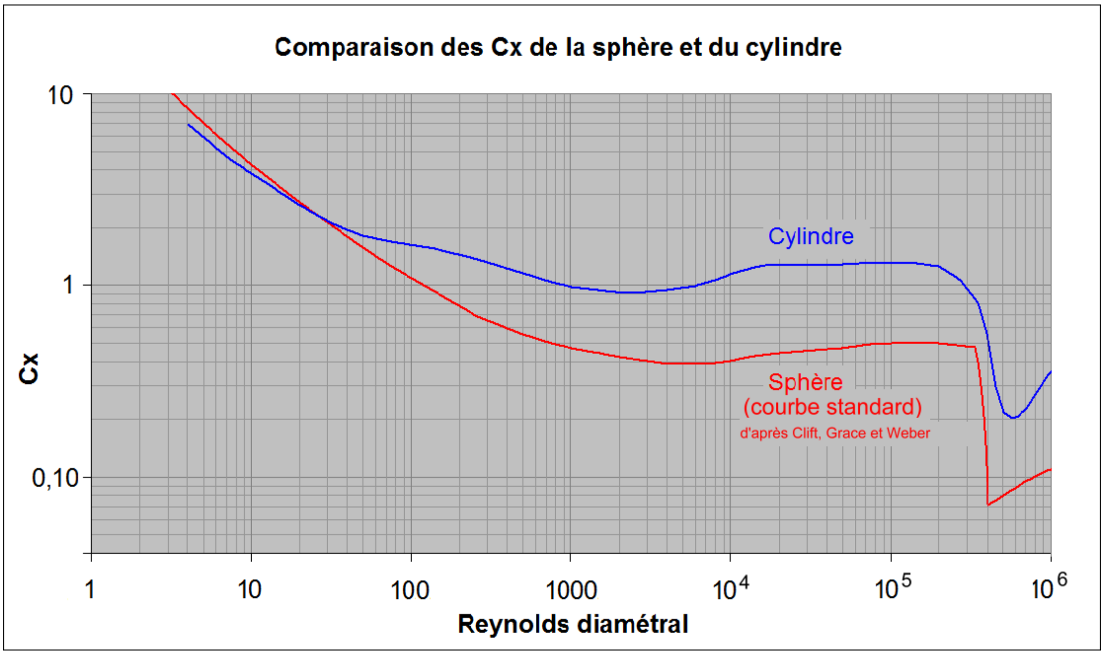
C_x linéaire du cylindre infini en translation transverse à très bas Reynolds :

Le **C_x** linéaire du cylindre de longueur infinie pourrait être déterminé d'après plusieurs graphes qui en donnent le **C_x** quadratique, comme par exemple :



http://care.mst;edu/media/academic/care/images/news/FE_FluidMechanics.pdf

Nous avons nous-même publié dans les Wikipédia Commons cette comparaison des **C_x** quadratiques de la sphère et du cylindre :



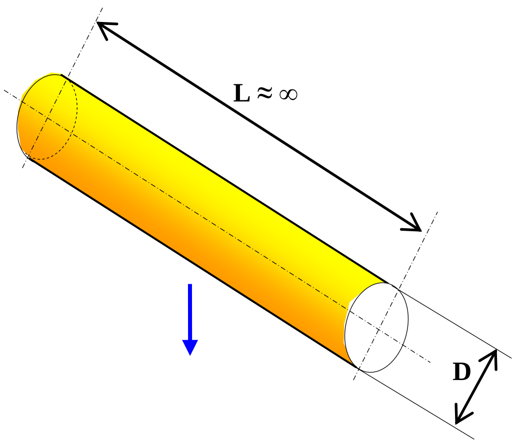
Disponible au lien : https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Comparaison_Cx_sph%C3%A8re_et_cylindre.png

Ce graphe (consacré aux Reynolds non faibles) montre bien que pour les forts Reynolds le $\mathbf{C_x}$ quadratique du cylindre est supérieur à celui de la sphère (et proche de **1,1** ou **1,2**).

Cette *supériorité* du $\mathbf{C_x}$ du cylindre sur celui de la sphère pour ces forts Reynolds (dont la plage de Newton) est un classique en Mécanique des Fluides puisque le cylindre, corps **2D**, propose moins de voies pour son contournement que n'en propose la sphère, corps **3D**.

Cependant aux bas et bas Reynolds, ladite *supériorité* du $\mathbf{C_x}$ quadratique (par rapport à celui de la sphère) n'existe plus.

Goodarz Ahmadi donne une valeur pour la Traînée au mètre de cylindres de très grandes longueurs relatives (c.-à-d. très grand rapport **L/D**, rapport que nous nommerons ici *élancement*) lorsqu'ils se déplacent perpendiculairement à leur grand axe dans un fluide :



Cette Traînée au mètre de longueur **L** [36] est donnée comme valant :

$$\mathbf{F_{\perp} = \frac{4\pi\mu V}{2{,}002 - Ln(Re_D)}}$$

Nous y voyons la réécriture par Wieselsberger de l'équation historique tantôt attribuée à Oseen, tantôt à Lamb.

De même, l'INSA de Lyon James A. Fay cite le $\mathbf{C_x}$ quadratique du cylindre de longueur infinie la valeur analytique trouvée par Lamb :

$$\mathbf{C_{xQuad} = \frac{8\pi}{Re_D Ln(7{,}4/Re_D)}}$$

…ce qui conduit au même résultat [37].

D'autres auteurs précisent que cette valeur analytique de la Traînée de Lamb est valide pour les Reynolds diamétraux inférieurs à **0,5** ; David Kohlman, quant à lui, prend comme limite supérieure de validité le Reynolds **0,6**.

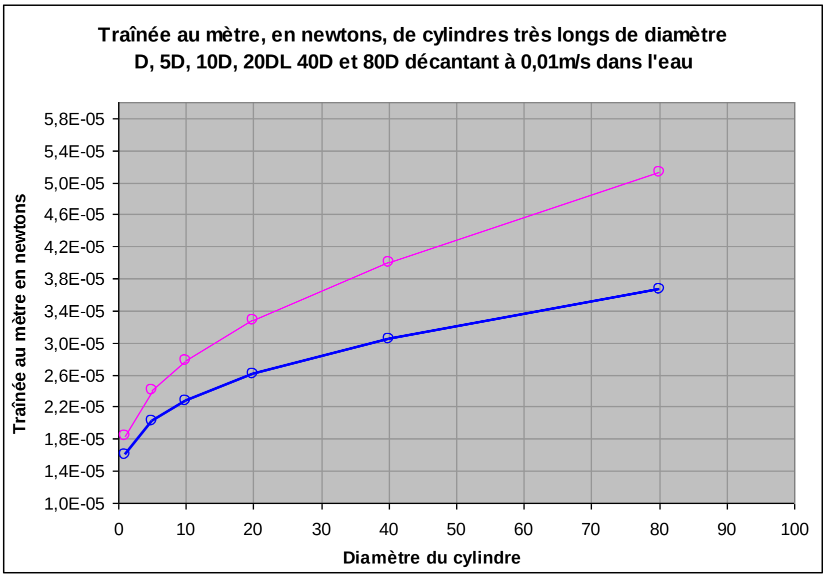
La première remarque que l'on peut faire, à la lecture de cette Traînée au mètre, est que le diamètre du cylindre est présent dans le Reynolds figurant au dénominateur (comme indiqué, il s'agit du Reynolds diamétral).

Une autre remarque est que ce libellé de la Traînée du cylindre long ne dépend pas de l'élancement **L/D** du cylindre. C'est normal dans la mesure où ce cylindre est considéré comme très long et dans la mesure où l'écoulement autour de lui est censé être bidimensionnel.

L'analyse mathématique de ce même libellé serait évidement à faire, mais une rapide analyse graphique montre que le doublement du diamètre du cylindre, à vitesse et fluide donnés) est très loin de produire un doublement de la Traînée. Voici par exemple en bleu l'évolution de la Traînée au mètre de cylindres de grande longueur, de diamètre **D**, **2D**, **5D**, **10D**, **20D**, **40D** et **80D** :

[36] Le texte dit : "drag per unit length".

[37] Multiplier ce $\mathbf{C_x}$ par $\mathbf{½\rho V^2}$ et par la section frontale **DL** donne la Traînée, diviser cette dernière par **L** donne la Traînée au mètre.



Le diamètre de base du cylindre (que nous avons ensuite multiplié, courbe bleue) est **D = 0,245 mm**. Avec ce diamètre de base, le Reynolds est de **0,003**.

La courbe fuchsia est construite de la même façon mais avec un diamètre de base de **0,653 mm** (Reynolds **0,008**).

Il est facile d'observer que la Traînée au mètre ne varie que très faiblement avec le diamètre du cylindre : ainsi fonctionne la nature en ces très faibles Reynolds !

Mais reprenons le libellé historique de Lamb donnant la Traînée au mètre du cylindre de longueur infinie :

$$\mathbf{F\perp = \frac{4\pi\mu V}{2{,}002 - Ln(Re_D)}}$$

<u>Contrairement à celui de beaucoup d'autres corps (sphère, ellipsoïdes, disque), ce libellé dépend du Reynolds (diamétral) de l'écoulement.</u> Cela apparaît d'ailleurs implicitement dans le graphe déjà montré : la courbe représentant le $\mathbf{C_x}$ quadratique du cylindre (assez proche d'une droite) n'est pas parallèle à la courbe de la sphère (qui épouse, pour les Reynolds très inférieurs à **1** la tangente de Stokes, à savoir : $\mathbf{C_{xQuad} = 24/Re}$) : En fait, et sur ce graphe déjà montré, la courbe du $\mathbf{C_x}$ quadratique du cylindre infini est assez proche de $\mathbf{C_{xQuad} = 6{,}5{*}R_e^{-0{,}88}}$ (ce qui pourrait servir de libellé de ce $\mathbf{C_x}$ quadratique, au besoin, ce libellé étant valable pour les Reynolds < $\mathbf{10^{-1}}$).

La Traînée d'un cylindre long de longueur **L** coule de source du précédent libellé : c'est :

$$\mathbf{F\perp = \frac{4\pi\mu VL}{2{,}002 - Ln(Re_D)}}$$

<u>Nous allons prendre la décision de considérer la longueur **L** comme la longueur caractéristique de ce cylindre long</u> (nous avons vu que le diamètre a peu d'influence sur

la Traînée) [38]. C'est cette longueur **L** qui va apparaître dans notre définition du $\mathbf{C_x}$ linéaire du cylindre long, à savoir :

$$\mathbf{C_{xLin}} = \frac{F_{\perp}}{\boldsymbol{\mu}\mathbf{VL}}$$

Alors le $\mathbf{C_x}$ linéaire du cylindre long en translation transverse vaut :

$$\boxed{\mathbf{C_{x\mathrm{Lin\ L}}} = \frac{\mathbf{4\pi}}{\mathbf{2{,}002 - Ln(Re_D)}}}$$

…la longueur caractéristique adoptée ici étant la longueur **L** du cylindre (supposée très grande) et le Reynolds $\mathbf{R}_{eD}$ étant basé sur le diamètre **D** du cylindre.

Ce $\mathbf{C_x}$ linéaire est tiré de l'équation de Lamb.

Comme toujours, la Traînée (en Newton) du même cylindre long sera facile à tirer de ce $\mathbf{C_x}$ linéaire, en le multipliant simplement par **µ**, **V** et par la longueur caractéristique **L** qui a présidé à son écriture.

Dans son texte consacré à des mesures sur les cylindres aux très bas Reynolds diamétraux, David L. Kohlman fait remarquer, en 1963 et s'appuyant sur le Hoerner *Drag*, que le libellé de Lamb est validé par l'expérience jusqu'au Reynolds diamétral **0,6** (nous l'avons déjà dit).

Mais la bonne nouvelle, c'est que, si le libellé de Lamb n'est plus valide au-delà, les expérimentations montrent, toujours d'après Kohlman, que ce libellé doit être remplacé par une droite dessinée dans le prolongement de la courbe de Lamb pour les Reynolds < **0,6**. Ce tracé rectiligne offre un moyen de calcul valide au moins jusqu'aux Reynolds **1** ou **2** :

[38] De toutes façon, nous sommes libres de faire de la sorte : c'est ce choix qui donnera le $\mathbf{C_x}$ linéaire le plus pratique pour calculer la Traînée…

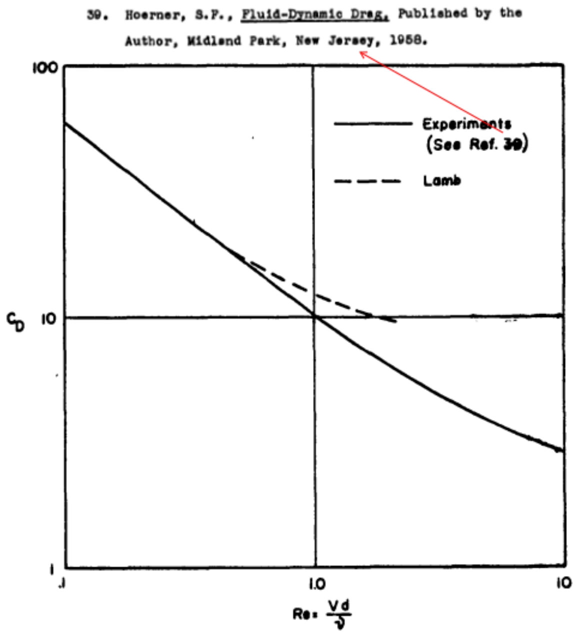


Fig. 23 - Drag Coefficient of a Circular Cylinder in Uniform Flow

Nous venons de dire que Kohlman attribue à Hoerner la collecte des mesures du $\mathbf{C_x}$ quadratique du cylindre aux bas Reynolds (comme indiqué par notre flèche rouge, ci-dessus).

Si cette lecture du texte essentiel d'Hoerner par Kohlman a sa valeur, l'honnêteté nous oblige à dire que nous n'avons pas trouvé une telle collecte dans le Hoerner *Drag*.

Mais le texte de Kohlman est lui-même essentiel pour ce qui est de comprendre pourquoi le $\mathbf{C_x}$ linéaire du cylindre infini en mouvement transverse aux bas Reynolds n'est pas constant.

C. M. White lui-même écrivait en 1945 :

« [l'équation de Lamb] semble en conflit avec les autres exemples de déplacement dans des liquides visqueux qui, tous, se conforment à une relation du type **Traînée/(µVL)** = constante. »

De même, Stéphane Champmartin et A. Ambari écrivent dans leur texte :

« Le point remarquable de [l'équation de Lamb] est la présence en son sein du nombre de Reynolds diamétral qui montre qu'elle ne peut constituer une *solution de Stokes* (par analogie avec la sphère ou tout corps fini se déplaçant dans un fluide non-borné, une *solution de Stokes* est une solution dont le [quotient Traînée/(µVL)] est indépendant du nombre de Reynolds. »

La raison de ce conflit est que le libellé de Lamb n'est pas applicable, comme on le laisse souvent penser, au régime de Stokes : <u>il est applicable au régime d'Oseen</u>, ce régime d'Oseen suivant immédiatement le régime de Stokes.

Le régime d'Oseen, on s'en souvient, est caractérisé par l'existence des premiers effets de l'inertie (effets qui se font sentir peu à peu lorsqu'on sort du régime de Stokes).

Pour prendre en compte ces effets, Oseen a effectué une linéarisation des termes d'inertie dans les équations de Navier-Stokes.

Or c'est à partir de cette modélisation d'Oseen (avec linéarisation des effets de l'inertie) que Lamb à construit son équation historique donnant le $\mathbf{C_x}$ du cylindre infini.

On ne peut donc pas prétendre à appliquer l'équation historique de Lamb aux régimes de Stokes.

Les essais de David Kohlman, viennent justifier ceux de White C. M, en leur apportant un plus grande précision. Utilisant un bassin de carène où le fluide est entrainé par deux courroies [39], il obtient le jeu de courbes suivant, selon la valeur du quotient **d/H**, **d** étant le diamètre des cylindres testés et **H** étant la largeur existant entre les parois de sa cuve d'essais (comme toujours aux bas Reynolds, les parois, même lointaines, exercent une très forte influence sur l'écoulement autour des corps testés) :

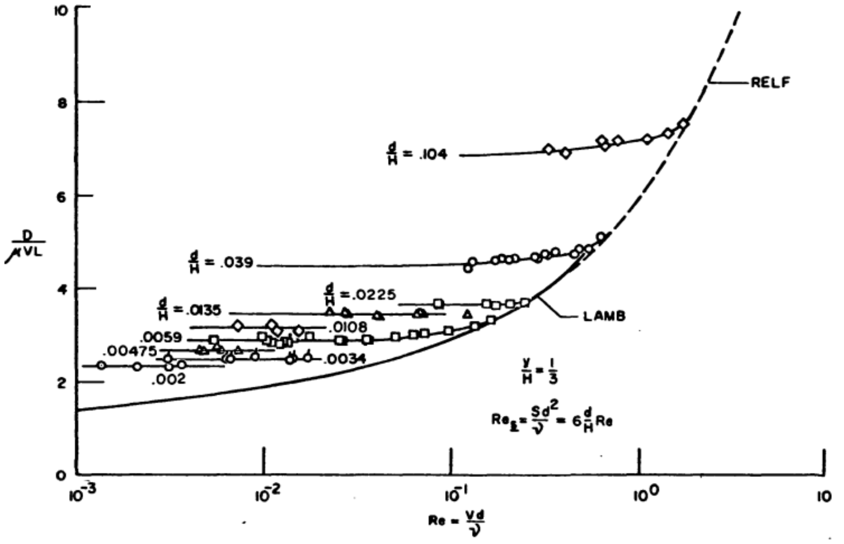


Fig. 27–28 - Drag of a Circular Cylinder Between Parallel Walls in Shearing Flow, $y/H = \frac{1}{3}$

(nous avons ici regroupé les apports de deux graphes de Kohlman)

La courbe de Lamb apparaît en trait plein et est relayée, à partir du Reynolds **0,6** par la courbe de Relf, donnée par Kohlman comme valide jusqu'au Reynolds **10**. [40]

Comme on le remarque sur ce graphe, pour une même valeur de **d/H**, c.-à-d. pour une même valeur de l'éloignement relatif des parois (relativement à **d**), les ordonnées dessinent une horizontale.

Or, comme on peut également le lire, ces ordonnées sont définies par **D/(µV L)**, **D** étant la Traînée mesurée par l'auteur, **V** la vitesse de l'écoulement et **L** la longueur du cylindre : et <u>cette définition est tout simplement celle du $\mathbf{C_x}$ linéaire dont nous faisons la promotion dans ce texte !</u>

Kohlman nomme « *drag coefficient* » ce quotient **D/(µV L)** et le symbolise par **α**, reprenant sans doute la notation de Lamb.

[39] Nous ne pouvons entrer ici dans la complexité des expériences de Kohlman…

[40] Nous n'avons pas trouvé le libellé de cette courbe de Relf.

Le même Kohlman, à la suite de White, indique que ces courbes horizontales (de C_x linéaire constant) sont celles dessinées par le cylindre quand il est en régime de Stokes.

Pour Kohlman, en effet, cette constance du C_x linéaire est le gage d'un écoulement de Stokes, c'est pourquoi il fait un large usage de ce C_x linéaire.

Rappelons que, du fait de l'additivité des solutions de l'équation de Stokes, si l'on additionne **n** écoulements de Stokes de même vecteur vitesse $\vec{V}$ (sur un seul corps et dans le même fluide), le vecteur vitesse résultant sera $\overrightarrow{nV}$ et la Traînée sera **n** fois la Traînée produite par la vitesse $\vec{V}$; ce qui revient à dire qu'en régime de Stokes le C_x linéaire est constant…

Mais alors la question se pose : pourquoi à gauche des courbes de Lamb et de Relf les cylindres de différents **d/H** sont-ils en régime de Stokes ?

Kohlman répond ainsi à cette question : C'est parce que, pour chaque rapport **d/H**, les parois de la cuve d'essais protègent le cylindre des premiers effets de l'inertie lorsque le Reynolds croît ; ces parois *proches* maintiennent donc le cylindre en régime de Stokes (régime « purement visqueux ») et donc à C_x linéaire constant.

Stéphane Champmartin écrit lui-même (en français) :

« Le confinement [du cylindre entre les parois de la cuve] diminue donc l'influence de l'inertie [41] en retardant ses effets. »

Ce constat est assez troublant et nullement intuitif (bien que Kohlman en propose une démonstration verbale qualifiée par lui d'*intuitive*). Mais c'est la seule explication disponible de l'existence des paliers horizontaux observés aux cours de mesures de Traînées et d'ailleurs simulée par les actuels moyens de calculs.

Kohlman écrit bien-sûr que ce phénomène peut se démontrer « par de rigoureuses déductions mathématiques ».

Quant à nous, nous devons tirer de tout cela la conclusion que, pour un rapport **d/H** donné, le cylindre fera preuve d'un C_x linéaire constant jusqu'à un certain Reynolds (dit de transition) à partir duquel son C_x linéaire suivra la courbe historique de Lamb.

Pour un certain rapport **d/H**, l'existence d'un palier horizontal dans la courbe du C_x linéaire est preuve que l'écoulement est un écoulement de Stokes ; puis, à partir d'un certain Reynolds, il y a transition progressive vers un écoulement d'Oseen (où les phénomènes inertiels commencent à se faire sentir).

Bien que Kohlman n'ait réalisé des expériences que jusqu'au rapport minimal **d/H = 0,0034**, on peut penser que le C_x linéaire du cylindre à des **d/H** plus faibles trace encore des paliers [42].

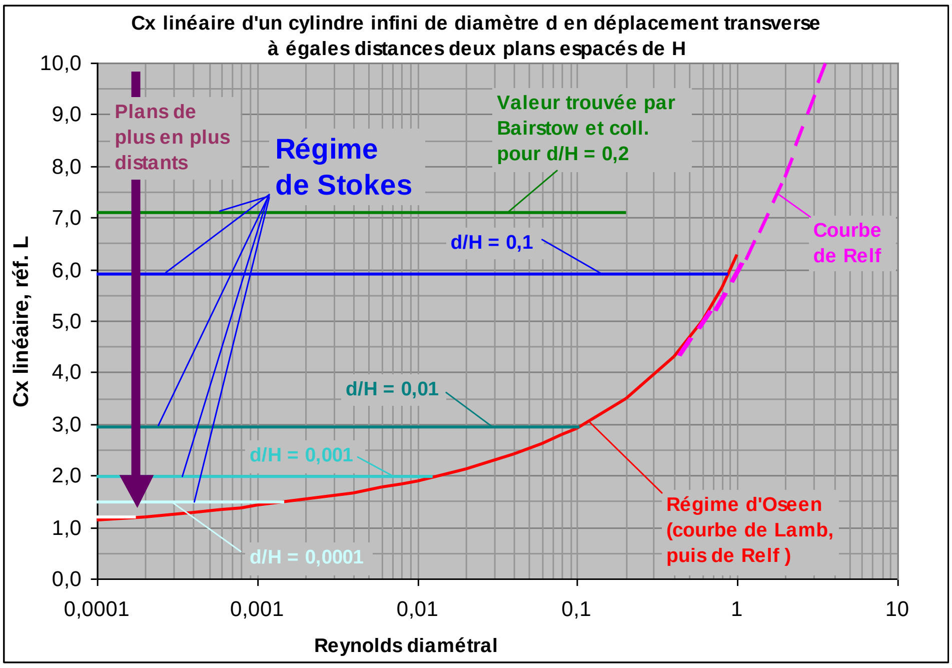
---

[41] « Dans sa thèse de doctorat, Coutanceau [CONTRIBUTION À L'ÉTUDE THÉORIQUE ET EXPÉRIMENTALE DE L'´ÉCOULEMENT AUTOUR D'UNE SPHÈRE QUI SE DÉPLACE DANS L'AXE D'UN CYLINDRE À FAIBLE NOMBRE DE REYNOLDS OU EN RÉGIME IRROTATIONNEL] a fait la même observation dans le cas d'une sphère chutant dans l'axe d'un tube cylindrique. »

[42] Le régime de Stokes s'étend jusqu'au moment où la trop petite taille des corps les rend sujets aux mouvements brownien.

Le graphe ci-dessus a cependant été dressé pour une position des cylindres à un tiers de l'écart entre les deux plans ; mais Kohlman l'a extrapolé à la situation où le cylindre est à mi-distance des deux plans.

Sur la foi de cette extrapolation, on peut alors tracer l'évolution suivante pour le C_x linéaire du cylindre selon le rapport de son diamètre à la distance entre les plans (le cylindre étant à mi-distance de ces deux plans) :



On peut utiliser ce graphe de la façon suivante, par exemple pour un rapport **d/H** valant **0,01** :

Pour les Reynolds diamétraux inférieurs à **0,1**, le C_x linéaire du cylindre infini (en référence à sa longueur) est constant est ≈ **2,95**. Au-dessus du Reynolds **0,1**, le C_x linéaire suit la courbe historique de Lamb (en rouge) puis celle de Relf (en fuchsia).

Pour réaliser ce graphe, nous avons utilisé les spécifications de Kohlman quant à la position en ordonnée des paliers de C_x linéaire constant.

Cette position en ordonnée est :

$$C_{xLin\ Réf.L} = \frac{5{,}9}{Log_{10}\left[\frac{H}{d}\right]}$$

(notez que ce libellé utilise l'inverse du rapport **d/H**)

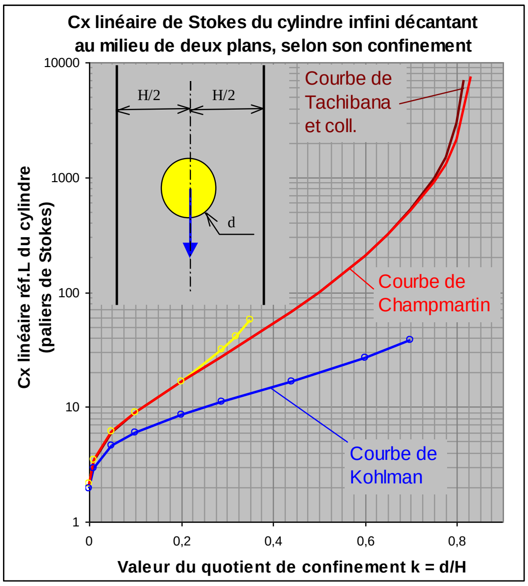
Nous avons d'ailleurs conservé la qualité décimale du logarithme de ce libellé puisqu'elle permet d'estimer rapidement le C_x linéaire de Stokes à attendre d'un certain rapport **H/d** : ainsi, pour un valeur **100** de ce rapport, on en arrive facilement au C_x linéaire constant ≈ **2,95** que nous prenions plus haut comme exemple de la lecture de notre graphe.

Stéphane Champmartin, qui a étudié numériquement cette question du cylindre infini décantant à mi-distance entre deux plans (entre autres configurations), propose une valeur différente de cette loi donnant le C_x linéaire des paliers horizontaux (où le cylindre se trouve en régime de Stokes) ; si l'on ne désire pas confiner les cylindre plus que **k = d/H = 0,2**, donc si **H** est suffisamment grand par rapport à **d**, on peut tirer des travaux de Champmartin une équation (concurrente de celle de Kohlman citée ci-dessus) donnant le **C_x** linéaire des paliers *de Stokes* du cylindre confiné :

$$\mathbf{C_{xLin\ Réf.L}} = \frac{\mathbf{5{,}7}}{\mathbf{Log_{10}}\left[\mathbf{0{,}44\frac{H}{d}}\right]}$$

... équation valide pour les confinement **k < 0,2** ou **d** est le diamètre du cylindre et **H** la largeur existant entre les parois limitant le fluide.

Pour quasiment toute la plage des confinements possibles (soit pour **0,001 < k <0,99**), Champmartin donne une équation beaucoup plus compliquée comportant **16 termes** ; nous l'avons représentée en rouge ci-dessous [43], en comparaison avec notre équation simple en **5,7** ci-dessus (qui est en jaune ci-dessous), une équation plus simple de Tachibana et coll. (en marron, valide jusqu'au confinement **0,7**) et l'équation de Kohlman (en bleu) :



Le *Reynolds de transition* au-dessus duquel le cylindre verra son **C_x** passer progressivement d'une valeur palier à la valeur de Lamb est facile à calculer, du moins si l'on considère que ce palier se prolonge jusqu'à la courbe dudit Lamb ; c'est (ici d'après Kohlman) :

$$\mathbf{R_{eT}} = \mathbf{7{,}41}\left(\mathbf{\frac{H}{d}}\right)^{\mathbf{-0{,}925}}$$

[43] En fait nous n'avons pu reproduire exactement la courbe de Champmartin d'après ses **18 termes** : la nôtre en diffère au-dessus du confinement **0,75**.

Un fois encore on constate à la lecture de ce graphe de Kohlman que les parois de la cuve où décante le cylindre projettent leur influence à très grande distance. C. M. White lui-même écrivait en 1945 :

« il faut que ces [parois] soient à rien moins que 10 000 diamètres de distance pour que leur influence disparaissent. »

Il a écrit aussi :

« J'ai […] découvert que, excepté aux plus hautes vitesses, la formule de Lamb ne s'applique que dans des fluides d'extension infinie ou presque […]. »

Stéphane Champmartin dit les choses autrement :

« – plus le rapport de confinement k est grand et plus [le Reynolds terminal du palier ou Reynolds de transition R_{eT}] est grand. Les "*solutions de type Stokes*" existant dans l'intervalle]0; R_{eT}[, cela signifie que plus le cylindre est confiné et plus le domaine d'existence de ces solutions est grand. »

Sur le graphe ci-dessus, nous avons tracé des paliers horizontaux jusqu'au rapport **d/H = 0,0001**. C'est beaucoup plus bas qu'Kohlman (et à plus forte raison C. M. White) ont porté leurs mesures (le deuxième ne s'étant aventuré que jusqu'au rapport **d/H = 0,0034**). Champmartin lui-même, nous l'avons dit, propose ses résultats jusqu'au confinement de **0,001**, ce qui, au demeurant, représente un confinement très faible.

Vers le haut du graphe apparaît en vert le pallier horizontal déterminé par un calcul mathématique de Bairstow, Cave et Lang ; le cylindre infini pris en compte par ces auteurs décante à égale distance entre deux plans espacés de **5** diamètres **d** ; le quotient **d/H** vaut donc **0,2**. Ce palier, au C_x linéaire **7,1**, cité par Kohlman, se situe d'ailleurs un peu plus bas qu'on le calculerait à partir des travaux du même Kohlman (**8,44**).

Quelle est la conséquence de ces progrès apportés par C. M. White et Kohlman ?

Lorsqu'un corps isolé décante dans un fluide d'extension infinie (l'air d'altitude, par exemple ou l'eau de la mer), on peut penser que le palier de C_x linéaire constant sera très proche de la courbe de Lamb. À titre d'exemple, on peut penser à un dispositif expérimental qui créerait un rapport **H/d** de **100 000** [44]. Le C_x linéaire constant (d'après notre graphe) serait de **≈ 1,2** jusqu'à un peu au-dessus du Reynolds **0,0001** (c'est le palier blanc visible dans cette zone) ; pour les Reynolds plus fort, le C_x linéaire suivrait ensuite les prescriptions de Lamb.

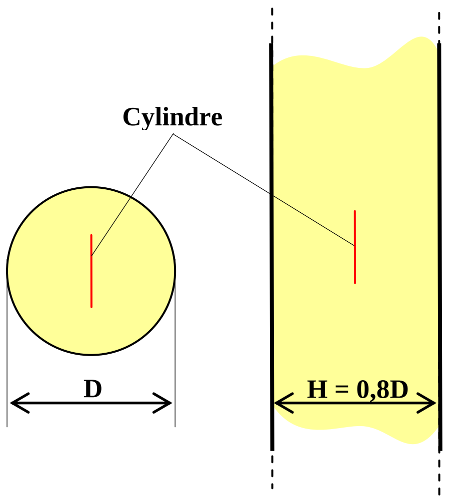
On est alors en droit de juger que pour les très forts rapports **H/d** (parois très lointaines) il y assez peu de différence d'ordonnées entre le palier blanc et la courbe rouge de Lamb, même si ce jugement est lié à la précision que l'on recherche.

Le lecteur aura noté que nous n'avons traité que les cas où un cylindre décante entre deux plans parallèles (conformément aux conclusions de Kohlman). Mais White,

[44] Cela fait une distance **D** entre les deux plans de **10 m** si le cylindre montre un diamètre de **1 mm**, ou **1 m** pour un diamètre de corps de **0,1 mm** .

grâce à la plus grande simplicité de son dispositif, a pu comparer la décantation de cylindres dans une cuve cylindrique et entre deux plans parallèles.

Il a constaté que le C_x linéaire des cylindres est identique lorsqu'ils décantent au milieu d'une cuve cylindrique de diamètre **D** ou entre deux plans espacés de **H = 0,8D** :



Cuves vues de dessus

Mnémotechniquement, on pourra garder en mémoire que, s'il s'agit de conserver le C_x linéaire d'un même cylindre constant, le déroulement des parois cylindriques en deux plans parallèles autorise un léger rapprochement de ces deux plans (image ci-contre).

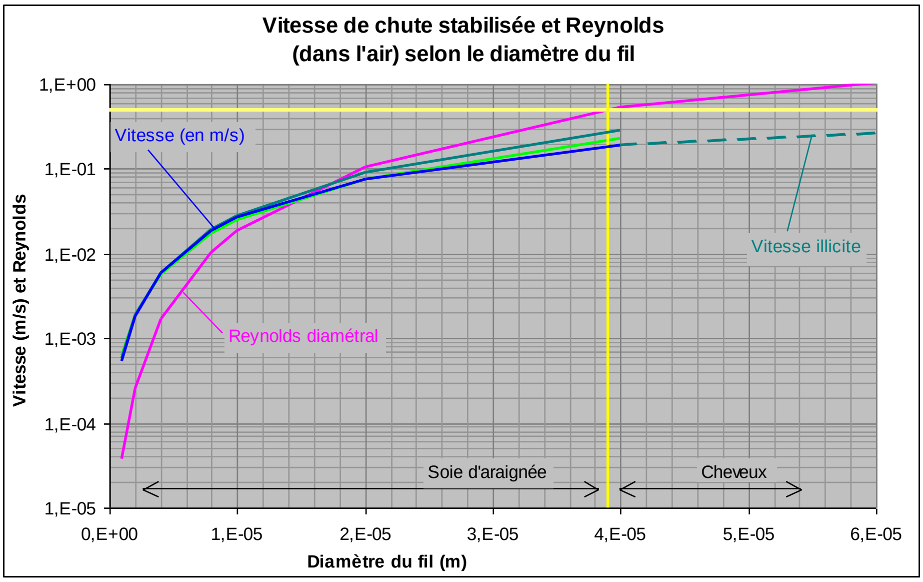
En tout état de cause, les apports de C. M. White et Kohlman ne changent pas, dans beaucoup de cas [45], l'ordre de grandeur des C_x linéaires des cylindres infinis en déplacement transverse, surtout si ces cylindres décantent entre des parois très éloignées. C'est peut-être ce qui explique pourquoi les travaux de ces auteurs sont si peu souvent pris en compte.

[45] Tout dépend de la précision qui est requise et du rapport **d/H** pour lequel les calculs sont effectués : plus **d/H** est fort et plus les apports de White et Kohlman sont nécessaires.

<u>Note sur le Reynolds des fils de soie de grande longueur dans l'air :</u>

Il nous est venu à l'idée de calculer, à partir des précédentes formules, à quelle condition un fil (soie d'araignée ou très fin cheveux) peut chuter dans l'air en régime de Stokes.

Prenant comme abscisse le diamètre du fil, nous avons déterminé sa vitesse de chute stabilisée (courbe bleu dense) et donc son Reynolds dans l'air (courbe fuchsia) :



Pour ces calculs, nous avons pris la masse volumique du fil de soie d'araignée comme valant **1300 Kg/m^3**.

Il apparaît sur le graphe que le Reynolds (en fuchsia) quitte le régime de Stokes au-dessus du diamètre **40 micromètres** (nous avons adopté le Reynolds **0,5** comme limite) : autrement dit un fil de **40 microns** est trop lourd et sa vitesse de chute est trop forte pour que le produit de son diamètre par cette vitesse le place en régime de Stokes.

Pour les diamètres plus forts que **40 microns** le calcul n'est donc plus licite (d'où la prolongation de la courbe de la vitesse par une autre qualifiée d'*illicite*).

Dans sa partie *licite, l*a courbe de la vitesse bleu dense reste assez proche de la courbe :

$$\mathbf{V = 2{,}5*10^6\ Re^{1{,}6}}$$

…qui figure en vert fluo sur le graphe. Bien que cette courbe verte accuse une erreur maximale de **23 %**, elle pourrait constituer une indication de la vitesse de chute d'un fil très long dans l'air selon son diamètre…

Le diamètre minimum des cheveux étant de **40** micromètres nous avons reporté cette limite sur le graphe. Le diamètre des soies d'araignée va de **3** à **8** micromètres mais un fil d'araignée peut être constitué de plusieurs soies tressées. Il existe d'ailleurs dans la nature beaucoup d'autres catégories de fils ou fibres que celles produites par les araignées ou les hommes…

Si l'on utilise pour le cylindre infini la régression $\mathbf{C_{xQuad} = 6{,}5*R_e^{-0{,}88}}$ que nous avons évoquée <u>un peu plus haut</u>, on peut résoudre analytiquement l'équation **V = f(D)** et l'on trouve pour cette vitesse de chute stabilisée **V** :

$\mathbf{V = 7*10^6*D^{1{,}68}}$. C'est la courbe bleu glauque que l'on remarque sur le graphe : elle se montre quand-même coupable d'une erreur de **53 %** pour le Diamètre $\mathbf{4*10^{-4}}$ mais pourrait également servir d'indication…

Il nous faut à présent parler d'un problème dont nous n'avons trouvé aucune évocation dans toutes nos lectures : Puisque la formule de Lamb donne le C_x linéaire du cylindre infini en mouvements transverse

Cx linéaire du cylindre de longueur infinie en déplacement transverse et en régime d'Oseen, par Lamb :

Lorsque l'on observe l'équation de Lamb donnant le C_x linéaire en régime d'Oseen du cylindre de longueur infinie en déplacement transverse :

$$\boxed{C_{xLin\ L} = \frac{4\pi}{2{,}002 - Ln(Re_D)}}$$

…on peut être déçu puisque cette équation, censée donnée le C_x linéaire de ce corps dépend de son Reynolds diamétral, lequel dépend de sa vitesse de déplacement.

Or, dans le cas d'une décantation, la vitesse de cette décantation dépend du C_x linéaire qui dépends, par l'équation de Lamb, du Reynolds diamétral donc de la vitesse de décantation donc du C_x linéaire.

L'équation de Lamb comporte donc une inconnue en son sein ; pour cette raison nous la qualifierons, dans le cas de la décantation, d'*irrésolue* .

Le fait que cette équation soit *irrésolue* peut paraître rédhibitoire.

Mais la présence d'une inconnue est assez commune en Mécanique des Fluides des hauts Reynolds puisque, malgré le désir des pères fondateurs (Eiffel, Prandtl) la plupart des coefficients adimensionnels qu'on y utilise dépendent du Reynolds de l'écoulement [46].

Quand, par exemple, on désire connaître la vitesse de chute stabilisée d'une sphère (cela peut être un ballon ou une goutte de pluie), on se réfère forcément à un graphe ressemblant au nôtre (déjà présenté).

Ce graphe dessine l'équation :

$$C_{xQuad} = F(R_{eD})$$

Or le Reynolds est basé sur la vitesse qui sera atteinte lors de la chute stabilisée et cette vitesse est inconnue.

La détermination du C_x quadratique revient donc à écrire :

$$C_{xQuad} = F\left[\frac{V_{(CxQuad)}D}{\nu}\right]$$

…et à chercher C_{xQuad} qui vérifie cette équation.

[46] En fait, cet ambiguïté naît naturellement des essais en soufflerie puisqu'à une certaine vitesse du fluide (donc à un certain Reynolds) on trouve tel C_x quadratique. Il est donc naturel d'exprimer le C_x quadratique en fonction du Reynolds…

Ceci de la même façon qu'on peut être amené à chercher **x** vérifiant l'équation :

$$x = ax^2+bx+c$$

Résoudre cette dernière égalité du deuxième degré est aisé (il y a deux solutions, en général).

Mais si on ne sait pas la résoudre, on peut toujours chercher au hasard les valeurs de **x** qui la satisfassent.

Plutôt que de chercher au hasard, il est d'ailleurs plus simple, à notre époque, d'utiliser un tableur comportant un curseur faisant varier la valeur de **x**, de sorte qu'en manipulant ce curseur on arrive à faire que les quantités présentes de chaque côté du signe égal aient la même valeur [47].

On peut facilement faire de même pour trouver le $\mathbf{C_x}$ quadratique de la sphère dans l'équation :

$$C_{xQuad} = F\left[\frac{V_{(CxQuad)}D}{\nu}\right]$$

Mais explicitons plutôt la façon de résoudre l'équation *irrésolue* de Lamb (en décantation), à savoir :

$$C_{xLin\ L} = \frac{4\pi}{2{,}002 - Ln(Re_D)}$$

Pour ce faire, on écrit sur une feuille de tableur, dans des colonnes qui se suivent, le diamètre du cylindre, son élancement, sa longueur (qui en découle), son volume, la Masse Volumique du matériau constitutif du cylindre (de l'acier, ici), etc.

Notre feuille de tableur ressemble alors à cela :

		Curseur faisant varier le Cxlin imposé										
Cx linéaire imposé :	41,7500											
à comparer au Cxlin de Lamb :	41,7594											
	Diamètre	Elancement	Longueur	Volume	Masse volumique du cylindre	Diff de Masse Volumique cylindre-fluide	D'où Traînée au mètre	Viscosité dynamique (Pa*s)	D'où vitesse de décantation	D'où Reynolds Diamétral	D'où Cx lin par formule de Lamb	Vérif : traînée au mètre
	2,00E-02	100	2	6,28E-04	7800	6540	2,02E+01	1,49	3,24E-01	5,48E+00	41,76	2,02E+01

Sur cette saisie d'écran, on remarque le curseur bleu qui va nous permettre <u>d'imposer</u> une certaine valeur au $\mathbf{C_x}$ linéaire (pris bien-sûr en référence **L**, la longueur du cylindre supposée très grande) : ce $\mathbf{C_x}$ linéaire imposé s'écrit alors dans la cellule jaune supérieure ci-dessus.

À partir de ce $\mathbf{C_x}$ linéaire imposé et l'ensemble des propriétés du cylindre et du fluide où il décante, on peut calculer la vitesse de décantation du cylindre (que nous allons nommer $\mathbf{V_{imp}}$ car elle est imposée par la position du curseur et le $\mathbf{C_x}$ linéaire imposé) ; cette vitesse de décantation est :

$$V_{imp} = \frac{\text{Traînée au mètre}}{\mu\ C_{xLinLImp}}$$

[47] Jadis on utilisait également une méthode graphique en cherchant les intersections de la droite **y = x** et de la parabole $\mathbf{ax^2+bx+c}$.

La Traînée au mètre intervenant ici n'est autre que le poids efficient au mètre de notre cylindre, soit :

$(\rho_{acier} - \rho_{fluide})$ **g S**

…si ρ_{acier} est la Masse Volumique de l'acier, ρ_{fluide} la Masse Volumique du fluide, **g** l'accélération de la pesanteur et **S** la section du cylindre, toutes ces quantités étant nécessaires et connues.

Connaissant cette V_{imp} (vitesse imposée par la position du curseur et les caractéristiques du corps et du fluide), on peut facilement calculer le Reynolds imposé (nous écrivons *imposé* parce qu'il est imposé indirectement par la position du curseur).

Maintenant que nous connaissons le Reynolds imposé, nous pouvons calculer le C_x linéaire (référence **L**) que Lamb attribuerait au cylindre à ce Reynolds en régime d'Oseen.

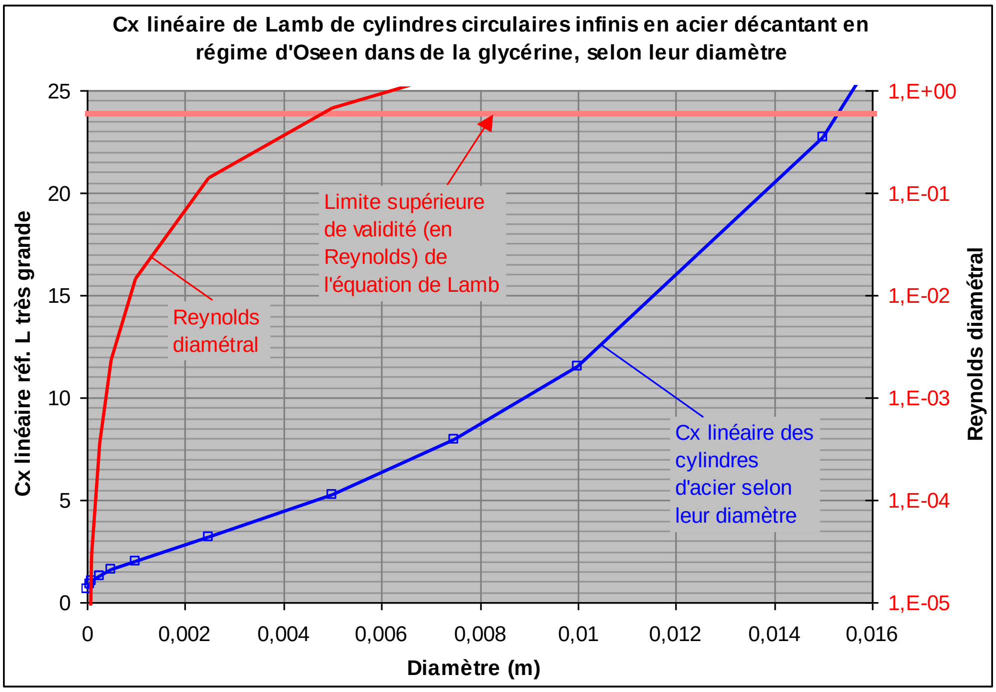
Bien-sûr, ce C_x linéaire a peu de chance d'être (sauf hasard formidable) celui que nous avions imposé à l'aide du curseur !
Mais nous pouvons placer une copie de ce C_x linéaire de Lamb juste sous le C_x linéaire imposé (cellule jaune la plus basse).

La machine est prête. Il suffit maintenant d'agir sur le curseur pour que les valeurs affichées dans les deux cellules jaunes soit identiques (ou presque, selon la précision requise et selon le réglage de la précision du curseur).

Une fois que nous aurons égalisé les deux cellules jaunes, nous pourrons constater (flèche à deux fers rouges) que les traînées au mètre déterminées par le C_x linéaire imposé et le C_x linéaire de Lamb sont bien identiques.

On aura auparavant constaté avec satisfaction que tout le calcul se montre indépendant de l'élancement choisi pour le cylindre (même si cet élancement est supposé être très grand dans l'équation de Lamb).

Bref, lorsque l'on fait fonctionner cette machine, on peut dessiner à titre d'exemple le graphe suivant qui concerne des cylindres infinis en acier décantant dans de la glycérine :



Comme on le constate, le $\mathbf{C_x}$ linéaire (référence **L**) des cylindres dépend de leur diamètre.

La courbe rouge, à lire sur l'échelle de droite, indique le Reynolds correspondant à chaque diamètre.

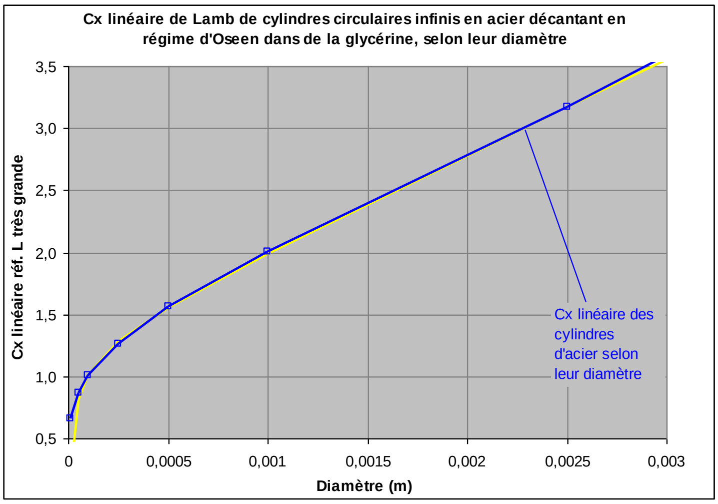
Nous avons porté, comme un horizontale, la limite de validité en Reynolds (**0,6**) couramment admise pour la formule de Lamb. Cette limite est atteinte pour le diamètre **5 mm**, à un $\mathbf{C_x}$ linéaire (courbe bleue) de ≈ **5**.

Les cylindres calculés sont ici en acier (ou plutôt, c'est ce qui importe, fabriqué dans un métal de Masse Volumique **7800 kg/m^3**). La Viscosité Dynamique de la glycérine est prise à **1,49 $\mathbf{P_a}$*s** et sa Masse Volumique à **1260**.

Si l'on désire connaître le $\mathbf{C_x}$ linéaire de cylindre du même métal de très grande longueur et de diamètre compris entre **0,1 mm** et **2,5 mm**, on peut utiliser la régression suivante qui est précise à mieux que **1,02 %** dans cette plage (les bornes comprises) :

$$\mathbf{C_{xLin\ réf.L} = 1{,}4574+747\ D - 0{,}015\ D^{-0{,}3859}}$$

…**D** étant le diamètre exprimé en mètres. Cette régression dessine la courbe jaune sous la courbe bleue ci-dessous :



Cependant, une réflexion plus profonde sur les calculs précédents nous ont amené à penser que tous les paramètres intervenant dans la détermination du $\mathbf{C_x}$ linéaire des cylindres infinis peuvent être regroupés en un seul critère sans dimension.

Ce critère, que nous nommerons **C**, est :

$$\mathbf{C} = \frac{(\rho_{cyl} - \rho_f)\rho_f\, D^3 g}{\mu^2}$$

Dans le critère **C**, $\boldsymbol{\rho_{cyl}}$ est la Masse Volumique du cylindre et $\boldsymbol{\rho_f}$ la Masse Volumique du fluide, **D** est le diamètre du cylindre, **g** est la gravité du lieu, et **μ** la Viscosité Dynamique du fluide.

À cette aune, le Reynolds diamétral vaut :

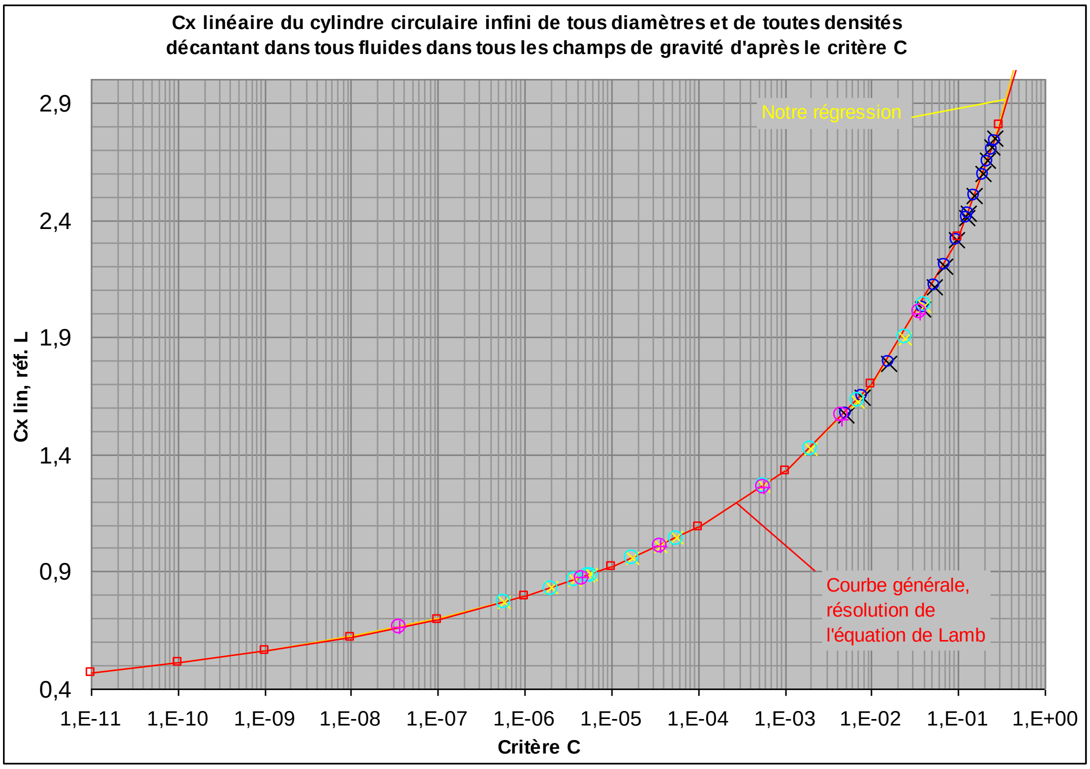
$$\mathbf{R_{eD}} = \frac{\pi\ C}{4\ C_{xlin}}$$

Le critère adimensionnel unique **C** permet de résoudre d'une façon générale l'équation irrésolue de Lamb qui s'écrit à présent :

$$\mathbf{C_{xLin\ L}} = \frac{4\pi}{2{,}002 - \mathrm{Ln}\left(\dfrac{\pi\ C}{4\ C_{xlin}}\right)}$$

Cette résolution peut se faire comme nous l'avons expliqué ci-dessus dans un tableur par utilisation d'un curseur.

On dégage ainsi, la courbe générale rouge à marques carrées rouges suivante :



Cette courbe rouge représente donc le $\mathbf{C_x}$ linéaire (réf. **L**) du cylindre circulaire infini en décantation transverse dans un fluide non borné selon le critère adimensionnel **C** défini plus haut comme étant :

$$\mathbf{C} = \frac{(\rho_{cyl} - \rho_f)\rho_f\, D^3 g}{\mu^2}$$

En jaune est une régression que nous avons dégagé par essais et erreurs :

$$\mathbf{C_{xLin}} = \frac{\mathbf{15{,}1}}{\mathbf{4{,}0571 - Ln(C)}} - \mathbf{0{,}047}$$

Cette régression donne une précision meilleure que **0,5 %** pour **C** courant de 10^{-11} à **0,1** mais décroche ensuite (erreur de **1,32 %** pour **C = 0,5**).

Les cercles bleu dense et bleu clair sont des valeurs de $\mathbf{C_x}$ linéaires trouvées par résolution directe de l'équation irrésolue de Lamb (par la méthode du curseur), valeurs que nous prenons pour les valeurs exactes. Certaines de ces marques circulaires paraissent s'éloigner de la courbe rouge à marques carrées rouges, mais celle-ci n'étant déterminée qu'avec un faible nombre d'abscisses, les dites marques circulaires ne s'éloignent que des *facettes* rectilignes de la courbe rouge puisqu'elles sont issu d'une résolution plus réaliste (à des abscisses intermédiaires quelconques).

Les marques en X jaunes et noires sont les résultats de notre régression jaune…

Les cercles fuchsia sont les résolutions exactes de l'équation irrésolue de Lamb pour les cylindres d'acier décantant dans la glycérine (déjà évoqués plus haut) et les croix de la même couleur les valeurs obtenues pour ces mêmes cas grâce à notre régression jaune.

On peut donc encadrer ce libellé que nous croyons original :

$$\boxed{C_{xLin} = \frac{15{,}1}{4{,}0571 - Ln(C)} - 0{,}047}$$

...avec $C = \dfrac{(\rho_{cyl} - \rho_f)\rho_f\, D^3 g}{\mu^2}$

…ρ_{cyl} étant la Masse Volumique du cylindre et ρ_f la Masse Volumique du fluide, **D** étant le diamètre du cylindre, **g** la gravité du lieu, et **µ** la Viscosité Dynamique du fluide.

Cet encadré donne, pour les critères **C < 0,1**, le C_x linéaire (en référence **L**) de cylindres de longueur infinie décantant horizontalement en régime d'Oseen sous l'action de leur poids dans un fluide non borné.

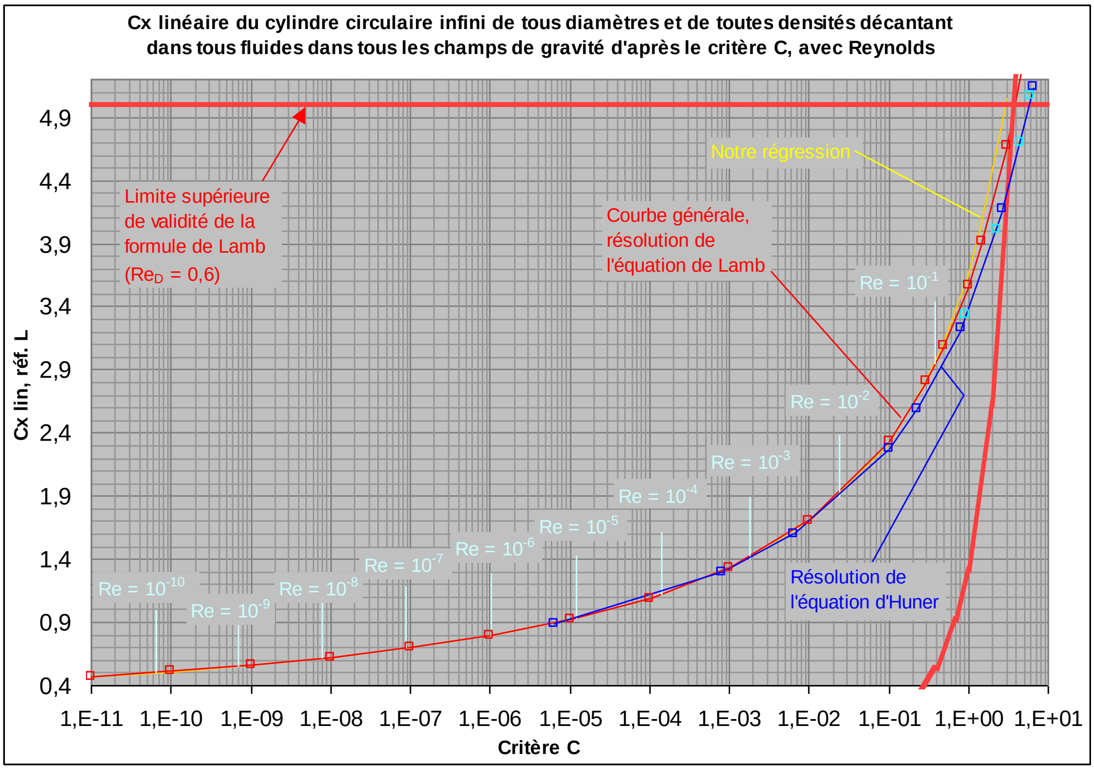
Ceci posé, le dernier graphe n'a pas encore livré tous ses secrets. On peut y faire figurer le C_x linéaire lié au Reynolds maximal admissible par l'équation irrésolue de Lamb (ligne rouge épaisse au C_x linéaire de **5** dans le graphe ci-dessous).

L'autre ligne rouge épaisse matérialise aussi le même Reynolds admissible de **0,6** d'après notre constat que :

$$R_{eD} = \frac{\pi}{4}\frac{C}{C_{xlin}}$$

Cette limite s'écrit alors $C_{xLin} > 1{,}31{*}C$, ce qui trace ce tronçon de droite (représenté par une courbe dans le graphe ci-dessous pour cause d'abscisses logarithmiques).

Nous ne savons à quoi cette limite correspond mais, en tout état de cause nos courbes rouge et jaune sont au-dessus de cette limite



D'autre part, le libellé du Reynolds cité à l'instant permet d'indiquer pour mémoire sur le graphe les Reynolds ronds caractérisant certains points de notre courbe (ou plutôt ici de notre régression jaune). De nouveau, ces Reynolds ronds sont obtenus par usage d'un curseur.

On note que notre régression jaune décroche de la courbe rouge au Reynolds diamétral **0,1**, qui correspond à peu près au critère **C = 0,1**.

Sur ce dernier graphe, nous avons fait dessiner en bleu dense à notre tableur les **C_x** linéaires de cylindres en acier décantant dans une huile de Viscosité Dynamique de **≈ 0,1 P_a*s** telle qu'utilisée par Burke Huner. La résolution par curseur n'utilise plus ici l'équation irrésolue de Lamb mais l'équation d'Huner (également irrésolue pour la décantation) :

$$C_{x\text{Lin Réf.L}} = 4\pi\left[\frac{1}{2{,}002-\mathrm{Ln}(R_{eD})} - \frac{0{,}87}{(2{,}002-\mathrm{Ln}(R_{eD}))^3} + \frac{0{,}514(1-\mathrm{Exp}(-R_{eD}))}{(2{,}002-\mathrm{Ln}(R_{eD}))^4}\right]$$

Comme on le pressent au vu de son architecture, cette équation vise à l'extension du calcul du **C_x** linéaire au-delà de la limite de validité de l'équation de Lamb (**R_{eD} ≈ 0,6** ou moins) dans la zone des Reynolds proches de l'unité qui a fait l'objet des expériences d'Huner.

(nous reviendrons plus bas sur cette équation d'Huner)

On note d'ailleurs sur le graphe que l'équation construite par Huner (en bleu dense) diverge déjà de l'équation de Lamb (en rouge) à partir du Reynolds **0,01**, soit plus tôt que souvent admis.

Sur le même graphe, les marques carrées bleu clair sont nos résolutions de l'équation de Burke Huner pour les quatre diamètres (un peu inférieurs au millimètre) utilisés par lui lors de ses essais de décantation.

Nous pouvons clore ce sujet en soumettant l'idée qu'un tel procédé de résolution soit utilisé pour résoudre les équations (elles aussi irrésolues) donnant les **C**$_x$ linéaires de la palette en décantation transverse et coplanaire…

Traînée du cylindre « assez long » ou bâtonnet en translation transverse :

La troisième édition d'Hydrodynamique Physique de Guyon, Hulin et Petit corrige la valeur que les éditions précédentes avançaient [48]. Adoptant les calculs de Cox (1970, que nous étudierons plus bas), ces trois auteurs donnent pour la Traînée au mètre du cylindre « assez » long (ou bâtonnet) de longueur **L** et de rayon **R** se déplaçant perpendiculairement à son grand axe :

$$\mathbf{F}_{\perp} = \frac{4\pi\mu V}{\mathrm{Ln}(\frac{L}{R}) - (1/2) + \mathrm{Ln}(2)}$$

Un petit problème est que dans la grande majorité des textes, l'élancement (parfois nommé allongement, mais nous préférons nos habitudes aéronautiques) est le quotient **L/D** et non **L/R**.

Commentant les libellés de la Traînée de Cox [49], les trois auteurs écrivent :

« Ces deux valeurs sont bien voisines de la force sur la sphère circonscrite de rayon *L/2* comme pour les autres géométries de corps. C'est une nouvelle manifestation de la grande portée des interactions hydrodynamiques aux petits nombres de Reynolds : il en résulte une faible variation des champs de vitesse d'écoulement à grand distance, ainsi [qu'une faible variation] des forces, en fonction des détails de la forme de l'objet en déplacement. »

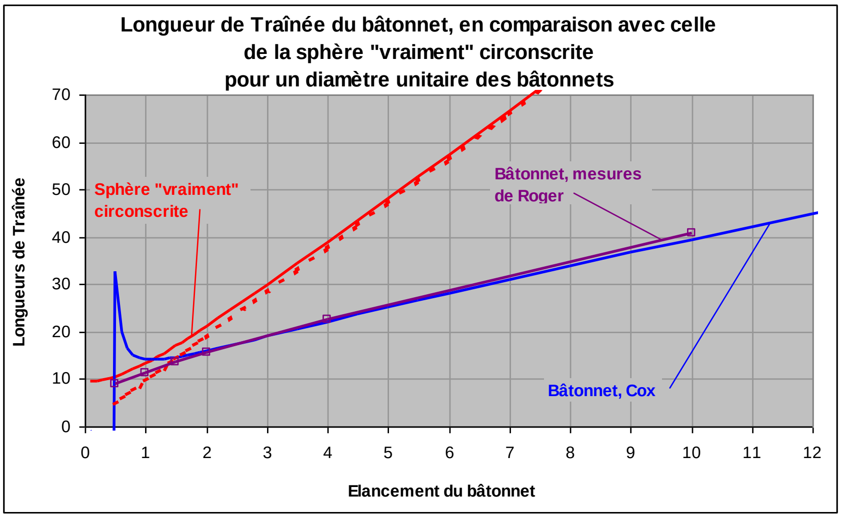
Note sur l'assimilation *historique* de la Traînée des cylindres à celle de la sphère qui leur est circonscrite :

On doit noter cependant, par exemple pour ce qui est de la Traînée des cylindres se déplaçant perpendiculairement à leur axe (quantifiée à l'instant), que leur Traînée n'est que du même ordre que celle de la sphère qui leur est circonscrite, et encore lorsque les élancement sont assez faibles :

Voici en effet la Longueur de Traînée des bâtonnets « assez long » en déplacement transverse (en bleu dense, ci-dessous) ainsi que à la Longueur de Traînée de courts cylindres calculés par Roger (en violet, mesures citées par Ui), ces Longueurs de Traînée étant comparées avec celle de la sphère circonscrite à ces bâtonnets (en trait continu rouge) :

[48] En tous cas l'édition de 1991.

[49] Il y a un libellé pour la Traînée des cylindres en mouvement perpendiculaire à leur axe et un autre libellé pour la Traînée des cylindre en mouvement parallèle à leur axe.



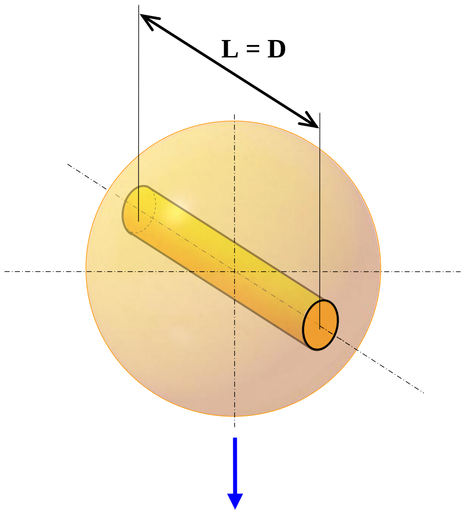
La divagation près de l'origine de la valeur de Cox (en bleu dense) est liée à son libellé mathématique (d'ailleurs uniquement valide pour les forts élancements).

Pour établir ce graphe, il a été posé que le diamètre des cylindres (assez longs ou courts) est **unitaire**.

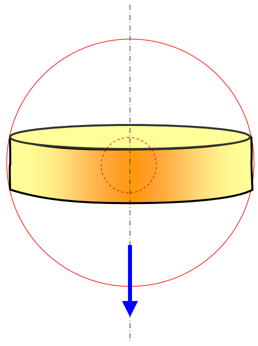
Remarque sur cette décision d'utiliser une longueur unitaire :

Cette prise de décision paraîtra curieuse à l'impétrant. Elle se justifie pourtant aisément si l'on prend conscience qu'en régime de Stokes la dimension caractéristique des corps (diamètre ou longueur, par exemple) n'a pas d'importance, ceci pourvu que l'écoulement reste dans le domaine de Stokes : seul compte l'élancement des corps (c'est ce que nous avons déjà vu et verrons tout au long de ce texte).
Dans la pratique, opter pour un diamètre unitaire pour les cylindres (en unité scientifique cela revient à considérer ce diamètre comme valant **1 mètre**) obligera simplement, en compensation intellectuelle, à imaginer que les déplacements de ces cylindres se produisent dans un fluide beaucoup plus visqueux que les fluides habituels.

Sur le graphe ci-dessus, la droite en trait interrompu rouge représente la Longueur de Traînée des sphères de diamètre valant la longueur des cylindres.



Cependant, comme on peut le remarquer sur le dessin ci-dessous, lorsqu'un cylindre est court, la sphère qui lui mathématiquement circonscrite (en trait continu rouge) est de diamètre beaucoup plus grand que la longueur du cylindre :



(la sphère interne en trait tireté rouge est, par contre, de diamètre égal à la longueur du cylindre)

À l'extrême, le diamètre de la sphère *vraiment* circonscrite au disque d'épaisseur nulle est égale non pas à la longueur de ce disque (qui est nulle) mais à son diamètre.

En conséquence de quoi, sur notre graphe, le diamètre du cylindre étant pris comme unitaire, la Longueur de Traînée à l'élancement nul de la sphère circonscrite est **1*3π = 3π** (courbe rouge en trait plein).
Par contre, à l'élancement nul, la Longueur de Traînée de la sphère de diamètre égal à la longueur du cylindre (qui est nulle) est nulle (prolongation de la droite tiretée rouge).

Comme l'indique notre graphe précédent, où le trait continu rouge représente la Longueur de Traînée de la sphère vraiment (ou mathématiquement) circonscrite au cylindre, les deux sphères s'approchent en diamètre pour les élancements supérieurs à 5.

Sur ce même graphe, il apparaît que la Longueur de Traînée du cylindre (calculé selon l'équation de Cox ou d'après les calculs de Roger) équivaut à celle de la sphère de même longueur que le cylindre autour de l'élancement **L/D = 1,5**.
On doit quand-même admettre que la même Longueur de Traînée du cylindre est du même ordre de grandeur que celle de la sphère vraiment circonscrite pour les faibles élancements (jusqu'à l'élancement **2** ou **4**, selon la précision requise).
Pour des cylindres d'élancement **20**, il y a un facteur trois entre la Traînée de la sphère circonscrite (*vraiment* ou à peu près) et celle du cylindre.

Ceci vaut pour les cylindres mais une étude particulière pour des corps d'autres formes vaudrait d'être faite.

Mais revenons à la Traînée au mètre des bâtonnets :

Nous avons reformulé cette valeur de la Traînée au mètre de Guyon et coll. (selon Cox) sous la forme plus aéronautique et plus courante [50] :

$$\mathbf{F\perp = \frac{4\pi\mu V}{Ln(2\lambda) + 0{,}193}}$$

…λ étant l'élancement **L/D,** supposé assez grand, du cylindre …

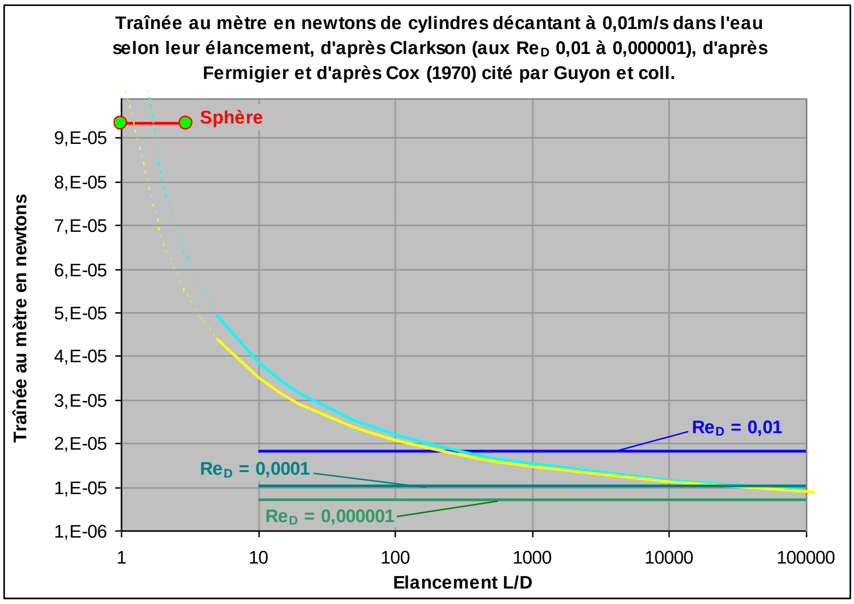
[50] Ce libellé en **Ln(2λ)** est le plus fréquemment rencontré. Nous ne pouvons nous poser en arbitre des élégances et des habitudes, mais un libellé en **Ln(λ)** serait plus logique.

Dans son cours à l'ESPCI (où il succède aux trois auteurs précédents) Marc Fermigier donne une autre valeur à cette même Traînée au mètre du cylindre long, qu'il nomme avec raison *bâtonnet* :

$$\mathbf{F}\perp = \frac{\mathbf{4\pi\mu V}}{\mathbf{Ln(2\lambda)+0,5}}$$ [51]

…**λ** étant l'élancement **L/D,** supposé assez grand, du cylindre …

Sachant que ces deux derniers libellés de la Traînée du cylindre long (celui de Fermigier et celui de Cox) ne dépendent pas du Reynolds, contrairement au libellé tiré de Lamb pour le cylindre « très long », nous avons eu la curiosité de comparer la Traînée des cylindres très long selon Lamb (pour différents Reynolds) à la Traînée de cylindres de différents élancements selon Cox puis Fermigier :



L'horizontale bleue dense est la valeur de Lamb au **Re$_D$ 0,01**, l'horizontale bleu glauque est la valeur du même Lamb pour le **Re$_D$ 0,001** et la verte celle pour **Re$_D$ 0,000001** (toutes trois indépendantes de l'élancement).

En bleu clair est la courbe de Cox et en jaune celle de Fermigier.

On peut constater que l'ensemble des Traînées au mètre sont dans le même ordre de grandeur, que celle de Fermigier est proche de celle de Cox, mais aussi que ces deux dernières courbes croisent les horizontales bleu dense et bleu glauque (la première à un élancement de l'ordre de **200** à **300**), élancement **L/D** où, de fait, on peut prétendre que le bâtonnet est très grand et où l'on peut donc s'en tenir à la valeur de Lamb.

Il est quand-même dommage que les deux courbes bleu clair et jaune ne prennent aucune horizontale comme asymptote (bien qu'on se demande laquelle serait préférable).

Quoique ces deux libellés de la Traînée des bâtonnets ne soient pas valides lorsque ces bâtonnets sont d'élancement trop court, nous avons prolongé *illicitement* les

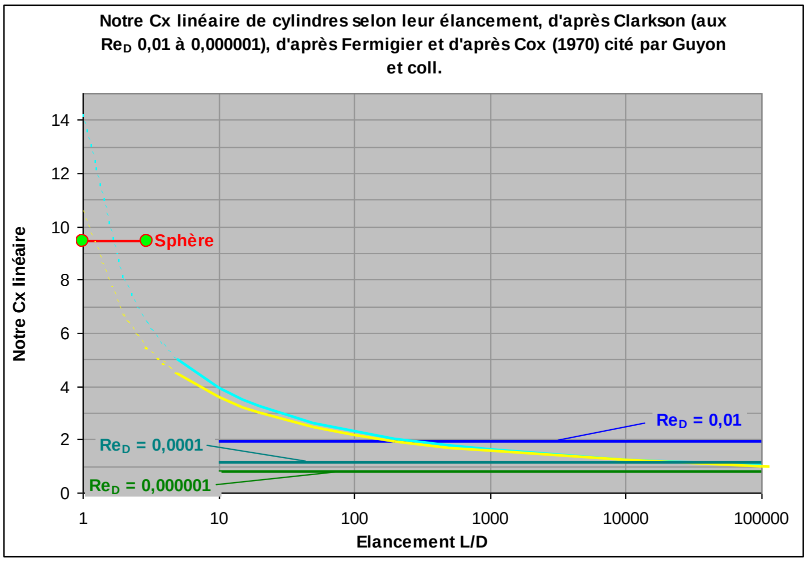
[51] Nous avons ici aussi reformulé cette valeur pour prendre en compte **λ** l'élancement **L/D** et non, comme Fermigier le fait le quotient **L/R**.

deux courbes obtenues avec ces deux libellés vers ces courts élancements (courbes tiretées bleu clair et jaune)

Pour comparaison, nous avons à nouveau porté sur ce graphe la Traînée au mètre de diamètre de la sphère entre les élancements **1** et **3** afin d'effectuer (encore) la comparaison historique entre la sphère circonscrite et le bâtonnet.

Finalement, et quoique les libellés de Cox et de Fermigier donnant la Traînée du cylindre selon son élancement ne soient pas valides pour les petits élancements, ils font assez bonne figure, pour ces petits élancements, auprès du libellé de la sphère.

Comme la Traînée au mètre de tous ces corps (sphère comprise) n'est séparée de notre $\mathbf{C_x}$ linéaire que par un coefficient constant (le produit **µU**), nous pouvons diviser cette Traînée au mètre par **µU** pour obtenir notre $\mathbf{C_x}$ linéaire. On obtient alors ce graphe, évidemment peu différent du précédent :



Il reste cependant le problème logique de relier les courbes du $\mathbf{C_x}$ linéaire des bâtonnets (indépendant du Reynolds diamétral) à celle du cylindre de longueur infinie (ou assimilée) qui elle, dépend du Reynolds diamétral : des hypothèses comme celle que nous avons avancée plus haut pour la palette de longueur finie pourraient être imaginées.

En conclusion, le $\mathbf{C_x}$ linéaire du bâtonnet est soit :

$$\boxed{\mathbf{C_{x\text{Lin L}}} = \frac{\mathbf{4\pi}}{\mathbf{Ln(2\lambda)+0{,}193}}}$$

…qui est le C_x linéaire du bâtonnet en déplacement perpendiculaire à son axe, basé sur la longueur **L** du bâtonnet où λ est l'élancement **L/D**, supposé grand, de ce bâtonnet. **C'est la valeur de Cox…**

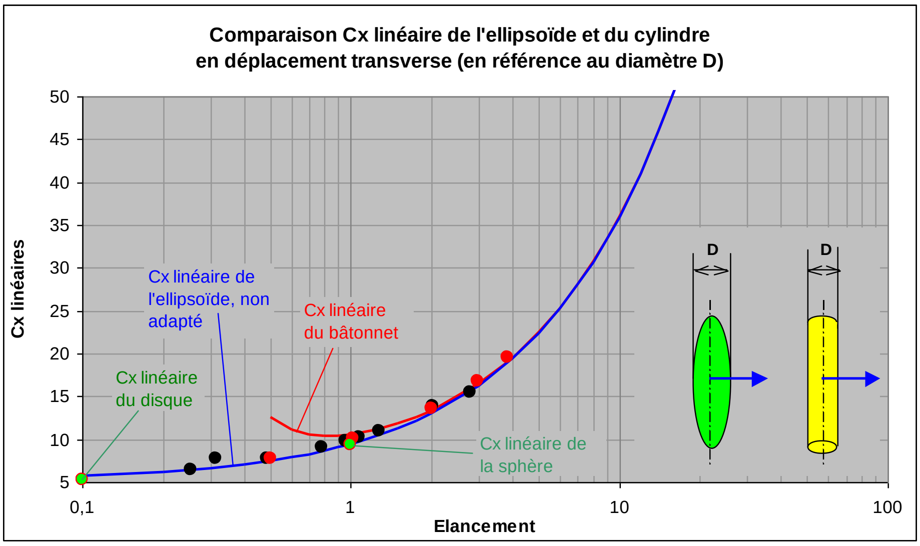
…soit :

$$\boxed{C_{x\mathrm{Lin\,L}} = \frac{4\pi}{\mathrm{Ln}(2\lambda)+0{,}5}}$$

…qui est le C_x linéaire du bâtonnet en déplacement perpendiculaire à son axe, basé sur la longueur **L** du bâtonnet où λ est l'élancement **L/D**, supposé grand, de ce bâtonnet. C'est la valeur proposé par Fermigier.

Nous verrons plus loin que cette valeur avec le reliquat **+0,5** est à présent disqualifiée par les travaux récents (ceux d'Ui, en particulier).

Clift et ses collaborateurs donnent dans leur ouvrage des données expérimentales provenant de deux sources. Nous avons pu en capter les données expérimentales [52]. Nous les présentons ci-dessous avec la courbe donnant le C_x linéaire du bâtonnet en déplacement transverse selon son élancement (en rouge, d'après l'équation comportant le reliquat **0,5** au dénominateur) ainsi qu'avec la courbe représentant la Traînée de l'ellipsoïde en déplacement transverse également selon son élancement (en bleu) :



Ces C_x linéaires sont ici établis en référence au diamètre **D** des corps. Nous avons porté également sur ce graphe les C_x linéaires de la sphère (**3π**) et du disque (**5,33** placé ici à cet élancement non nul de **0,1**).

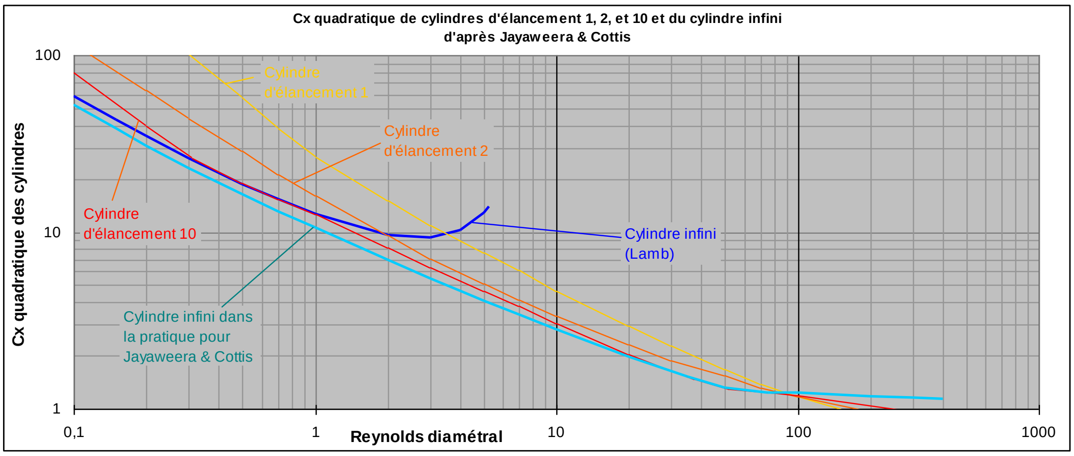
[52] Dans leurs graphes 4.7 et 4.8, ces auteurs utilisent à fins de représentation de la Traînée, le coefficient Δ_{e1} dont la valeur est : **Traînée*$\lambda^{(-⅓)}$ / [3π μVD]**

Il s'avère que la courbe rouge décrivant le bâtonnet respecte assez bien l'échelonnement des marques expérimentales et ceci même à partir de l'élancement **2** (ou moins selon la précision requise).

Comme précisé sur le graphe, la courbe bleue n'est pas adaptée car la théorie voudrait que ses ordonnées soient pondérées par un coefficient **0,874** pour représenter au mieux la Traînée du bâtonnet.

Il semble résulter de ce dernier graphe l'impression que l'on peut utiliser, pour déterminer le **C_x** linéaire des bâtonnets (en référence à leur diamètre) la courbe bleue dévolue par principe à l'ellipsoïde et ceci même pour des élancement inférieurs à **2** et atteignant un élancement nul : il conviendra juste de majorer de **5** ou **10 %**, entre les élancements **0,3** et **2**, le **C_x** linéaire donné par cette courbe bleue.
Ceci étant, nous n'avons pu mettre en accord cette captation des résultats de Clift et coll. avec les données posées ultérieurement par Tsukasa Jeff UI que nous étudierons plus bas [53]. Ce sont ces d'ailleurs ces dernières données (d'Ui) qui nous paraissent les plus dignes de foi (elles sont également présentées d'un façon plus simple de sorte que leur prise en compte est beaucoup moins acrobatique que celles de Clift et coll.).

Autres apports : ceux de Jayaweera et Cottis, relayés par Wang et Wusheng dans leur texte : les mesures des **C_x** quadratiques de trois cylindres d'élancement **1**, **2** et **10** en déplacement transverse.
Ces mesures, du fait de l'orientation du texte, ont été effectuées sur une large plage de Reynolds diamétral (débordant largement le régime de Stokes) :



(remarquer le curieux point quadruple un peu avant le Reynolds **100**)

En plus de ces **C_x** quadratiques figure également le **C_x** quadratique du cylindre de longueur infinie tel qu'admis, selon Wang et Wusheng par de nombreux auteurs (en bleu clair).
Nous avons-nous même porté sur ce graphe, en bleu dense, le **C_x** quadratique du cylindre infini établi mathématiquement par Lamb :

53 Il s'en faut de **14** à **12 %** entre les élancements **1,5** et **15**. L'ouvrage de Clift, Grace et Weber en notre possession date de 1978 alors que le texte d'Ui date de 1984.

$$C_{xQuad} = \frac{8\pi}{Re_D Ln(7,4/Re_D)}$$

…C_x quadratique (en référence à la surface frontale **DL**) qui, pour les faibles Reynolds diffère quelque peu de la courbe bleu clair [54].

Nous avons transformé ces C_x quadratiques en C_x linéaires.
À titre de révision, voici comment nous nous y sommes pris :

Rappel de la façon de transformer des C_x quadratiques en C_x linéaires :

Nous avons exprimé la Traînée des corps :

$$F = \tfrac{1}{2}\,\rho V^2\, C_{xQuad}\, DL$$

…où **D** et **L** sont le diamètre et la longueur du cylindre de longueur infinie.

Nous avons ensuite calculé notre C_x linéaire en référence **L**, selon sa définition, à savoir :

$$C_{x\text{Lin L}} = \frac{F}{\mu VL}$$

Cela donne :

$$C_{x\text{Lin L}} = \frac{F}{\mu VL} = \frac{\frac{1}{2}\rho V^2 C_{xQuad}\ DL}{\mu VL}$$

S'imposent alors des simplifications et il reste :

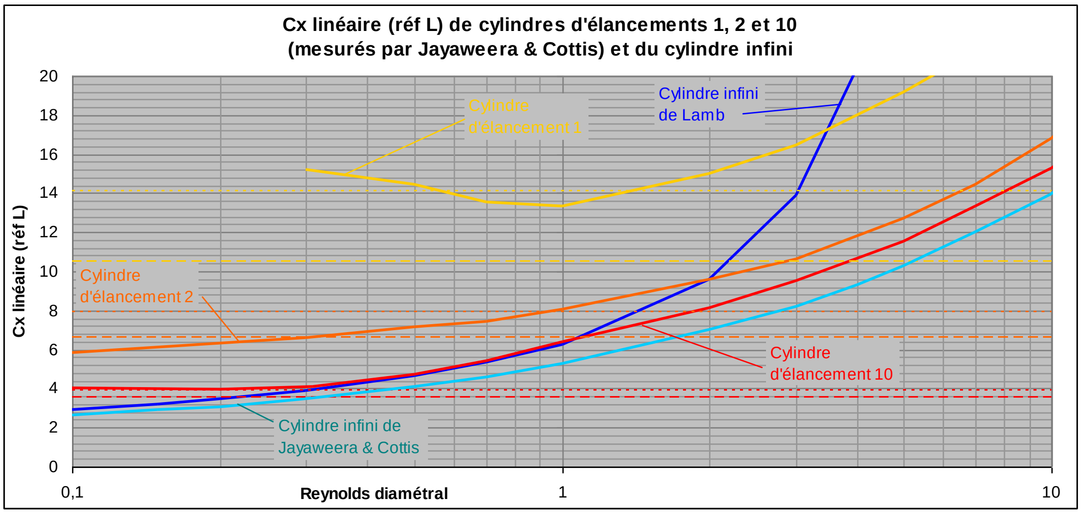
$$C_{x\text{Lin L}} = \frac{\frac{1}{2}\rho VD\ C_{xQuad}}{\mu}$$

Il suffit alors de reconnaître en $\rho VD/\mu$ le Nombre de Reynolds diamétral R_{eD} du cylindre (puisque $\rho/\mu = 1/\nu$) pour écrire :

$$C_{x\text{Lin L}} = \tfrac{1}{2}\, C_{xQuad}\, R_{eD}$$

Voilà les courbes de C_x linéaires auxquelles ces transformations ont abouti :

[54] Nous ne voulons pas parler de la remontée de la courbe bleu dense au-dessus du Reynolds unitaire (puisque cette remontée est due au libellé même du C_x quadratique de Lamb).



Sur ce dernier graphe, nous avons porté, dans chaque couleur, les deux équations donnant le $\mathbf{C_x}$ linéaire des bâtonnets (en référence à leur longueur), à savoir :

$$\mathbf{C_{xLin\,L}} = \frac{\mathbf{4\pi}}{\mathbf{Ln(2\lambda) + 0{,}193}} \text{ (horizontale pointillée)}$$

et :

$$\mathbf{C_{x}}_{\mathrm{Lin\,L}} = \frac{\mathbf{4\pi}}{\mathbf{Ln(2\lambda) + 0{,}5}} \text{ (horizontale tiretée)}$$

Pour les Reynolds inférieurs à l'unité, ces deux équations représentent assez bien le $\mathbf{C_x}$ linéaire des bâtonnets d'élancement **10** (en rouge), mais moins bien celui du bâtonnet d'élancement **2** (en orange) élancement très court pour lequel elles ne sont pas prévues.

Quant à la courbe jaune qui relate l'évolution du $\mathbf{C_x}$ linéaire du bâtonnet d'élancement **1** elle apparaît comme probablement fautive pour les marques en-dessous du Reynolds unitaire, surtout en comparaison avec notre graphe qui exploitait les citations faites par Clift, Grace et Weber à propos de ces mêmes bâtonnets.

Ce crochet vers le haut de la courbe jaune aux bas Reynolds n'était pas criant sur le graphe d'origine de Jayaweera et Cottis, sans nul doute parce qu'il présentait les résultats expérimentaux sous forme de $\mathbf{C_x}$ quadratiques et, de plus, avec des ordonnées logarithmiques.

La mise en lumière dudit crochet peut donc être porté au crédit du $\mathbf{C_x}$ linéaire dont nous faisons ici la promotion.

Translation du bâtonnet (ou cylindre circulaire *assez long*) parallèlement à son grand axe :

Pour une translation du bâtonnet parallèlement à son axe, Guyon, Hulin et Petit, dans leur troisième édition d'Hydrodynamique Physique reprennent la valeur de Cox (1970) :

$$F_{//} = \frac{2\pi\mu V}{Ln(2\lambda) - (3/2) + Ln(2)}$$

Les trois auteurs notent que, spécialement pour les grands élancements **L/D**, cette Traînée atteint une valeur moitié de celle créée par la translation normale à son axe.

Marc Fermigier, leur successeur à l'ESPCI, adopte une autre valeur :

$$F_{//} = \frac{2\pi\mu V}{Ln(2\lambda) - (0{,}5)}$$

…qui, de même, tend vers la moitié de la Traînée du cylindre exposé frontalement à l'écoulement, spécialement pour les grands élancements **λ= L/D**.
Le reliquat **0,5** figurant au dénominateur semble être celui prôné par Burgers pour les ellipsoïdes. [55]

Il en résulte les deux valeurs possibles du C_x linéaire de ces bâtonnets se déplaçant **parallèlement à leur grand axe** : la valeur de Cox :

$$\boxed{C_{xLin\ L} = \frac{2\pi}{Ln(2\lambda) - 0{,}807}}$$

et :

$$\boxed{C_{xLin\ L} = \frac{2\pi}{Ln(2\lambda) - 0{,}5}}$$

…C_x linéaires basés sur la longueur **L** du bâtonnet, où **λ** est l'élancement **L/D** du cylindre, supposé assez grand et où **λ** est l'élancement **L/D** du bâtonnet [56].
Nous verrons plus loin, lors de notre exploitation des travaux d'Ui, que ce dernier libellé (avec un reliquat **-0,5**) peut être disqualifié.

Il est d'ailleurs important de constater que ce dernier C_x linéaires possède la même écriture que celui de l' aiguille ellipsoïdale se déplaçant parallèlement à son axe. En effet, le C_x linéaire de cette aiguille se déplaçant axialement s'écrit :

$$C_{xLin\ d} = \frac{2\pi\lambda}{Ln[2\lambda] - 0{,}5}$$

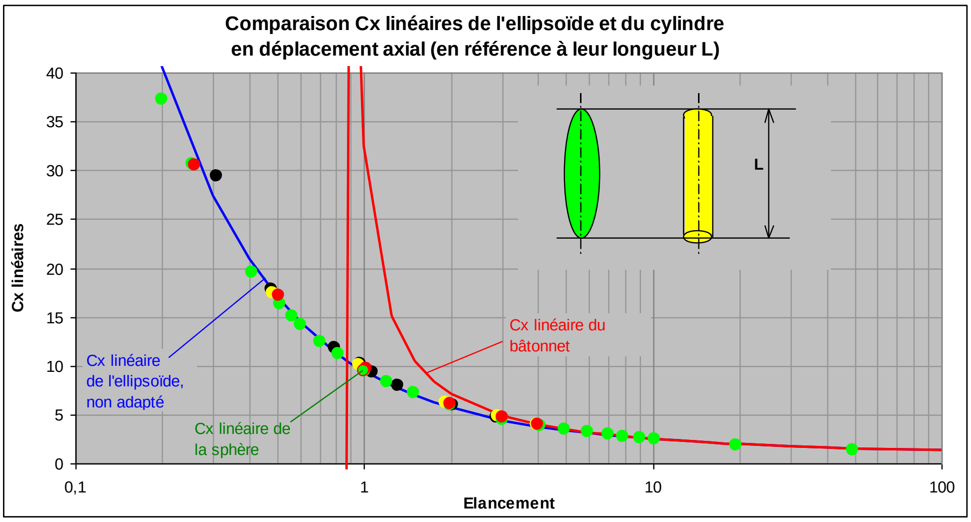
---

[55] Le même Burgers opte cependant, s'agissant des bâtonnets, pour un reliquat de **0,7** …
[56] Clift, Grace et Weber donnent, p 82, l'historique de ces valeurs des deux Traînées du bâtonnet…

Cependant il est établi en référence au petit diamètre **d = 2a** de l'aiguille ! Un changement de longueur de référence [57] (depuis le diamètre **d = 2a** jusqu'à la longueur **L**) fait disparaître l'élancement **L/d = λ** : le libellé devient alors identique au deuxième encadré ci-dessus.

Clift et coll. ont bien-sûr noté cette similitudes entre la Traînée des ellipsoïdes d'allongement assez fort (ou aiguilles) et la Traînée des bâtonnets.

La représentation des C_x linéaires de ces deux types de corps (ellipsoïdes et bâtonnets) est d'ailleurs plus parlante encore (ces C_x linéaires étant ici établis en référence à leur longueur **L** et non à leur diamètre) :



Sur ce graphe, sont reportés les valeurs expérimentales des C_x linéaires de cylindres de différents élancements citées par Clift et coll. (d'après quatre sources [58]) : On remarque que, s'agissant des déplacements axiaux (ou polaires), les équations de l'ellipsoïdes fonctionnent très biens (sans aucune adaptation [59]). Par contre l'équation du bâtonnet ne fonctionne que pour les élancements supérieurs à **3** ou **4**, ce qui n'est pas si mal.

On remarque la divagation de la courbe rouge autour de l'abscisse ½ **Exp(0,5) = 0,824** (l'équation utilisée ici pour le bâtonnet étant $\mathbf{C_{xLin\ L} = 2\pi / [Ln(2\ \lambda) - 0,5]}$.

Comme on peut le voir, ces résultats expérimentaux accordent au cylindre d'élancement unitaire le même C_x linéaire que la sphère. Ce n'est pas ce que trouve Ui (qui, s'appuyant sur des travaux convainquant, retient un C_x linéaire nettement plus fort que les **3π** de la sphère). Nous étudierons ses travaux plus loin.

---

[57] La méthode pour changer de longueur de référence est analogue à celle pratiquée pour le changement de la surface de référence du C_x quadratique. Partant d'un C_x linéaire référencé à la longueur **a**, on le multiplie par **a** puis on le divise par la nouvelle longueur de référence, par exemple **b**. On peut démontrer la validité de cette méthode à partir de l'expression de la Traînée $\mathbf{F = C_{xLin\ a}\ \mu V a}$.

[58] Clift et coll. ne donnent pas nos C_x linéaires mais nous les avons déterminés d'après leur graphe comme expliqué plus haut.

[59] La théorie indique que les ordonnées de la courbe représentant les ellipsoïdes devraient être multipliées par **0,874**, mais la courbe est plus seyante sans cette adaptation.

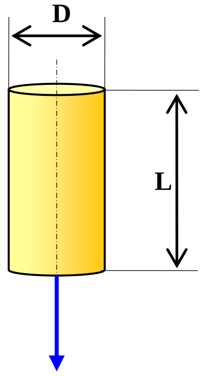
Les chercheurs Bowen et Masliyah, cités par Clift et coll., ont proposé une *série tronquée* qui permet de pronostiquer la Traînée de corps de révolution ou axisymétriques en déplacement axial (c.-à-d. parallèlement à leur axe de révolution ou de symétrie).

Ils ont calé leur équation sur leurs résultats expérimentaux mettant en jeu des corps aussi divers que parallélépipèdes rectangles, cylindre courts, cônes ou double-cônes, etc.

Ils écrivent :

« [Notre série tronquée] conduit à une estimation raisonnablement précise (± 5 %) pour la résistance de Stokes de corps tels que cylindres et cônes pour lesquels la recherche de solutions analytiques est excessivement malaisée. » [60]

Leur méthode est basée sur l'utilisation d'une sphère de même périmètre à que le périmètre du corps considéré, ledit périmètre, s'agissant de corps en mouvement axial, étant mesuré dans une vue normale à l'axe principal (et axe du déplacement) :



Pour ce cylindre en déplacement axial, par exemple, le périmètre pris en compte est évidemment **2 (D+L)**.

C'est ce périmètre qu'arborera la sphère de périmètre équivalent, c.-à-d. que le diamètre de cette sphère sera **2 (D+L) /π**.

Bowen et Masliyah en tirent, en appliquant la méthode des moindres carrés sur leur collecte de résultats expérimentaux, un critère **Σ** qui vaut :

$$\Sigma = \frac{\textbf{Aire de la particule}}{\textbf{Aire de la sphère de périmètre équivalen}}$$

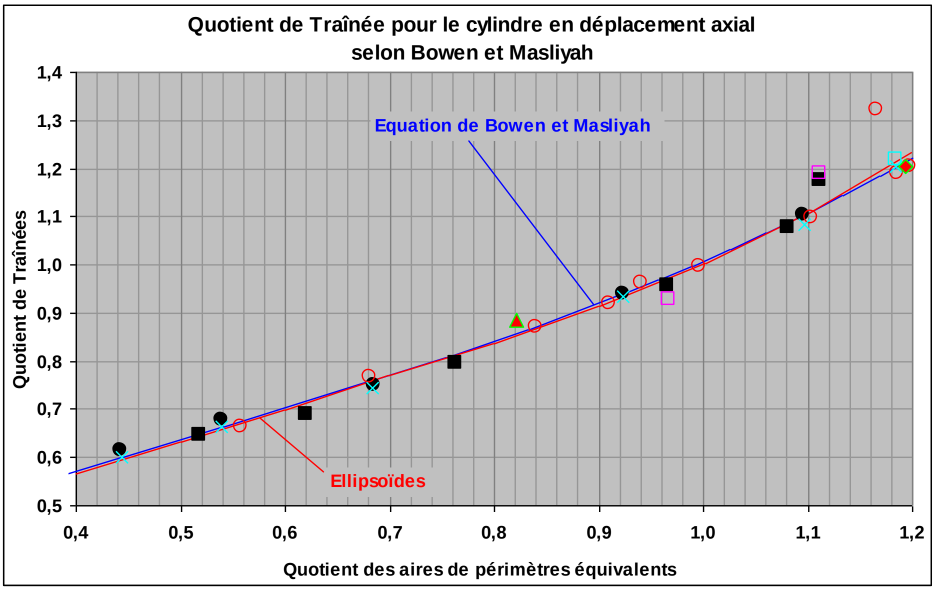
D'après eux, le quotient entre la Traînée de ladite particule et la Traînée de la sphère de périmètre équivalent, obtenu à partir de la série tronquée suivante :

Quotient de Traînée = 0,244 + 1,035 Σ –0,712 Σ^2 + 0,441 Σ^3

…correlle correctement les données expérimentales.

[60] "An approximate solution to the equation of motion governing Stokes flow past a number of isolated closed bodies of revolution is obtained by the least squares fitting of a truncated series expression for the stream function to known boundary conditions. The solution yields a reasonably accurate (±5%) estimate for the Stokes resistance on body shapes, such as cylinders and cones, for which analytic solutions are exceedingly difficult."

Clift et coll. ont testé cette corrélation (en bleu dense ci-dessous) avec les données expérimentales d'autres chercheurs que Bowen et Masliyah (autres chercheurs dont les marques ont été captées par nous) :



En rouge est la représentation du même quotient de Traînée pour les ellipsoïdes (à partir du même coefficient **Σ** calculé pour ces corps).

Sur ce graphe, les marques carrées représentent des données expérimentales concernant des parallélépipèdes rectangles, les marques rondes des données expérimentales relatives à des cylindres, le triangle rouge ceint de vert (au centre) un calcul sur un cône d'angle au sommet **60°** et le losange de mêmes couleurs (à l'extrême droite) une mesure des caractéristiques d'un double cône d'angles aux sommets voisin de **150°** (ces deux angles d'après nos investigations).

Les croix bleu clair sont des calculs portant sur des bâtonnets cylindriques.

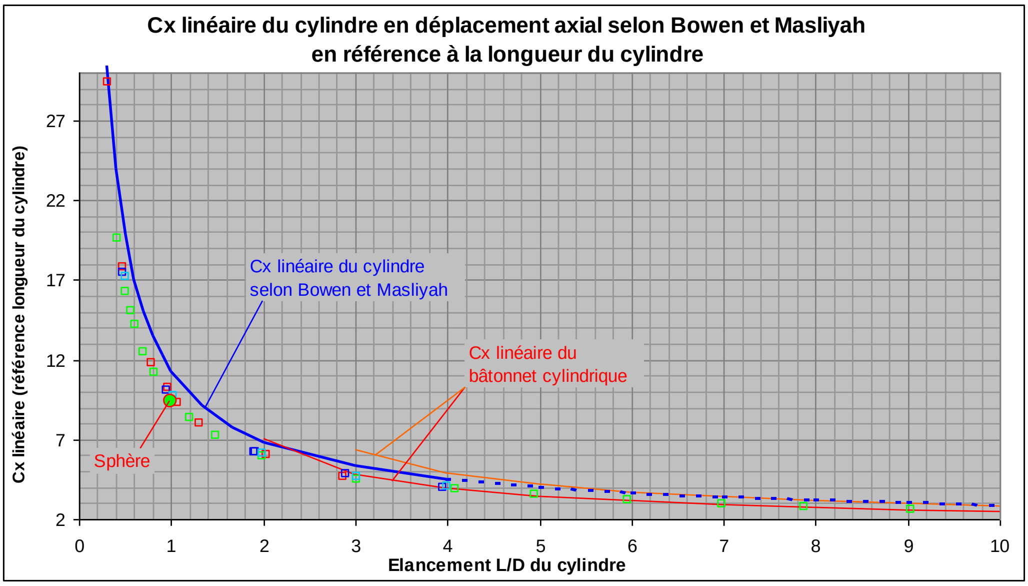
La plage d'abscisses du graphe ci-dessus correspond, pour des cylindres, à une plage d'élancements allant de **0,2** (à droite) à **5** (à gauche).

Redisons que Bowen et Masliyah ont eux-mêmes calé leur courbe bleue sur leur propre collecte de marques expérimentales…

Si Clift et coll. doutent, p. 80 de leur ouvrage, de la précision de cette courbe bleue dans une application pour les cylindres ou bâtonnets cylindriques, ils étendent cependant son domaine d'application en écrivant :

« Pour des formes de corps à propos desquels des données expérimentales sont inexistante, [la série tronquée de Bowen et Masliyah] donne la meilleures estimations de résistance au déplacement axial. »

Nous avons représenté ci-dessous en bleu dense l'équation en **Σ** de Bowen et Masliyah pour lui faire dire directement le Coefficient linéaire des corps :



Les marques visibles sur ce graphe ne sont plus les marques du graphe précédent, mais les marques captées précédemment sur la figure 4.7 de Clift et coll. consacrée à des cylindres assez courts ou assez longs en déplacement axial.

Il est notable que ces marques, ainsi que celle de la sphère (**3π**) se retrouvent **≈ 20 %** plus bas que la courbe bleue de Bowen et coll. (qui était précédemment en bonne entente avec les marques expérimentales ou calculées), ce que nous n'expliquons pas.

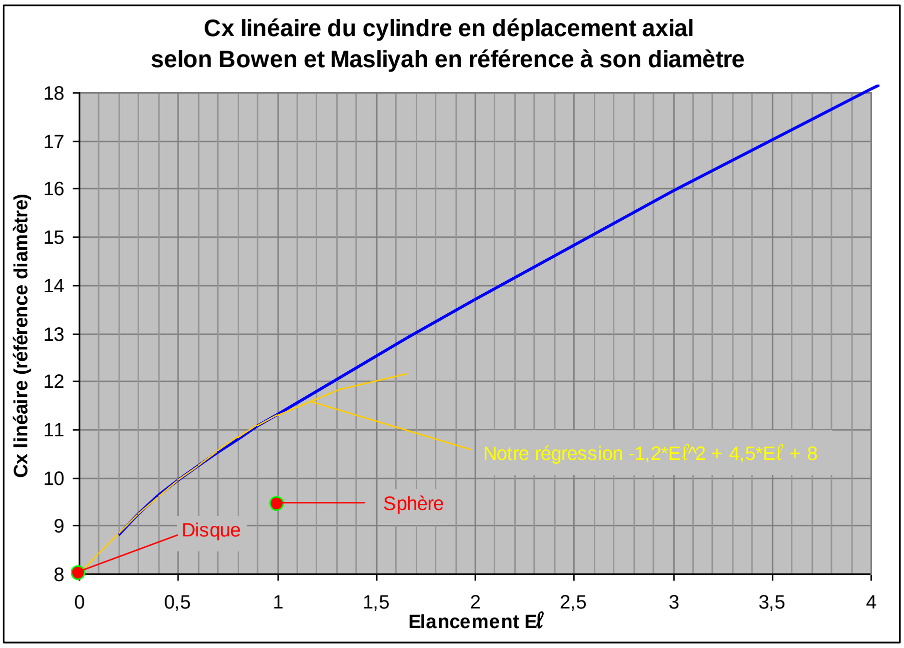
Sur ce même dernier graphe, nous avons également représenté en rouge et orange les deux équations donnant le $\mathbf{C_x}$ linéaire des bâtonnets assez longs déjà étudiées, à savoir :

$$\mathbf{C_{x\text{Lin L}}} = \frac{\mathbf{2\pi}}{\mathbf{Ln(2\lambda) - 0{,}807}} \quad \text{et} \quad \mathbf{C_{x\text{Lin L}}} = \frac{\mathbf{2\pi}}{\mathbf{Ln(2\lambda) - 0{,}5}}$$

…$\mathbf{C_x}$ linéaire établi en référence à leur longueur **L**.

Il est patent que ces équations voisinent assez bien avec la courbe bleu dense…

Cette courbe bleu dense peut être convertie facilement pour représenter le $\mathbf{C_x}$ linéaire du cylindre court en référence à son diamètre, selon son élancement :



Cette courbe *vise* à peu près correctement le C_x linéaire du disque (**8**, placé par nous à l'élancement nul).

La régression jaune, dont l'équation figure sur le graphe, semble permettre le calcul de ce C_x linéaire du cylindre court pour les élancements plus courts que l'unité ; comme sa forme le démontre, elle passe par le C_x linéaire du disque, ce qui est satisfaisant.

Les travaux convaincants de Tsukasa Jeff UI, Roger, Heiss & Coull etc. sur la Traînée des bâtonnets :

Vers la fin de la rédaction du présent texte, rédaction durant laquelle nous avions toujours été confronté avec les quatre valeurs historiques de la Traînée des cylindre s assez courts (deux valeurs historiques pour les déplacement axiaux et deux pour les déplacement transverses) nous sommes tombé sur la thèse de Tsukasa Jeff UI.

Disons-le tout net : cette thèse datant de 1984 nous semble faire justice du problème de la Traînée des cylindres :

Traînée des cylindres courts en déplacement axiaux :

Ui s'est appuyé sur ses propres mesures en cuve à décantation pour corroborer les valeurs d'autres chercheurs.

Il donne par exemple un tableau de la Traînée des cylindres d'élancement **0** à **10**

TABLE I

VALUES OF THE DIMENSIONLESS DRAG FOR CYLINDERS IN AXIAL MOTION

L/D	F_d = drag/8μUD				
	Roger[25]	Youngren and Acrivos[17]	Gluckman et al[18]	Swanson et al[19]	Heiss and Coull[23]
0.00	1.0000				
0.25	1.1081				
0.50	1.2109	1.226	1.220	1.223	1.239
0.75	1.3076				
1.00	1.3994	1.414	1.405	1.409	1.408
1.50	1.5699				
2.00	1.7279	1.739	1.723	1.736	1.743
4.00	2.2881	2.297	2.270	2.294	2.304
10.00	3.6789	3.687			

Comme l'indique l'égalité entourée de rouge par nous, toutes ces valeurs représentent la Traînée des cylindres adimensionnalisée par **8µUD**, quantité où l'on reconnaît, à un coefficient **8** près, la Traînée du disque en déplacement perpendiculaire à son plan (**µ** étant la viscosité dynamique, **U** la vitesse de décantation des cylindres et **D** leur diamètre).

La Traînée réduite F_d d'Ui est donc, à ce coefficient **8** près, un **C_x** linéaire.

Il est alors très facile d'en tirer un tableau des **C_x** linéaires (par simple multiplication des Traînées adimensionnalisées par le facteur **8**) :

Cx linéaire des cylindres en déplacement axial (réf. diamètre)
dép. axiaux

Élancement	Roger	Youngren & Acrivos	Gluckman et coll.	Swanson et coll.	Heiss & Coull
0	8				
0,25	8,8648				
0,5	9,6872	9,808	9,76	9,784	9,912
0,75	10,4608				
1	11,1952	11,312	11,24	11,272	11,264
1,5	12,5592				
2	13,8232	13,912	13,784	13,888	13,944
4	18,3048	18,376	18,16	18,352	18,432
10	29,4312	29,496			

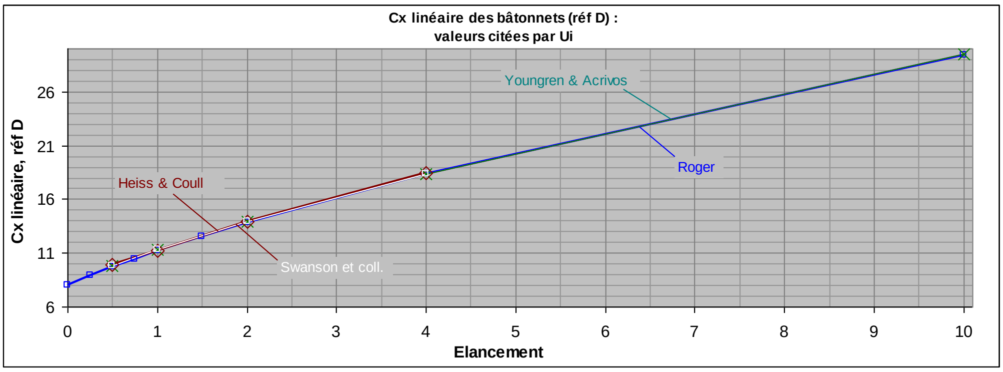
Comme on le voit, beaucoup de ces valeurs, sur la même ligne, sont très proches.

Les valeurs de Roger sont des calculations par ordinateurs (selon la méthode des *Perles tressées* que nous présenterons plus loin) directement communiquées à Ui par R. P. Roger qui fut son mentor.

Les valeurs de Youngren et Acrivos, Gluckman et coll. ainsi que celles de Swanson et coll. sont aussi calculées (par des voies très différentes).

Dans ce tableau seules les valeurs de Heiss et Coull sont des valeurs mesurées en cuve à décantation. Les mesures d'Ui lui-même, décrites très précisément dans son texte, corroborent ces mesures de Heiss et Coull [61].

Voici le graphe que l'on peut tirer de ces valeurs quasi-unanimes :



Il est notable que l'évolution du C_x linéaire en référence diamétrale évolue presque linéairement par rapport à l'élancement ; entre les élancement **0** et **1**, on pourrait ainsi admettre, à titre de simplification, comme C_x linéaire (référence D) :

$$C_{xLin\ Réf.D} = 3{,}1944\ \lambda + 8{,}044$$

…avec λ l'élancement [62].

Plus précis, Ui tire de tous ces chiffres les régressions suivantes :

<u>Pour **0** < λ < **1** :</u>

$$C_{xLin\ Réf.D} = 8 + 3{,}496\ \lambda - 0{,}5992\ \lambda^3 + 0{,}4984\ \lambda^5 - 0{,}2\ \lambda^7$$ [63]

…libellé qui, on le voit, est très proche de :

$$C_{xLin\ Réf.D} = 8 + 3{,}5\ \lambda - 0{,}6\ \lambda^3 + 0{,}5\ \lambda^5 - 0{,}2\ \lambda^7$$

<u>Pour **1** < λ < **4** :</u>

$$C_{xLin\ Réf.D} = 8{,}2208 + 3{,}1704\ \lambda - 0{,}2072\ \lambda^2 + 0{,}0112\ \lambda^3$$ [64]

Il peut être utile de noter que ce libellé ne commet pas de grosses erreurs jusqu'à l'élancement **10** (où l'erreur atteint **– 3,2 %** en comparaison avec le libellé suivant).

[61] La description de ses mesures par Ui donne une bonne idée de la complexité de telles mesures…
[62] Comme on le lit, cette régression linéaire ne passe pas par **8**, la valeur du disque.
[63] Pour les élancement inférieurs à **0,019**, Ui donne aussi : $C_{xLin\ Réf.D} = 8 + 3{,}496\ \lambda$.
[64] Attention au fait qu'Ui a porté le deuxième λ de cette équation à la puissance 5, erreur que nous avons rectifiée ici (ce qui a aussi été fait par Webhbeh).

<u>Pour **4** < **λ** < **75**</u> (attention au fait que le C_x linéaire est à présent exprimé en référence à la longueur du cylindre) :

$$\mathbf{C_{xLin\ Réf.L} = 2\pi\ [0{,}0244 + 0{,}5504\ \varepsilon + 3{,}328\ \varepsilon^2 - 2{,}971\ \varepsilon^3]}$$

avec $\boldsymbol{\varepsilon = 1/\mathrm{Ln}(2\lambda)}$

…ce qui peut être simplifié en :

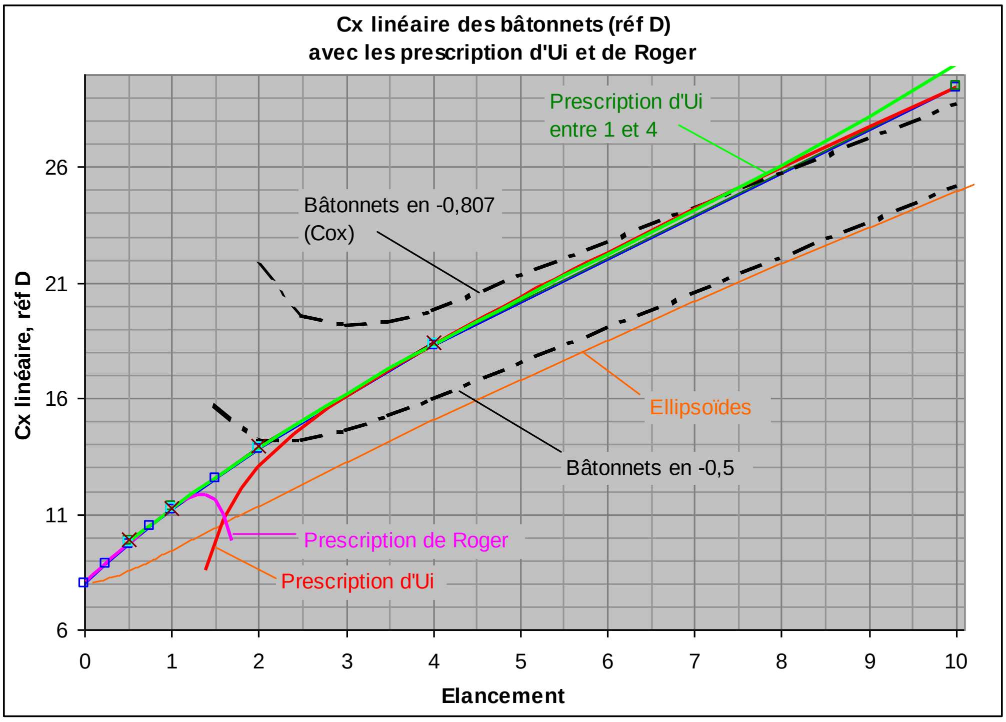
$$\mathbf{C_{xLin\ Réf.L} = 0{,}15331 + 3{,}4583/\mathrm{Ln}(2\ \lambda) + 20{,}91/\mathrm{Ln}(2\ \lambda)^2 - 18{,}667/\mathrm{Ln}(2\ \lambda)^3}$$

<u>Et pour **λ > 75**</u>

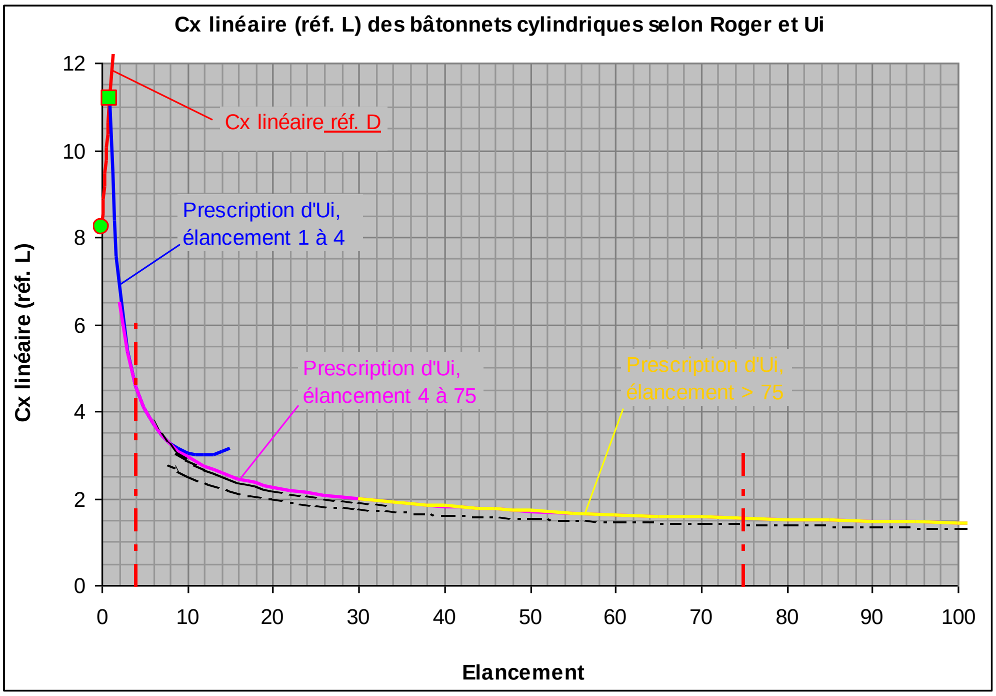
$$\mathbf{C_{xLin\ Réf.L} = \frac{\varepsilon}{0{,}159155 - 0{,}128415\varepsilon - 0{,}028255\varepsilon^2} + 25{,}1327\varepsilon^5 + 175{,}929\varepsilon^6}$$

…avec toujours $\boldsymbol{\varepsilon = 1/\mathrm{Ln}(2\lambda)}$

Ces différentes prescriptions d'Ui pour les déplacement axiaux, dont nous avons simplifié l'écriture, dessinent les courbes suivantes, d'abord en référence diamètre pour les élancement faibles à moyens :

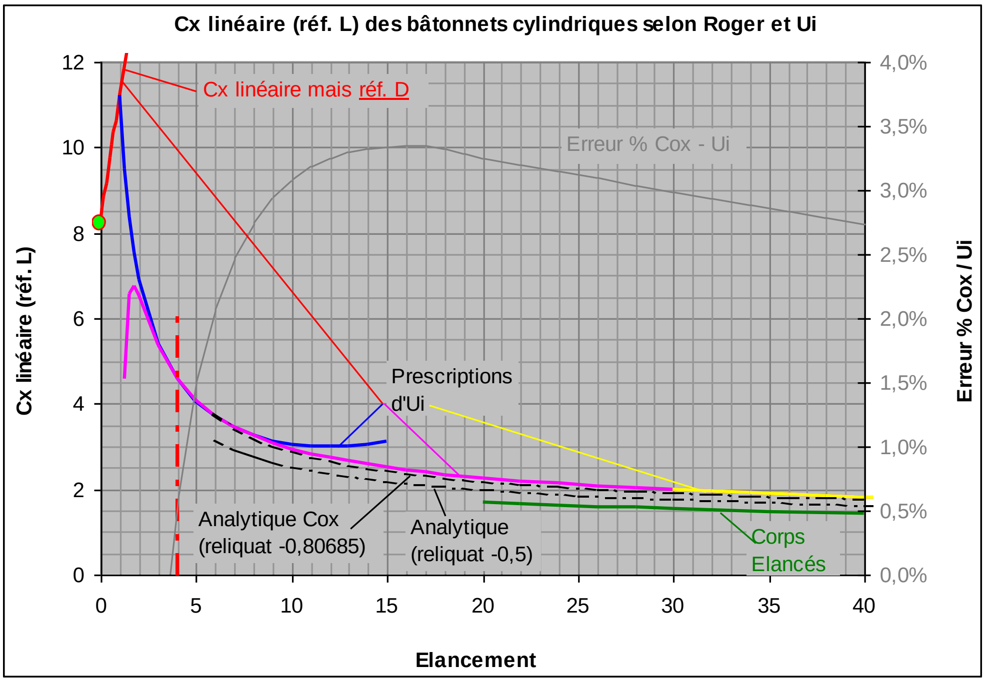


…puis, en référence longueur pour les élancements faibles à forts (courbes fuchsia et jaune) :



Le C_x linéaire en référence longueur des corps proches du disque n'ayant guère de signification, nous avons porté sur ce dernier graphe, en rouge, la courbe du C_x linéaire en référence diamétrale pour les faibles élancements.

Les deux verticales en traits d'axes rouge représentent les limites annoncées des différents libellés ; on note que ces libellé se chevauchent sur certaines plages d'élancements ; le libellé consacré aux élancements supérieurs à **75** (en jaune ci-dessus et ci-dessous) apparait comme encore valide à l'élancement **30** :



Sur le graphe ci-dessus, réservé aux élancements usuels, nous avons mieux fait apparaître les libellés classiques (en traits d'axe noirs) :

→ celui de Cox avec reliquat **–0,80685**
→ et le classique avec reliquat **–0,5** qui s'avère ici disqualifié.

Le libellé de Cox, ainsi que l'indique notre tracé gris (à lire sur l'axe de droite) ne commet qu'une erreur de l'ordre de **3 %** par rapport à la prescription d'Ui pour les élancement de **4** à **75** (courbe jaune) et un peu moins pour les élancements supérieurs à **75**.

Il faut encore ajouter à ce tableau des C_x linéaires des cylindres en déplacementx axiaux le libellé que dégage la Théorie des Corps Élancés (que nous avons représentée en vert sur le dernier graphe) :

$$\mathbf{C_{xLin\ Réf.L\ (CorpsÉlancés)} \approx \frac{2\pi}{Ln(2\lambda)}}$$

Ce libellé apparaît comme trop faible, par rapport aux prescriptions d'Ui et au calcul de Cox.

Traînée des cylindres courts en déplacement transverse :

Dans sa thèse, Ui donne également ce tableau des Traînées de cylindres de divers élancements, Trainées adimensionnalisées par quotient avec la Traînée du disque en déplacement dans son plan, à savoir : **(16/3)µUD** :

TABLE X

Values of the Dimensionless Drag
For Short Cylinders in Transverse Motion

DRAG/(16µUD/3)

L/D	Roger	Swanson et al.	Heiss and Coull
0.00	1.0001		
0.50	1.6606	1.663	1.671
1.00	2.1243	2.126	2.141
1.50	2.5319		
2.00	2.9094	2.908	2.903
4.00	4.2518	4.239	4.236
10.00	7.6240		

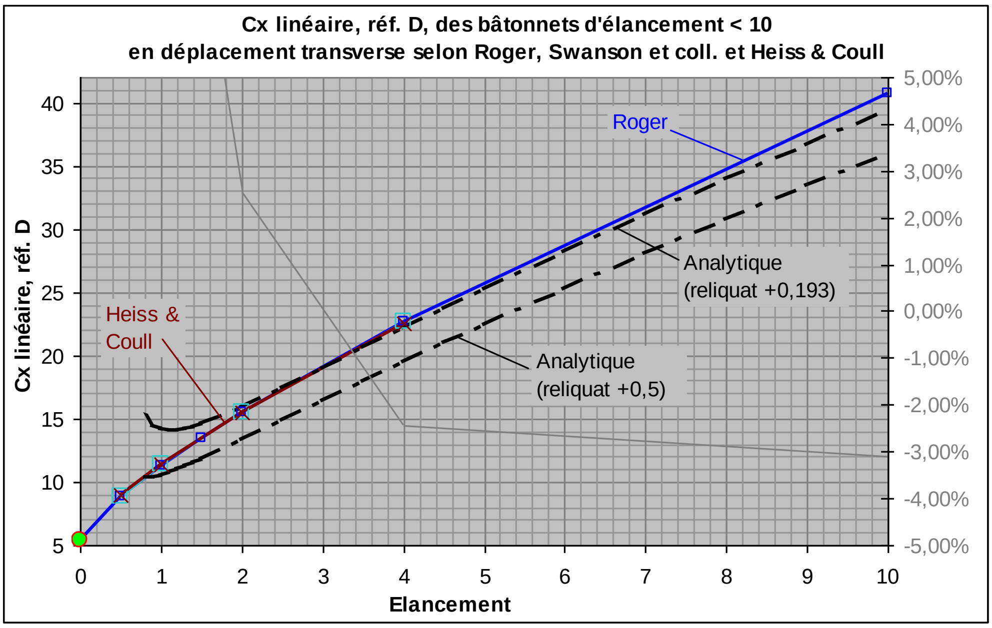
Ces valeurs sont encore, au coefficient **16/3** près, des $\mathbf{C_x}$ linéaires. Il est donc aisé d'en tirer le vrai $\mathbf{C_x}$ linéaire de ces cylindres en référence à leur diamètre :

Cx linéaire des cylindres en déplacement transverse (réf. diamètre)

Élancement	Roger	Swanson et coll.	Heiss & Coull
0	5,33		
0,5	8,86	8,87	8,91
1	11,33	11,34	11,42
1,5	13,50		
2	15,52	15,51	15,48

4	22,68	22,61	22,59
10	40,66		

Ces valeurs, tantôt calculées mathématiquement, tantôt mesurées (pour celles de Heiss & Coull) dessinent le graphe suivant :



Sur le même graphe nous avons fait apparaître deux libellés analytiques du $\mathbf{C_x}$ linéaire du cylindre *assez long* (en référence diamétrale) :

$$\mathbf{C_{xLin\ Réf.D}} = \frac{\mathbf{4\pi}}{\mathbf{Ln(2\lambda)+0{,}193}}$$

et :

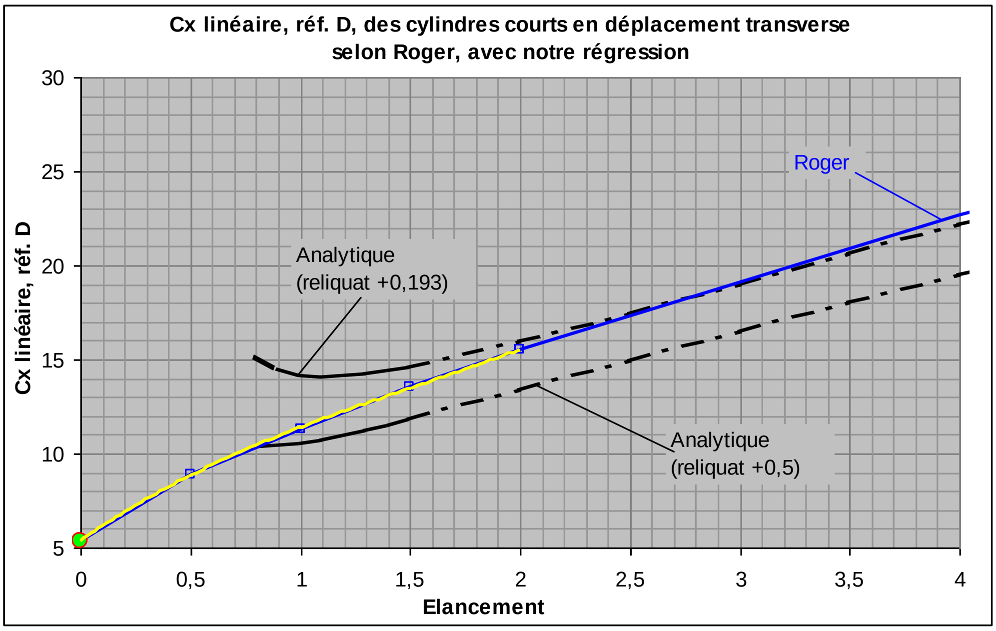
$$\mathbf{C_{xLin\ Réf.D}} = \frac{\mathbf{4\pi}}{\mathbf{Ln(2\lambda)+0{,}5}}$$

Encore une fois, le libellé avec reliquat **+ 0,5**, qui est réputé convenir aux aiguilles ellipsoïdales, est disqualifié.

Ui ne donne pas de régression permettant d'estimer la Traînée des cylindres de faibles élancements en déplacement transverse. Nous pouvons cependant proposer, pour les élancements inférieurs à **2** une régression cubique (en jaune ci-dessous) d'équation :

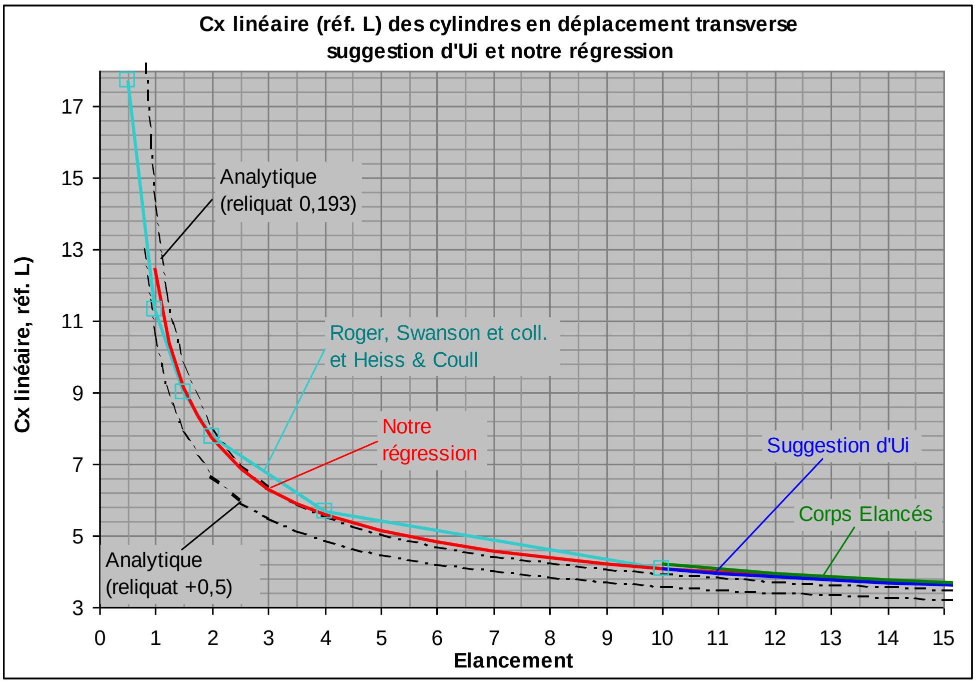
$$\mathbf{C_{xLin\ Réf.D} = 0{,}5927\ \lambda^3 - 2{,}7261\ \lambda^2 + 8{,}1728\ \lambda + 5{,}3426}$$

Il est notable que pour l'élancement nul, elle donne **5,3426** au lieu des **5,333** du disque ; c'est sans importance particulière…



Pour les élancements allant de **2** à **10**, nous proposons (en rouge ci-dessous) une régression dont l'équation (en référence **L**) est :

$$C_{xLin\ Réf.L} = \frac{14}{Ln(2\lambda)+0{,}43}$$



À l'élancement **4**, elle se rend coupable d'une erreur de **1,6 %**, mais cette erreur est de **0,6 %** à **2** et à **10**...

Pour les élancements supérieurs à **10**, on peut songer à utiliser la formule déterminée par la Théorie des Corps Élancés ; pour les déplacements transverses, cette théorie prédit un C_x linéaire peu différent de :

$$\mathbf{C_{xLin\ Réf.L\ (CorpsÉlancés)} \approx \frac{4\pi}{Ln(2\lambda)}}$$

On peut observer sur le graphe ci-dessus en vert que ce résultat est un peu au-dessus de la suggestion d'Ui et de notre régression.

Toujours pour les élancements supérieurs à **10**, Ui propose lui-même une équation (apparaissant en bleu dense ci-dessus).

Il se base sur le fait qu'aux très forts élancements la Traînée transverse des cylindres vaut le double de la Traînée axiale ; pour nous, s'agissant de $\mathbf{C_x}$ linéaires, ce constat implique :

$$\mathbf{C_{xLin\ tr\ Réf.L} = C_{xLin\ ax\ Réf.L}\ [2 - 2\varepsilon + \varepsilon^3 + \varepsilon^4]}$$

…avec toujours $\mathbf{\varepsilon = 1/Ln(2\lambda)}$

Dans cette équation les indices **tr** et **ax** signifient *en déplacement transverse* ou *en déplacement axial*. Le $\mathbf{C_x}$ linéaire du cylindre en déplacement axial est donc nécessaire pour calculer le $\mathbf{C_x}$ linéaire du même cylindre en déplacement transverse.

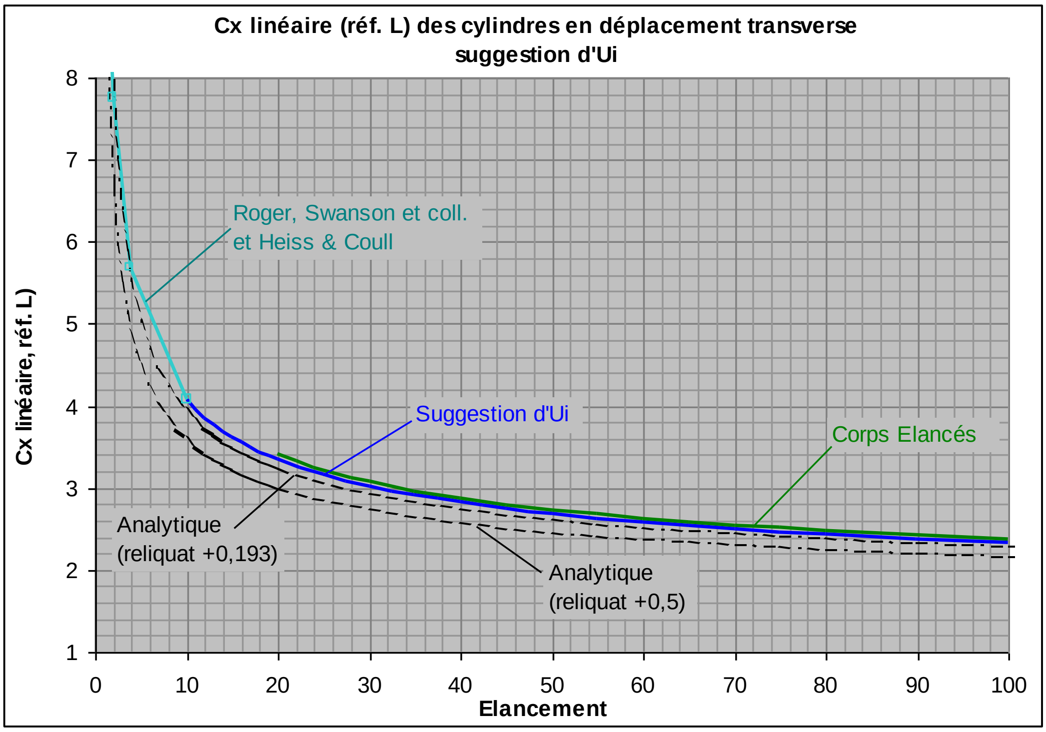
Pour connaître ce $\mathbf{C_{xLin\ ax\ Réf.L}}$ on pourra utiliser l'équation susmentionnée (dévolue aux élancements **4** à **75**).

Ce qui donne :

$$\mathbf{C_{xLin\ tr\ Réf.L} = 2\pi\ [0{,}0244 + 0{,}5504\ \varepsilon + 3{,}328\ \varepsilon^2 - 2{,}971\ \varepsilon^3]\ [2 - 2\varepsilon + \varepsilon^3 + \varepsilon^4]}$$

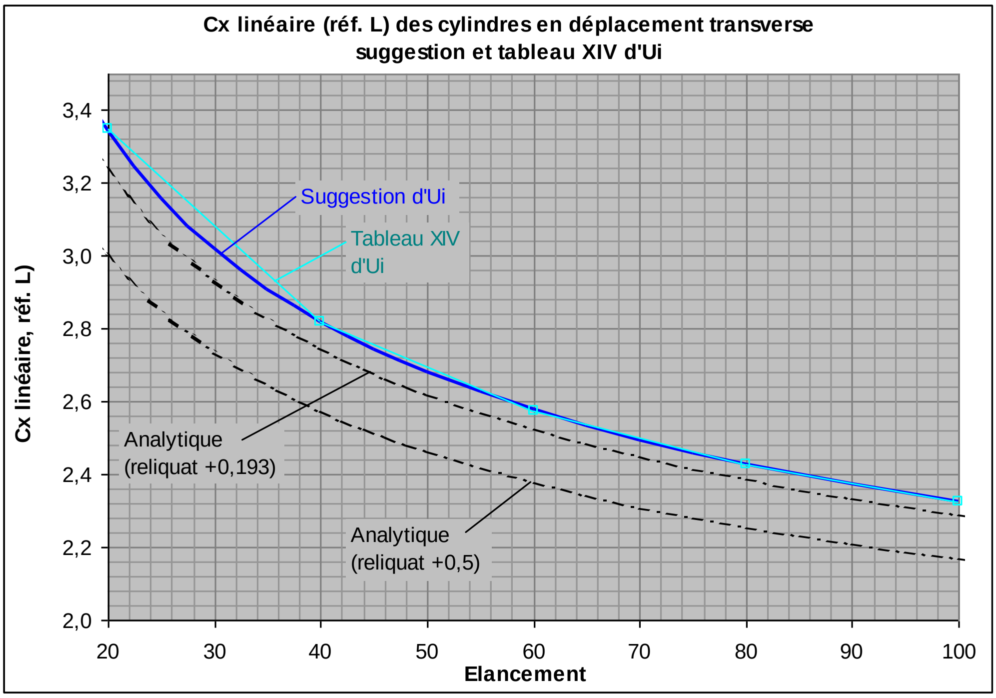
L'effectuation du produit des deux polynômes en **ε** entre crochets donnera un polynôme de degré **7**, mais il est peut-être plus simple de le faire entrer dans nos tableurs sous cette forme non effectuée.

La mise en panorama de cette suggestion d'Ui donne ceci pour les forts élancements (en bleu dense) :



Cette courbe bleu dense se place légèrement en dessous de la courbe obtenue par la Théorie des Corps Élancés ; nous accorderions cependant plus de confiance à la suggestion d'Ui qu'à ce résultat de la Théorie des Corps Élancés, bien que celui-ci soit très proche.

Ceci étant, l'utilisation de ladite équation d'Ui susmentionnée n'est pas clairement prescrite par Ui, ce qui laisse subsister un léger doute. Ce doute est cependant fortement réduit par le fait que, plus loin dans son texte, Ui donne, dans son tableau XIV, cinq valeurs numériques (que nous avons reliées ci-dessous par la courbe bleu clair), ces valeurs étant calculées à partir de sa suggestion susmentionnée :



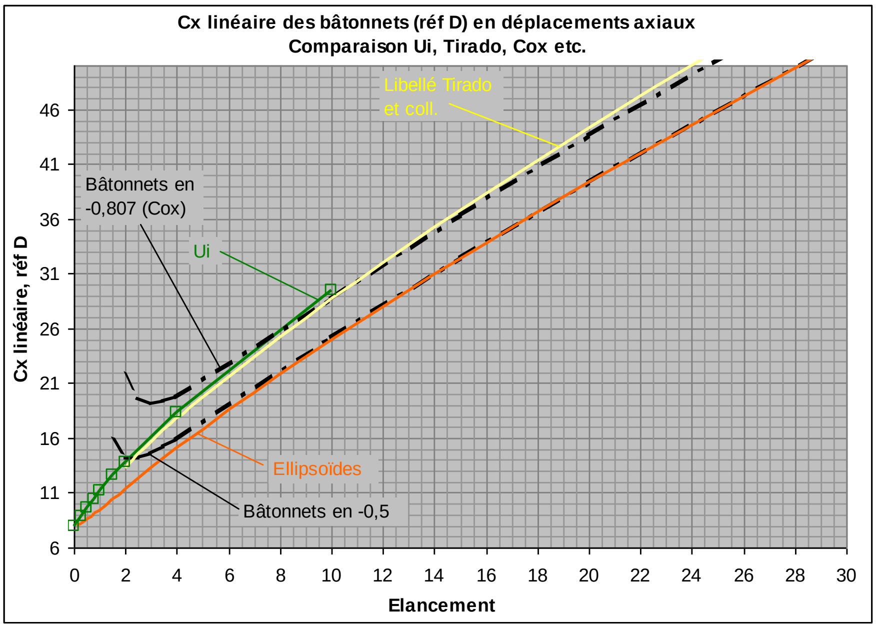
On remarque que notre exploitation de sa suggestion donne à peu près les mêmes résultats (sauf peut-être à l'élancement **60** où elle commet une erreur de **0,06 %**).

Nous ne pouvons en terminer avec la Traînée des cylindres courts sans mentionner les équations préconisées par Tirado, Martinez et de la Torre, équations à la genèse desquelles nous n'avons pas eu accès mais qui sont citées par Bartuschat et coll. dans leur calcul des caractéristiques de Traînée des corps sphéro-cylindriques d'élancement **2** à **7** ; voici ces équations :

Pour les cylindres d'élancement **2** à **30** en déplacements axiaux :

$$\mathbf{C}_{\mathbf{x}\text{LinRéf. L}} = \frac{\mathbf{2\pi}}{\mathbf{Ln(2\lambda) - 0{,}9 + \frac{0{,}980}{\lambda} - \frac{0{,}133}{\lambda^2}}}$$

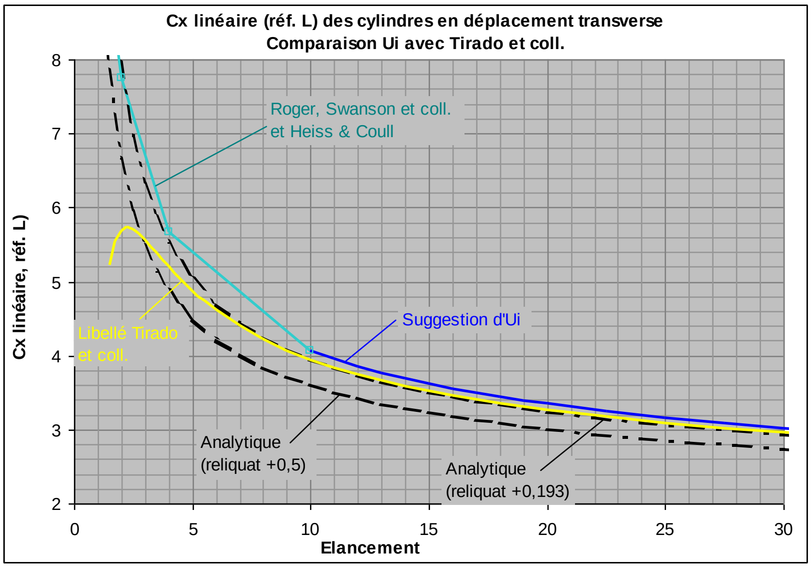
Voici, pour ces déplacements axiaux, la comparaison des $\mathbf{C_x}$ linéaires de Tirado et coll. (en jaune) avec ceux retenu par Ui (en vert) :



Pour les cylindres d'élancement **2** à **30** en déplacements <u>transverses</u>, les mêmes Tirado et coll. proposent :

$$\mathbf{C_{x\mathrm{LinRéf.\,L}}} = \frac{\mathbf{4\pi}}{\mathbf{Ln(2\lambda) + 0{,}14585 + \dfrac{0{,}185}{\lambda} + \dfrac{0{,}233}{\lambda^2}}}$$

Voici (en jaune) ce que donne cette équation par rapport à la suggestion d'Ui et les valeurs calculées de Roger, Swanson et coll. ou mesurées d'Heiss &Coull :



Dans ce cas des déplacements transverses, on peut remarquer une forte différence (surtout pour les faibles élancements) entre le libellé de Tirado et coll. d'une part et la suggestion d'Ui et les valeurs de Roger, Swanson et coll. ou Heiss & Coull d'autre part.

Il est d'autre part notable que ce libellé divague à l'élancement **2,5** (même s'il est annoncé comme valable entre les élancement **2**et **30** par Tirado et coll.).

Confrontation de ces C_x linéaires de cylindres avec l'expérience :

Jayaweera et Cottis relatent leurs expériences de décantation de courts cylindres circulaires dans un texte auquel nous n'avons pas eu accès mais qui est cité par John Nisbet dans un texte relayé par la NASA. Il semble d'après des citations du texte de Jayaweera et Cottis, que dans ces expériences les cylindres décantaient avec une orientation quelconque par rapport à l'horizontale…

Nisbet publie un graphe montrant l'évolution du Reynolds diamétral par rapport à un Nombre de Best ou de Davies qu'ils nomment *Modifié* (pour des cylindres de quatre rapport **d/L**, soit l'inverse de l'élancement) :

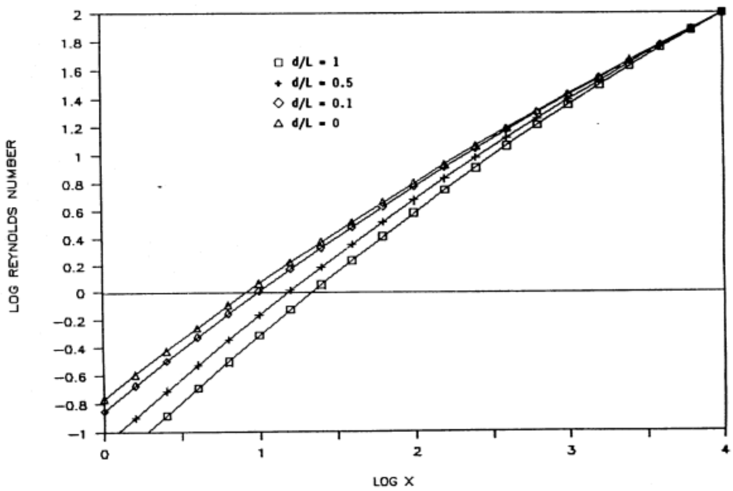


Figure 6. Relationship between the modified Davies number X and the Reynolds number for columns with d/L = 1, 0.5, 0.1 and 0 from Equation (25).

Mieux encore et plus pratique pour nous, Nisbet indique le libellé qui a permis à Jayaweera et Cottis de tracer ces courbes (équation (25) et que nous reproduisons ci-dessous en considérant le Nombre de Knudsen comme nul, ainsi que Nisbet l'a fait implicitement pour obtenir le graphe ci-dessus) :

$$\mathbf{R_{eD} = 1/[\ (3{,}684 + 13{,}59\ /\lambda)\ \mathit{X_m}^{-1} + (1{,}299 - 0{,}8678\ /\lambda)\ \mathit{X_m}^{-0{,}75} + (0{,}8311 - 0{,}04911\ /\lambda)\ \mathit{X_m}^{-0{,}5}\ ]}$$

…λ étant l'élancement **L/d** des cylindres et X_m étant le Nombre de Best ou de Davis *Modifié* (selon Jayaweera et Cottis), à savoir :

$$X_m = \frac{2\ \text{mg}\ \text{d}}{\rho \nu^2 \text{L}} = \frac{2\ \text{mg}\ \rho\text{d}}{\mu^2 \text{L}}$$

Note sur l'appellation Nombre de Davies *Modifié* utilisé par Jayaweera et Cottis :

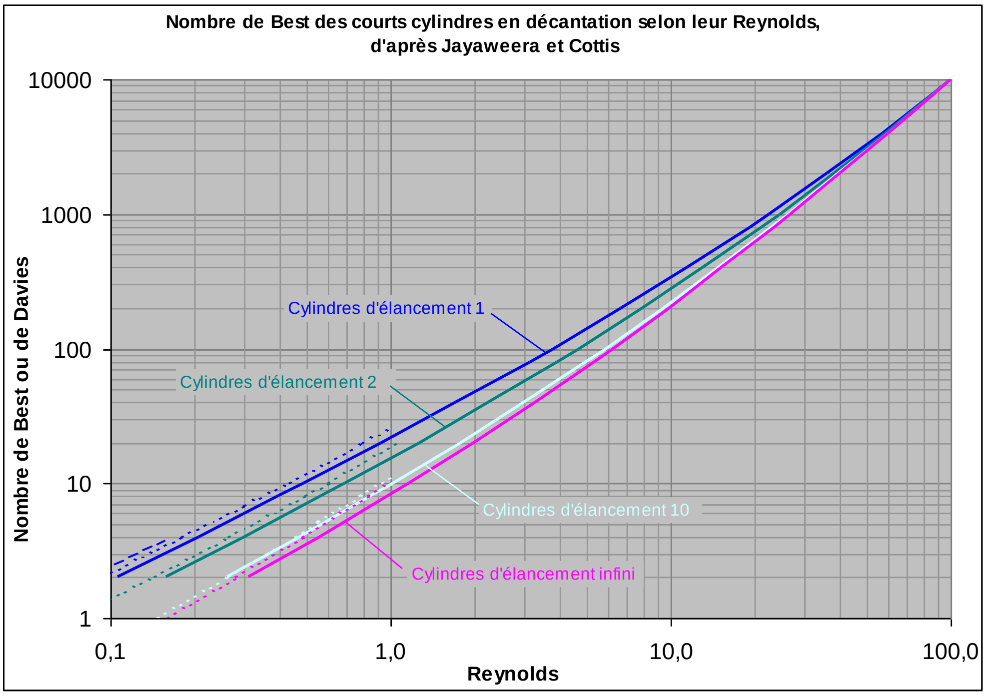
Le terme *Modifié* qui qualifie le Nombre de Davies nous paraît curieux puisque, lorsqu'un cylindre décante horizontalement, il est normal de prendre **dL** comme surface de référence ; la simple application de la définition du Nombre de Davies, à savoir $X = C_{xQuad} R_{eD}^2$, produit alors le libellé de $X = X_m$ ci-dessus.

Ce qui peut par contre paraître moins naturel à certains, est d'utiliser le même libellé X_m pour le cylindre décantant avec son axe vertical (donc de baser le C_x quadratique sur la surface **dL**) ou même dans une orientation quelconque.

> À notre sens, c'est cependant obligatoire pour effectuer la comparaison de décantations dans des orientations quelconques sur le même graphe.
> D'ailleurs, la surface frontale du cylindre (soit **dL** soit **πD²/4**) n'ayant aucune signification physique en régime de Stokes (nous l'avons assez dit), il semble plus sage, pour caractériser les cylindres décantant dans toutes les positions, de baser le $\mathbf{C_x}$ quadratique sur la surface **dL** surface quelque peu virtuelle, ici, mais qui a le mérite de prendre en compte l'ensemble des dimensions des cylindres.

(nous consacrons un paragraphe au Nombre adimensionnel de Davies ou de Best ici)

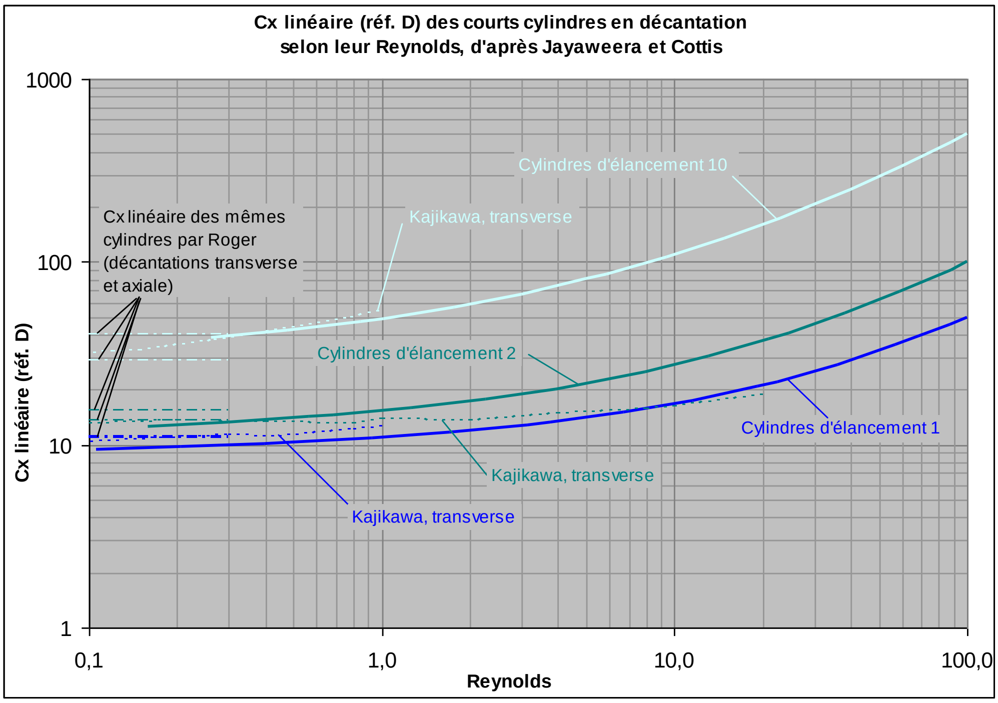
Ce libellé $\mathbf{R_{eD} = f(}\boldsymbol{X_m}\mathbf{)}$ de Jayaweera et Cottis (pour un Nombre de Knudsen nul) nous permet de dessiner les mêmes courbes mais avec des coordonnées inversées et en Log-Log :



Sur ce dernier graphe, les pointillés sont, dans chaque couleur, les valeurs expérimentales relevées par Kajikawa dans son texte pour les cylindres en décantation transverses (sa fig. 10) : ces valeurs, saisies par nous sur le graphe de Kajikawa, sont bien dans le même ordre de grandeur, mais nous pensons que les courbes de Jayaweera et Cottis représentent la décantation (moyenne) de cylindres d'orientation quelconque ; cependant, la saisie de la même courbe de la fig. 10 de Kajikawa pour le cylindre d'élancement **1** en déplacements axiaux dessine la courbe à longs tirets bleu dense : à notre sens, la courbe bleu dense de Jayaweera et Cottis devrait se situer entre ces dernières courbes en pointillés ou tiretés également bleu dense de Kajikawa.

La courbe pointillée fuchsia pour le cylindre infini en décantation transverse est attribuée par Kajikawa à Lamb.

Le libellé analytique de Jayaweera et Cottis énoncé à l'instant nous permet en tout cas de calculer le $\mathbf{C_x}$ linéaire mesuré par eux pour les trois plus courts cylindres [65] :



Nous avons fait dessiné, à gauche des trois courbes, des horizontales en traits mixtes : dans chaque couleur, ce sont les $\mathbf{C_x}$ linéaires des cylindres en déplacements transverses (horizontale supérieure) et en déplacements axiaux (horizontale inférieure) tels que calculés par Roger.

Pour le cylindre d'élancement unitaire, les deux horizontales sont très proches et donc ici indiscernables. Leurs ordonnées sont, bien-sûr, un peu au-dessus de $\mathbf{3\pi}$ (le $\mathbf{C_x}$ linéaire de la sphère).

Les pointillés représentent les cylindres en déplacements transverses de Kajikawa, toujours dans la même couleur pour le même élancement.

L'observation de ce dernier graphe montre que les mesures de décantation des cylindres (en orientation quelconque à notre connaissance) de Jayaweera et Cottis sont à peu près compatibles avec les $\mathbf{C_x}$ linéaires calculés par Roger pour les mêmes cylindres en régime de Stokes. Ces courbes peuvent donc renseigner sur l'extension du $\mathbf{C_x}$ linéaire des cylindres en dehors du domaine de Stokes (jusqu'à des Reynolds proches de la centaine).

Nous consacrons un texte particulier à cette question du Nombre de Best ou de Davies et surtout à la notion de Capacitance qui est très utilisée par les chercheurs en météorologie.

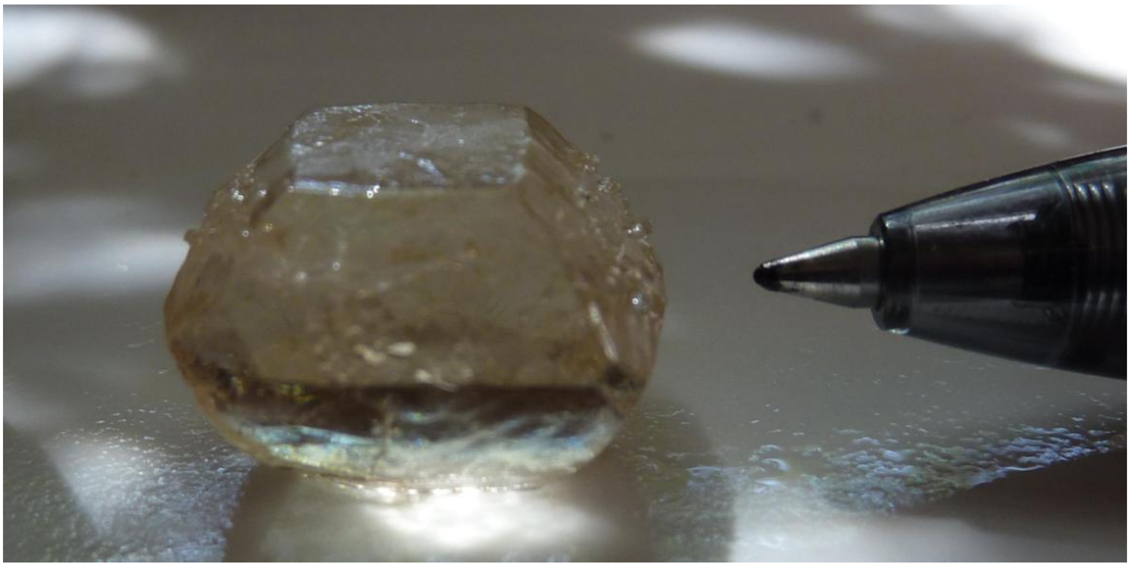
À l'issue de ce court texte, nous proposons même une Longueur de Référence virtuelle nommée *HyperCapacitance* sur laquelle baser le Reynolds pour simplifier l'affichage des données expérimentales en ce qui concerne les courts cylindres ou les colonnes hexagonales.

---

[65] La courbe représentant le $\mathbf{C_x}$ linéaire (référence **D)** du cylindre infini ($\mathbf{C_x}$ linéaire qui est infini) se trouve hors de ce graphe. Il faut d'ailleurs noter que la simplification de son libellé que permet son élancement infini ne donne pas de bons résultats, en comparaison avec les libellés de Cox ou de Lamb.

Traînée des polyèdres réguliers (cristaux et autres) :

Il se forme naturellement dans la nature, surtout sans doute par cristallisation, beaucoup de petits corps polyédriques. Voici à titre d'exemple un cristal de sel que nous avons nous-même trouvé au fond d'une vieille bouteille de Nuoc-mâm :



(la pointe de stylo à bille donne l'échelle)

Ce cristal est sans doute trop lourd pour décanter en régime de Stokes dans de l'eau, mais un calcul serait nécessaire pour l'affirmer…

Il semble que des cristaux parallélépipédiques soient plus courants :

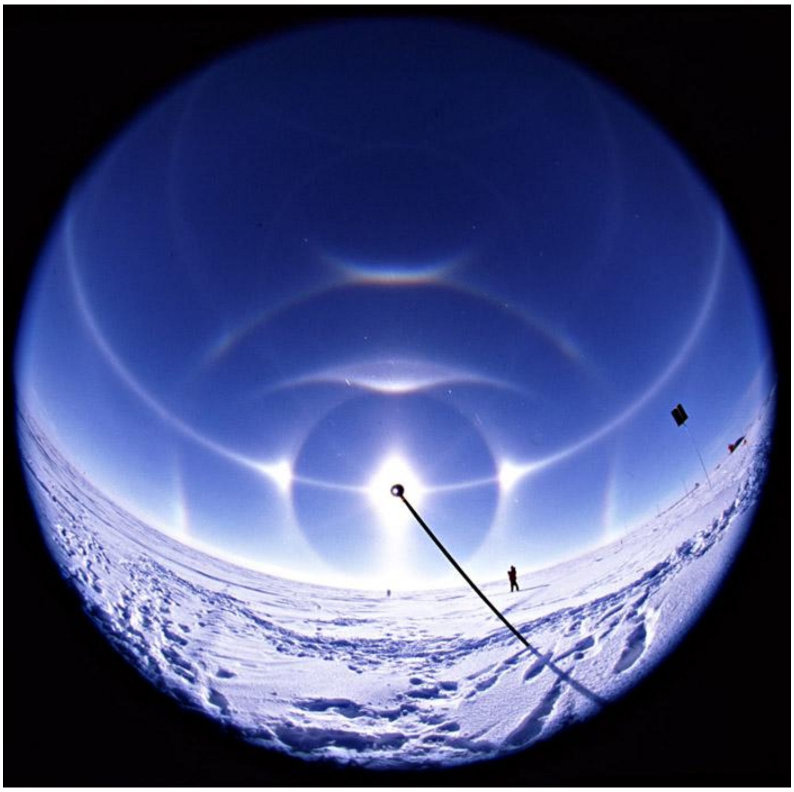
Source Wikipédia

Ceux-ci ont été « obtenus par cristallisation lente dans une saumure à température ambiante ».

Bien-sûr, il est probable que dans la nature se trouvent à décanter ensemble à la fois des cristaux parfaitement réguliers (comme ces derniers) et d'autres cristaux plus *amorphes*.

Mais cela n'interdit pas d'étudier la décantation des plus réguliers en régime de Stokes [66].

D'autres cristaux se forment dans l'air, en altitude : ce sont les cristaux de glace de section hexagonale qui produisent les *parhélies* [67] ou faux soleils [68] ; ces phénomènes *parhéliques* sont fréquemment vus aux pôles, comme ici par le voyageur polaire Marko Riikonen :



Par la grâce de Marko Riikonen http://www.ursa.fi/~riikonen/

Ceci étant, nous en avons-nous-mêmes vu des dizaines (jamais aussi complets, cependant) depuis le sol de la Bretagne où nous habitons [69].

De telles manifestations optiques s'expliquent par les réfractions et réflexions multiples qui se produisent à l'intérieur des cristaux de glace qui se forment à haute altitude. Ces cristaux se classent en deux catégories : les colonnes, en forme de crayons hexagonaux :

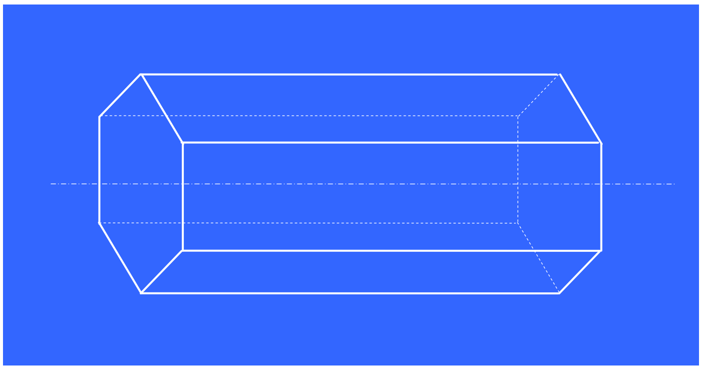
---

[66] Ne serait-ce que parce que le régime de Stokes est très tolérant sur la forme des corps qui s'y adonnent…

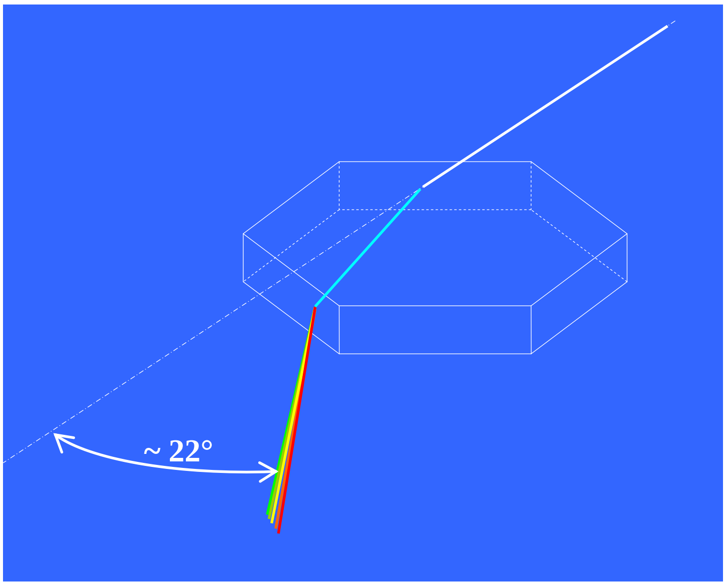
[67] On mémorise mieux ce mot si l'on sait qu'il est constitué de *para* (*à côté de*) et de *hélios* (*soleil*).

[68] Voir à ce sujet notre texte : PARHÉLIE ou FAUX SOLEILS.

[69] Il suffit presque d'être au courant de l'existence de ces phénomènes pour les apercevoir…



…et les plaquettes :



Si l'orientation des premiers cristaux (les colonnes) reste aléatoire durant leur décantation dans l'air (leur tendance est à demeurent horizontaux mais ils s'orientent dans toutes les directions, produisant, pour cette raison, des halos), la position des plaquettes hexagonales est réputée horizontale : cette position crée donc les conditions de réfractions particulières (qui ont été dessinées ci-dessus) et qui produisent les faux soleils.

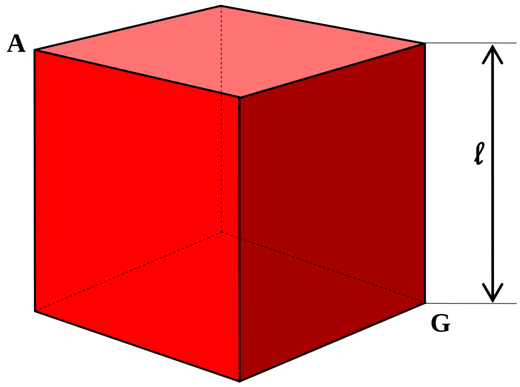
Nous verrons plus bas, en effet, sur la foi de l'ouvrage de Clift, Grace et Weber (relayant Willmarth), que la décantation du disque circulaire (qui nous servira de modèle pour ces plaquettes hexagonales) se produit ses faces planes horizontales de façon stable jusqu'à un Reynolds assez fort de **100**…

La stabilité de chute des plaquettes de glace à ce Reynolds (décidément hors régime de Stokes) est donc sans doute l'explication de ces phénomènes parhéliques.

Pour réfléchir à la stabilité de chute des plaquettes de glace, il peut être utile de songer à nos festifs confettis : ces derniers ne sont pas stables dans leur descente : ils tourbillonnent toujours autour d'un diamètre horizontal. Des essais dans l'air seraient néanmoins intéressant à organiser avec des confettis allégés et diminué en taille, ceci jusqu'à ce que leur descente soit stable…

Nous reviendrons plus bas sur la Traînée des cristaux de glace à base hexagonale.

Traînée du cube :



Dans leur ouvrage, Clift et coll. écrivent qu'un « cube décantant dans un fluide en écoulement rampant [écoulement de Stokes] tombe verticalement avec une vitesse indépendante de son orientation. » Il faut comprendre que de tels corps (qui acceptent trois axes de symétrie) décantent verticalement et de façon stable (sans tourner) quelle que soit leur orientation initiale.

Les mêmes auteurs donnent l'équation permettant le calcul de la *Traînée réduite* de ce corps [70] :

« Pour un cube de côté *ℓ*, l'équation […] donne la résistance comme **12,70 *ℓ***, ce qui peut être comparé aux valeurs expérimentales de **12,58 *ℓ*** (Pettyjohn & Christiansen), **12,63 *ℓ*** (Heiss & Coull) et **12,71 *ℓ*** (Chowdhury & Fritz). Pour l'usage, la résistance des cubes pourra donc être prise comme **4π *ℓ*** (Dahneke B. E.). » [71]

Il faut préciser à nos lecteurs que dans leur ouvrage essentiel, Clift et ses collègues ne font pas usage de notre coefficient de traînée adimensionnel linéaire : ils utilisent une *Traînée réduite* (ils ne la qualifient pas ainsi, mais au contraire la nomment simplement *résistance*). Cette *Traînée réduite* consiste en la division de la Force de Traînée (en newtons) par **µ**, la viscosité dynamique, et **V**, la vitesse de l'écoulement.

Cette *Traînée réduite* (ou *résistance*), s'exprimant en mètres, ainsi qu'il apparaît dans la citation ci-dessus, est donc ce que nous préférons appeler, quant à nous, une *longueur de Traînée*.

Il nous est cependant aisé de traduire les propos de Clift et coll. comme suit :

Le $\mathbf{C_x}$ linéaire d'un cube, dans toutes ses positions angulaires, est :

$$\boxed{\mathbf{C_{xLin\,\ell} = 4\pi}}$$

…qui est le $\mathbf{C_x}$ linéaire du cube **dans toutes les positions**, en référence à la longueur *ℓ* de son arête.

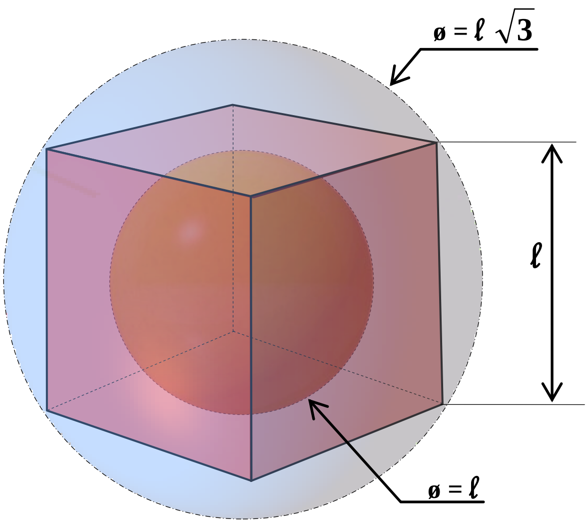
---

[70] Par *Traînée réduite*, nous voulons signifier que la Traînée en newtons est divisée par **µ** et par **V**.

[71] "For a cube of side *ℓ*, Eq. (4-50) gives the resistance as 12.70 *ℓ*, compared with experimental values of 12.58 *ℓ* (Pettyjohn & Christiansen), 12.63 *ℓ* (Heiss & Coull), and 12.71 *ℓ* (Chowdhury & Fritz.). To the accuracy of the determinations, the resistance can be taken as 4**π** *ℓ* (Dahneke B. E.)"

Il est d'ailleurs satisfaisant de constater que, conformément au théorème de la dissipation minimale d'énergie [72], la longueur de Traînée du cube (**4π ℓ**) est bien inscrite entre la longueur de Traînée de la sphère inscrite dans le cube (**3π ℓ**) et celle de la sphère circonscrite (**3 π ℓ** $\sqrt{3}$) [73] :

$$3\pi\,\ell < 4\,\pi\,\ell < 3\,\pi\,\ell\,\sqrt{3}$$



En référence à sa longueur entre sommets opposés (qui vaut $\ell\,\sqrt{3}$), longueur qui est le diamètre de la sphère circonscrite au cube, le C_x linéaire dudit cube devient **7,2552**.

<u>C_x linéaire de l'octaèdre régulier, tronqué régulièrement ou non :</u>

Clift et coll. ajoutent que l'équation assez simple [74] qui conduit à la valeur de la Traînée du cube :

$$\Delta_e = 1 / [1+ 0{,}367\ \mathrm{Ln}(\psi)\ ]$$

…peut être étendue aux autres corps faisant montre (comme la sphère et le cube) d'une *isotropie sphérique* [75], tels que l'octaèdre régulier. Ce corps, dont les huit faces sont des triangles équilatéraux (tous de côté **a**), peut être vu, en effet, comme deux pyramides jointes par leur base horizontale **ABCD** (schéma de gauche) :

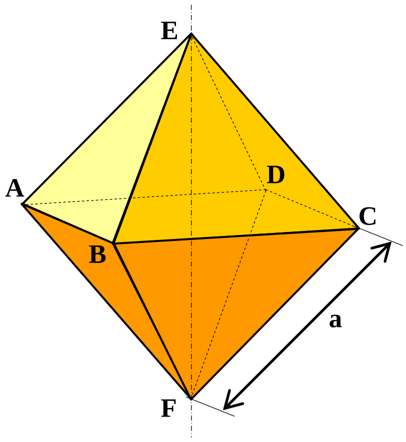
---

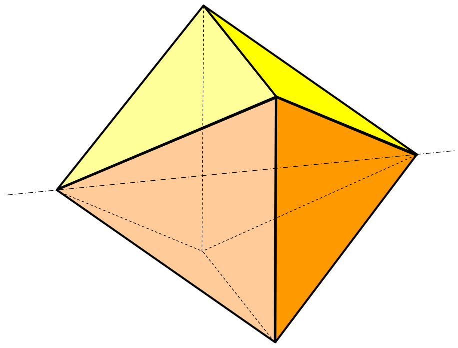
[72] Voir par exemple Hydrodynamique Physique de Guyon, Petit et Hulin…

[73] La cote entre-pointes du cube est $\ell\,\sqrt{3}$.

[74] Simple dans son libellé, mais difficile d'emploi…

[75] Clift et coll. donnent l'origine de cette expression : "Spherically isotropic particles always fall vertically without rotation, and the settling velocity is independent of orientation. <u>This is the origin of the name for this class of shapes</u>." Il faut donc comprendre cette expression comme signifiant « qui décante verticalement sans tourner et à la même vitesse dans toutes les orientations, comme la sphère ».





Mais il peut être vu également comme deux autres pyramides jointes par leur base carrée verticales (**BFDE** et **AFCE**).

On doit apprendre à reconnaître ce même octaèdre lorsqu'il est basculé sur le côté, comme sur le schéma de droite… [76]

Clift et coll. ont calculé la Traînée du cube grâce à l'équation :

$$\boldsymbol{\Delta_e = 1 / [1 + 0{,}367\ Ln(\psi)]}$$

…où $\boldsymbol{\Delta_e}$ est le quotient de Traînée du corps (par rapport à la Traînée de la sphère de même volume) défini comme :

$$\Delta_e = \frac{\text{Traînée réelle de la particule}}{\text{Traînée de la sphère de même volume que la particule}}$$

…et $\boldsymbol{\psi}$ est le *coefficient de sphéricité* défini comme suit :

$$\psi = \frac{\text{aire de la sphère de même volume que la particule}}{\text{aire réelle de la particule}}$$

(attention au fait que la quantité *réelle* est au dénominateur de ce coefficient $\boldsymbol{\psi}$, contrairement à ce qui existe dans le libellé du $\boldsymbol{\Delta_e}$: $\boldsymbol{\psi}$ est donc nécessairement plus faible que **1**, c.-à-d. que le coefficient de sphéricité de tous les corps qui ne sont pas des sphères est inférieur à l'unité)

Reprenant les calculs de Clift et coll. nous avons bien trouvé pour le cube le $\boldsymbol{C_x}$ linéaire de $\boldsymbol{\approx 4\ \pi}$ (en référence à la longueur des arêtes ou côtés).

Pour l'octaèdre régulier (schéma ci-dessus), nous avons trouvé, par cette méthode d'Heiss & Coull, le $\boldsymbol{C_x}$ linéaire suivant :

$$\boxed{\boldsymbol{C_{xLin\ a} = 9{,}70}}$$

[76] Quatre faces aboutissent à chaque sommet de ce corps, ce qui le différencie du cube.

…qui est le $\mathbf{C_x}$ linéaire de l'octaèdre régulier dans toutes les positions, en référence à la longueur **a** de toutes ses arêtes.

Pettyjohn et Christiansen ont effectué des mesures de décantation d'octaèdres. Ils trouvent pour le même C_x linéaire (réf. **a**) la valeur de **9,892** (valeur citée par Carmichael dans son texte et son correctif).

C'est donc préférentiellement cette valeur de **9,892** qui pourra être utilisée, à notre sens, comme $\mathbf{C_x}$ linéaire en référence à la longueur **a** de toutes ses arêtes.

Il doit être remarqué que ce $\mathbf{C_x}$ linéaire est assez proche de celui de la sphère par rapport à son diamètre (**3π = 9,425**), mais la longueur de référence choisie par nous pour l'octaèdre est plus courte. Pour effectuer au mieux cette comparaison, on peut choisir comme longueur de référence de notre $\mathbf{C_x}$ linéaire la hauteur totale de l'octaèdre (qui vaut $\sqrt{2}\,\mathbf{a}$), hauteur totale dont il faut rappeler qu'elle peut être mesurée de la même façon entre les trois couples de sommets opposés (**EF**, **BD** et **AC** sur notre schéma) et qu'elle peut être considérée comme le *diamètre* de l'octaèdre.

On trouve alors, comme $\mathbf{C_x}$ linéaire :

$$\boxed{\mathbf{C_{xLin\,H} = 6{,}857}}$$

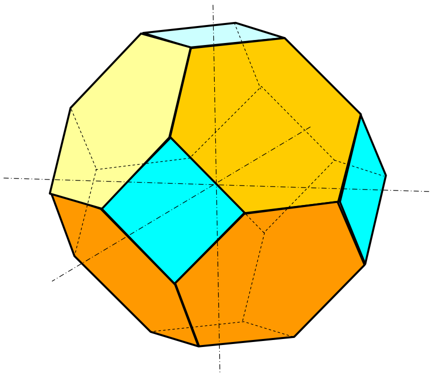
…qui est le $\mathbf{C_x}$ linéaire de l'octaèdre régulier dans toutes les positions, en référence à sa hauteur **H** mesurée entre sommets opposés (les mesures de Pettyjohn et Christiansen conduisent à $\mathbf{C_{xLin\,H}}$ = **7,00**).

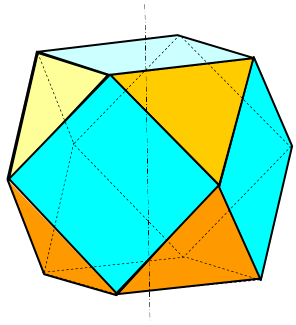
Ce $\mathbf{C_x}$ linéaire est nettement inférieur à celui de la sphère circonscrite (**9,425** en référence à son propre diamètre qui est la même hauteur **H** mesurée entre sommets opposés de l'octaèdre).

Il est également un peu plus faible que celui du cube (**7,2552**, en référence à sa cote entre pointes).

Le corps obtenu en tronquant (régulièrement) chacun des six sommets de l'octaèdre régulier possède la même symétrie sphérique. Les faces qui naissent de ces six troncatures sont des carrés (colorés en bleus ci-dessous, pour ceux qui sont visibles). La troncature (toujours régulière) du schéma de droite est plus forte, qui va jusqu'à faire se rejoindre les carrés bleus (ce dernier solide est appelé *cuboctaèdre* [77], ses 24 arêtes présentent la même longueur) :

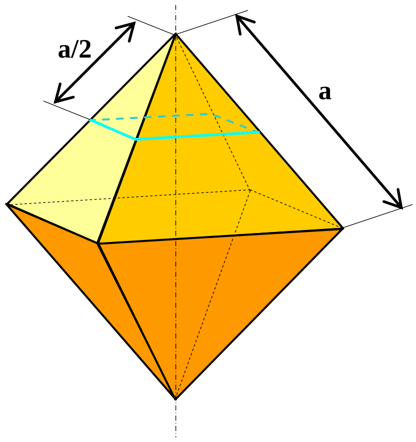
[77] Voir à son sujet la page https://fr.wikipedia.org/wiki/Cuboctaèdre





Ces deux corps (ou plutôt cette famille de corps) montrent, comme le tétraèdre régulier, la même traînée dans toutes les positions et, conséquemment sont justiciables de la même équation en **ψ**.

Pour obtenir le corps de droite ci-dessus (la plus forte troncature de ce type), il faut effectuer les six troncatures à la moitié des arêtes **a** de l'octaèdre régulier :



Le $\mathbf{C_x}$ linéaire de ce corps tronqué à **50 %** de ses arêtes (le cuboctaèdre) est alors :

$\mathbf{C_{xLin\ a}}$ **= 8,08**, en référence à l'arête intègre **a** ou, si l'on veut, **16,16** en référence à la longueur de l'une de ses 24 arêtes identiques (schéma de droite ci-dessus)…

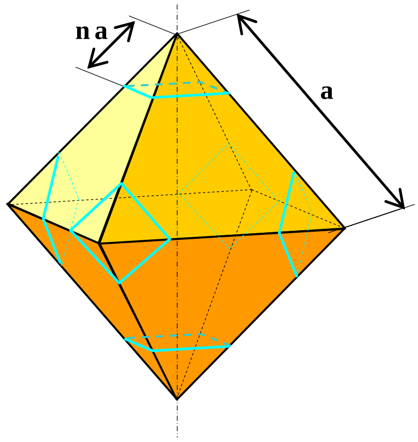
Pettyjohn et Christiansen ont mesuré la décantation de tels cuboctaèdres réguliers. On peut tirer de leurs mesures (citées par Carmichael) le $\mathbf{C_x}$ linéaire de **16,04**, (au lieu de **16,16**), (en référence à la longueur de l'une des 24 arêtes du cuboctaèdre). À notre sens, c'est donc plutôt ce dernier $\mathbf{C_x}$ linéaire qui devra être utilisé. En référence à la hauteur de ce corps (soit la distance entre deux de ses faces carrées opposées) ce $\mathbf{C_x}$ linéaire mesuré par Pettyjohn et Christiansen devient $\mathbf{C_{xLin\ H}}$ **= 11,344** ; c'est ce $\mathbf{C_x}$ linéaire qui prête le plus à comparaison avec celui du cube (**4 π = 12,566**).

Allen écrit d'ailleurs : « Le comportement du tétraèdre dévie beaucoup par rapport à celui de la sphère mais le cuboctaèdre moins […] »

Lorsque la troncature de l'octaèdre se fait aux **25 %** de l'arête **a** à partir des sommets, le $\mathbf{C_x}$ linéaire est :

$\mathbf{C_{xLin\ a}}$ = **9,36**, en référence à l'arête intègre **a** ou **37,44** en référence à l'arête des carrés nés des troncatures…

Nous avons calculé le coefficient de sphéricité ψ de l'octaèdre régulier régulièrement tronqué en fonction du pourcentage de troncature **n** des arêtes de chaque sommet. Ce pourcentage **n** est défini comme suit sur le tétraèdre régulier intègre :



Ainsi que nous l'avons vu, **n** peut prendre des valeurs allant de **0** à **0,5** ou, si l'on préfère, de **0** à **50 %** (ce dernier pourcentage étant celui pour lequel les carrés formés par les six troncatures se rejoignent [78]) [79].

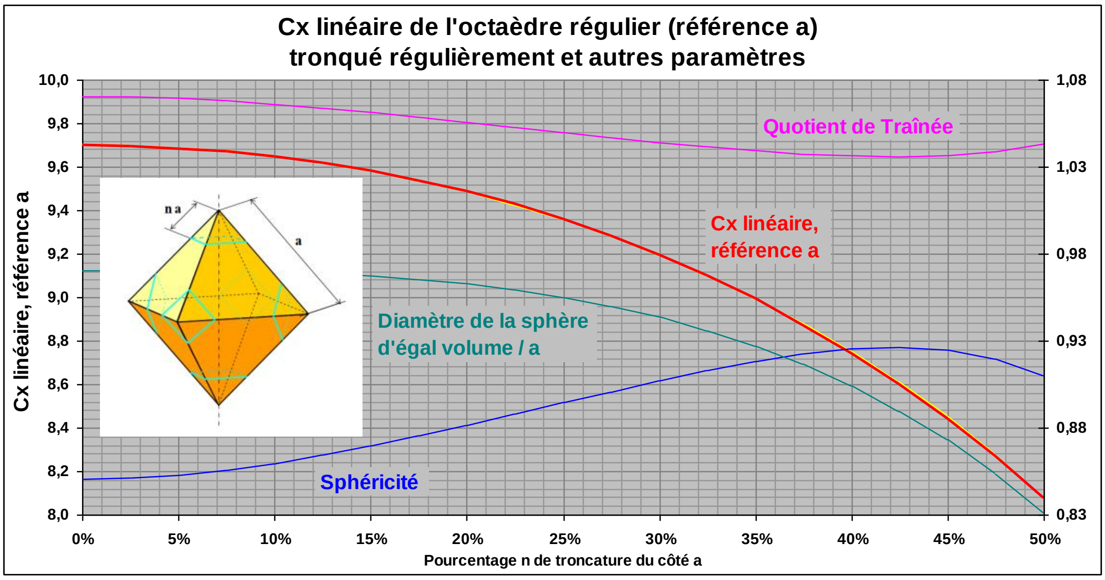
De même nous avons calculé le diamètre de la sphère de même volume que ce corps, ainsi que son quotient de Trainée $\mathbf{\Delta_e}$ [80].

Le $\mathbf{C_x}$ linéaire $\mathbf{C_{xLin\ a}}$ de l'octaèdre régulier régulièrement tronqué qui en ressort (toujours en référence à son arête intègre **a**) suit l'évolution de la courbe rouge :

[78] On pourrait tronquer encore plus mais le corps prend alors une autre forme…

[79] Pour mémoire, l'aire de l'octaèdre régulier régulièrement tronqué à **50 %** de son arête est : **[3/2 + Racine(3)/2]a²**.

[80] Le volume de l'octaèdre régulier régulièrement tronqué à **50 %** de son arête **a** est : **[5Racine(2)/24]a³**.



Cette courbe rouge ressemblant d'assez près à un arc de cercle, nous lui avons trouvé une régression elliptique :

$$C_{xLin\ a} = \sqrt{4{,}5^2 - (6{,}928n)^2} + 5{,}2$$ [81]

…équation où **n** peut prendre des valeurs allant de **0** à **0,5**.

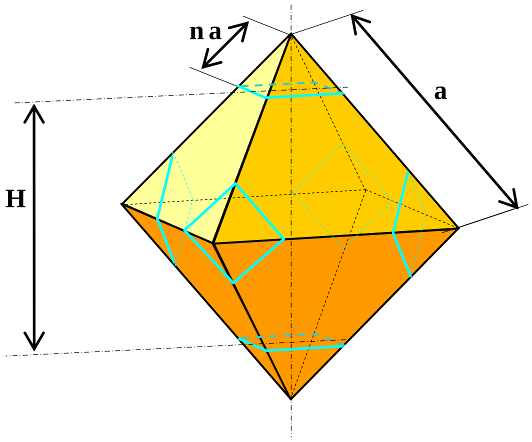
Cette régression est bizarrement précise à **0,06 %** près (c'est la courbe jaune qui se montre ici et là derrière la courbe rouge)…

Sur le graphe ci-dessus apparaissent également (toujours selon le taux de troncature) le Quotient de Traînée du corps Δ_e (tel que défini plus haut à lire sur l'axe de droite), son Coefficient de Sphéricité ψ (tel que défini plus haut) ainsi que le diamètre de la sphère de volume égal à celui du corps adimensionnalisé par le côté **a** (ψ et le diamètre adimensionnalisé étant également à lire sur l'axe de droite).

L'observation de ces courbes montre que Quotient de Traînée et Sphéricité n'évoluent pas tant que ça mais que le Diamètre de la sphère d'égal volume est plus variable (notre C_x linéaire est le produit de ce dernier Diamètre par 3π et par le Quotient de Traînée Δ_e le tout divisé par le côté **a**).

Cependant, il peut venir à l'idée de s'intéresser non pas au C_x linéaire du tétraèdre régulier tronqué régulièrement pris en référence à son arête **a** mais à son C_x linéaire C_{xLinH} pris en référence à sa hauteur **H** (qui est aussi sa cote entre carrés opposés) :

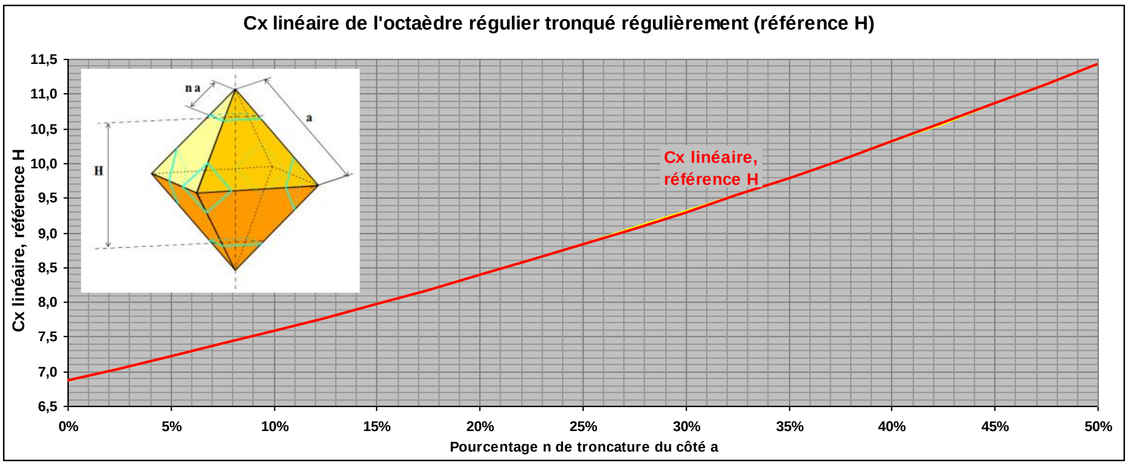
[81] On peut vérifier que **4,5 + 5,2 = 9,7** qui est le C_x linéaire de l'octaèdre non tronqué.



Le changement de longueur de référence est simple :

$$\mathbf{C_{xLinH} = C_{xLin\,a} * a / H}$$

On obtient alors cette courbe rouge de $\mathbf{C_{xLinH}}$, le $\mathbf{C_x}$ linéaire en référence **H** :



Notre tableur propose pour ce $\mathbf{C_x}$ linéaire une régression parabolique dont nous avons simplifié *à vue* les coefficients : c'est la courbe jaune que l'on perçoit çà et là derrière la courbe rouge (et encore avons-nous augmenté l'épaisseur de ce trait jaune pour qu'on le remarque plus aisément) :

$$\mathbf{C_{xLinH} = 5{,}1\ n^2 + 6{,}55\ n + 6{,}87}$$

Néanmoins, cette courbe rouge montante semble poser un problème : Comment un corps qui perd ses sommets et s'approche peu à peu de la sphère (voir son coefficient de sphéricité sur le graphe précédent) peut-il voir son $\mathbf{C_x}$ augmenter continument ?

Cette augmentation continue donne, en effet, l'impression que la Traînée du corps augmente à mesure qu'on lui rogne ses aspérités.

Cette impression est fallacieuse. Pour nous en expliquer, replaçons-nous en régime de fort Reynolds : Lorsque l'on cherche à minimiser la Traînée d'un corps (à ces forts Reynolds), ce n'est pas son C_x référencé à sa propre surface frontale qu'il faut prendre en compte mais son C_x référencé à une surface constante.

Donnons un exemple : Soit à profiler, par exemple, le conteneur ventral d'un avion destiné à transporter soit un certain volume de carburant, soit un instrument d'une certaine section frontale. Si l'on teste en soufflerie plusieurs modèles de carénage plus ou moins gros de ce conteneur et que l'on tire de ces essais des C_x frontaux des différents modèles de conteneur (C_x référencés à leur propre surface frontale) on va être induit en erreur par ces C_x : par exemple, le plus gros conteneur étant celui qui possède la plus grosse surface frontale sera sans doute celui qui présentera le plus faible C_x frontal ! Mais rien ne dit que ce meilleur C_x frontal génèrera la plus faible Traînée puisque cette Traînée vaut $q\,S\,C_x$ et que, bien que C_x soit faible, **S** est fort…

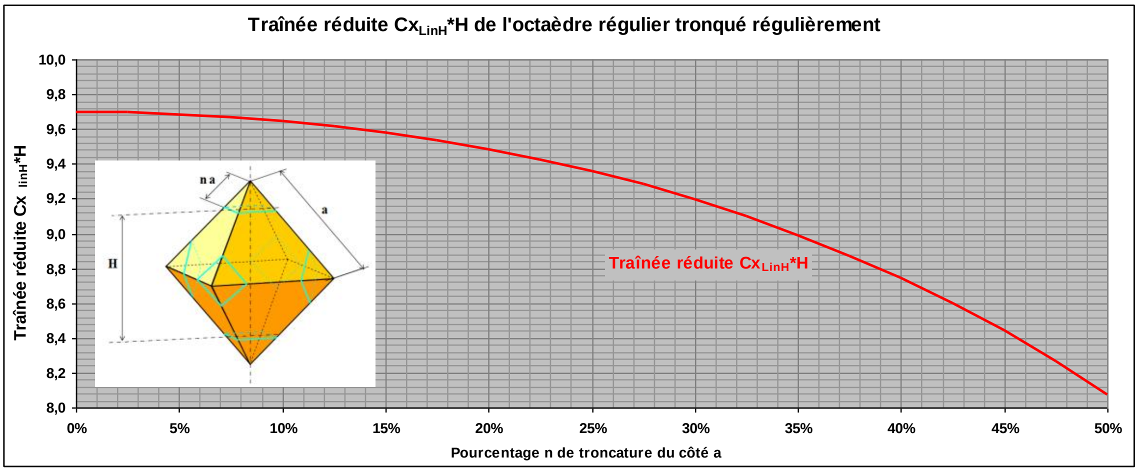
Dans ce genre de situation où l'on fait évoluer la surface frontale d'un corps, il convient donc de toujours référencer les C_x à une surface constante (par exemple la section frontale de l'instrument à caréner ou la puissance **2/3** du volume de carburant à emporter s'il s'agit d'un réservoir) : ainsi les faibles variations de Traînée dégagés par la soufflerie apparaîtront de façon visible ! [82]

Et en tout état de cause, il faut toujours se souvenir que le C_x ne représente pas la Traînée : ce qui représente la Traînée c'est, à vitesse donnée, le $S\,C_x$!

S'agissant de nos corps en régime de Stokes, la Traînée est, de même :

$$F = C_{xLinH}\,\mu\,V\,H$$

Et si l'on effectue ce produit, ou plus simplement le produit C_{xLinH}***H** que nous appellerons *Traînée réduite*, ou Longueur de Traînée (car c'est bien une longueur) on retombe bien sur la forme de la courbe rouge vu sur notre premier graphique [83] :

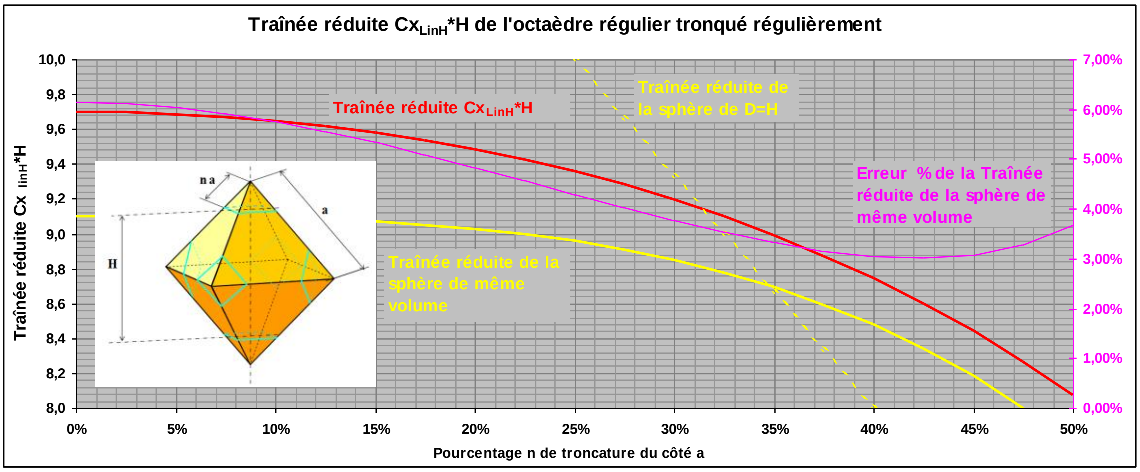


Il peut être instructif de faire apparaître sur le même graphe la Traînée réduite de la sphère de diamètre **D = H** et la Traînée réduite de la sphère de même volume (en trait plein jaune ci-dessous), on constate que c'est cette dernière Traînée réduite qui est la plus proche de la Traînée réduite de l'octaèdre tronqué :

---

[82] C'est pour cela que les C_x des dirigeables sont toujours référencés à la puissance **2/3** de leur volume ; on appelle ce C_x le C_x *volumique*…

[83] C'est normal puisque pour tracé cette courbe, nous avons fait C_{xLinH}***H = [**$C_{xLin\,a}$***a/H]*H.**



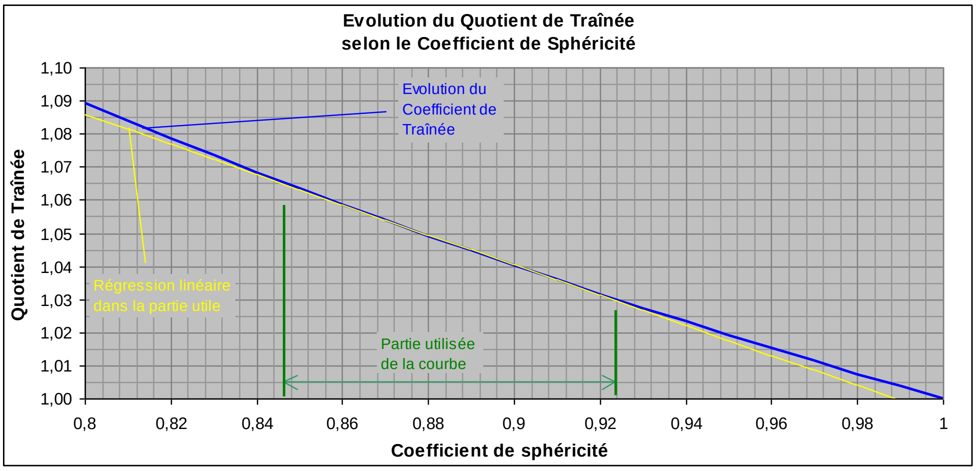
Nous avons d'ailleurs fait apparaître l'erreur pour cent de cette dernière Traînée réduite (celle de la sphère de même volume) par rapport celle déterminée par nos calculs pour l'octaèdre régulier régulièrement tronqué (en fuchsia, à lire sur l'axe de droite) : l'erreur de cette approximation *volumique* reste comprise entre **6** et **3 %**.

Mais il n'y a rien d'étonnant à cela puisque cette erreur pour cent est très liée au quotient de Traînée et au Coefficient de Sphéricité (dont justement la courbe fuchsia ci-dessus reprend les formes (formes que l'on voit ici en fuchsia et bleu dense)…

Il faut d'ailleurs à ce propos faire le constat que la relation entre le Quotient de Traînée $\boldsymbol{\Delta_e}$ et le Coefficient de Sphéricité $\boldsymbol{\psi}$:

$$\boldsymbol{\Delta_e = 1 / \left[1 + 0{,}367\ \mathrm{Ln}(\psi)\right]}$$

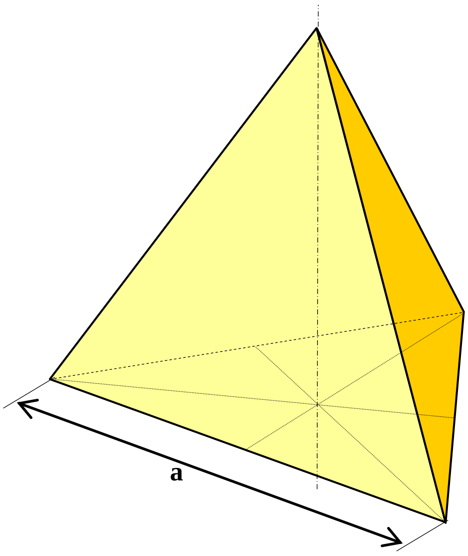
… est très proche d'une relation linéaire pour les faibles Coefficients de Sphéricité $\boldsymbol{\psi}$ (qui dans le cas de nos troncatures régulières vont de **84,6** à **0,922**) :



(la régression linéaire que nous avons représenté en jaune sur ce graphe a pour équation : $\boldsymbol{\Delta_e = -\,0{,}455\ \psi + 1{,}45}$)

C_x linéaire du tétraèdre régulier, régulièrement tronqué ou non :

Le tétraèdre régulier, corps formé de quatre faces équilatérales (toutes également de côté **a**) est donné par Clift et coll. comme faisant preuve d'une *isotropie sphérique* [84] comme, d'après ces auteurs, tous les polyèdre réguliers [85] :



Sur ce dernier point du comportement du tétraèdre, nous notons cependant la remarque de John R. L. Allen dans Developments in sedimentology :

« Les coefficients de traînée pour une large variété de corps sphériquement isotropiques sont connus expérimentalement sur une large plage de Reynolds […]. Le comportement du tétraèdre dévie beaucoup par rapport à celui de la sphère […] »

Nonobstant cette remarque qu'il faut cependant garder en mémoire, nous avons trouvé à ce *berlingot* un C_x linéaire de :

$$\boxed{C_{xLin\ a} = 6{,}72}$$

…qui est le C_x linéaire du tétraèdre régulier dans toutes les positions, en référence à la longueur **a** de toutes ses arêtes équilatérales.

Pettyjohn et Christiansen ont mesuré la décantation de tels tétraèdres réguliers. On peut tirer de leurs mesures (citées par Carmichael dans son texte et son correctif) le C_x linéaire de **6,825** (en référence à la longueur de l'une quelconque de ses 6 arêtes **a**). En référence à la hauteur de ce même tétraèdre (posé sur l'une de ses bases) ce C_x linéaire mesuré par Pettyjohn et Christiansen devient **8,36**. Ce sont ces deux C_x linéaires qu'il conviendra d'utiliser préférentiellement.

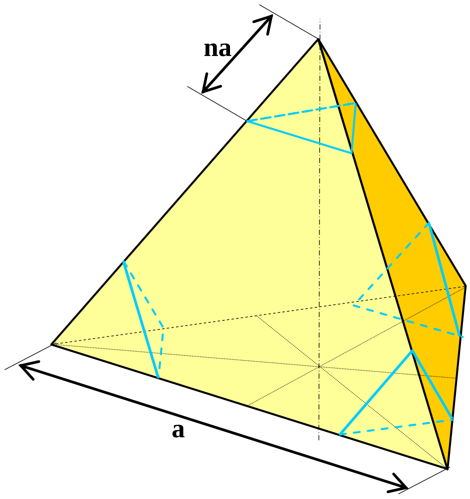
Les mesures de Pettyjohn et Christiansen donnent donc des C_x linéaires très différents de ceux calculés par la méthode générale d'Heiss & Coull.

---

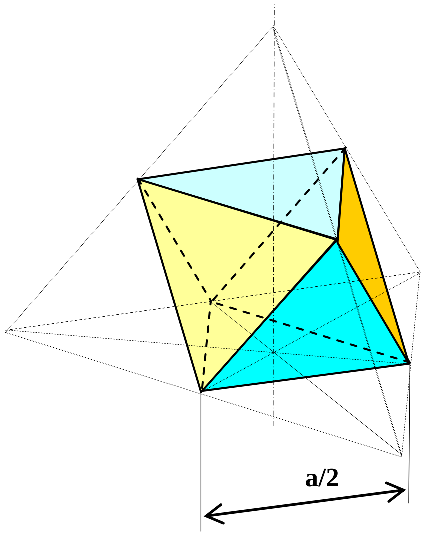
[84] Rappelons qu'il faut comprendre cette expression comme signifiant « qui décante verticalement sans tourner et à la même vitesse dans toutes les orientations, comme la sphère ». Que le tétraèdre fasse preuve d'une isotropie sphérique est assez difficile à comprendre si l'on détermine ses axes de symétrie.

[85] "This group [Spherically Isotropic Particles] comprises regular polyhedra and all shapes obtained by symmetrically smoothing or cutting pieces from these bodies."

On peut songer à tronquer régulièrement le tétraèdre régulier, Clift et ses collègues nous assurant que ce corps tronqué sera doté d'une *isotropie sphérique*. Comme précédemment, nous placerons nos troncatures à la cote **na** mesurée à partir de chaque sommet sur chaque arête, **n** étant un nombre compris entre **0** et **0,5** :



À la valeur de troncature **n = 0,5**, les triangles bleus, qui représentent la matière du tétraèdre mise *à vif* par les troncatures, se rejoignent et dessinent ce corps :

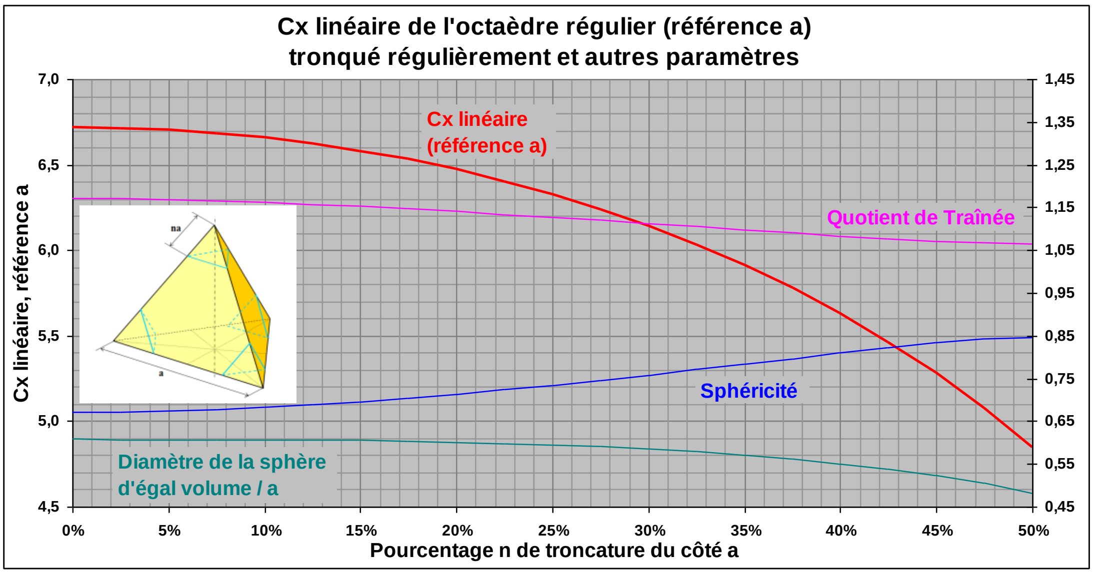


La troncature des quatre sommets a fait naître quatre triangles équilatéraux et les faces jaunes, anciennement intègres, se trouvent réduites à d'autres triangles équilatéraux.

Finalement, en effectuant cette troncature extrême [86], nous avons transformé le tétraèdre en un octaèdre plus petit !

[86] Comme précédemment, on pourrait néanmoins pousser plus loin la troncature, même si le corps devient plus difficile à voir dans l'espace…

Reste à vérifier que le $\mathbf{C_x}$ linéaire de cet octaèdre nouveau né est le même que celui de tous les octaèdres : notre graphe le donne comme valant **4,85** à ces **50 %** de troncature :

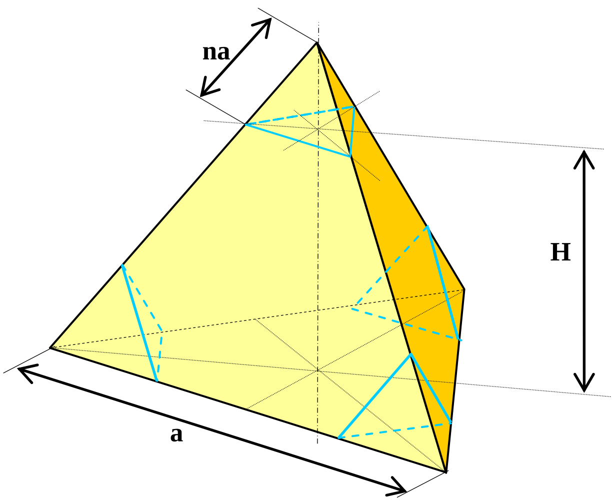


Mais ce $\mathbf{C_x}$ linéaire est établi en référence à l'arête intègre **a** du tétraèdre de base alors que l'arête réelle de l'octaèdre nouveau-né est moitié moindre, c.-à-d. **a/2**. Il en résulte, par un changement de longueur de référence, que le $\mathbf{C_x}$ linéaire de notre octaèdre nouveau-né est :

$$\mathbf{C_{xLin}} = \frac{\mathbf{4{,}85 * a}}{\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{2}}} = \mathbf{9{,}7}$$

…qui est bien le $\mathbf{C_X}$ linéaire de l'octaèdre en référence à son arête.

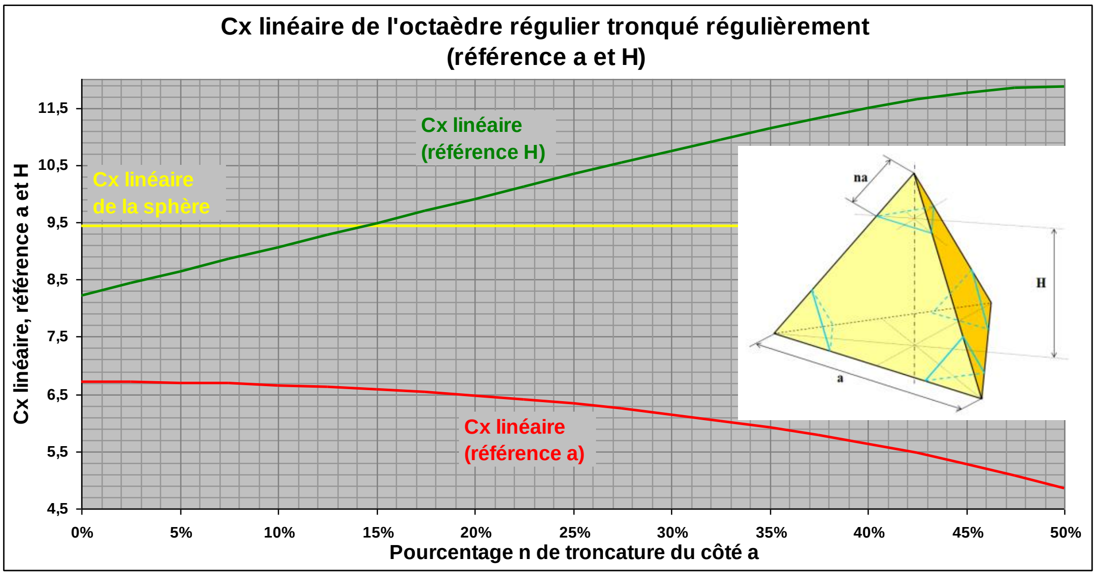
Au demeurant, il est peut-être mieux séant de donner directement le $\mathbf{C_x}$ linéaire du tétraèdre tronqué directement en référence à la hauteur **H** du corps, par exemple, celle-ci étant représentée ci-dessous :



Cette hauteur dépend bien évidemment du taux de troncature **n**. On peut la calculer comme valant :

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{2(1-n)a}}{\sqrt{\mathbf{6}}}$$ [87]

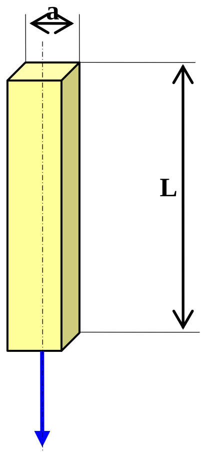
En vert est, ci-dessous, l'évolution de ce C_x linéaire du tétraèdre régulier tronqué régulièrement en référence à sa hauteur **H** :



[87] On peut noter que pour la troncature de **50 %**, la hauteur est la moitié de celle d'origine qui donnée par **n = 0** (soit **2a/Racine[6]**).

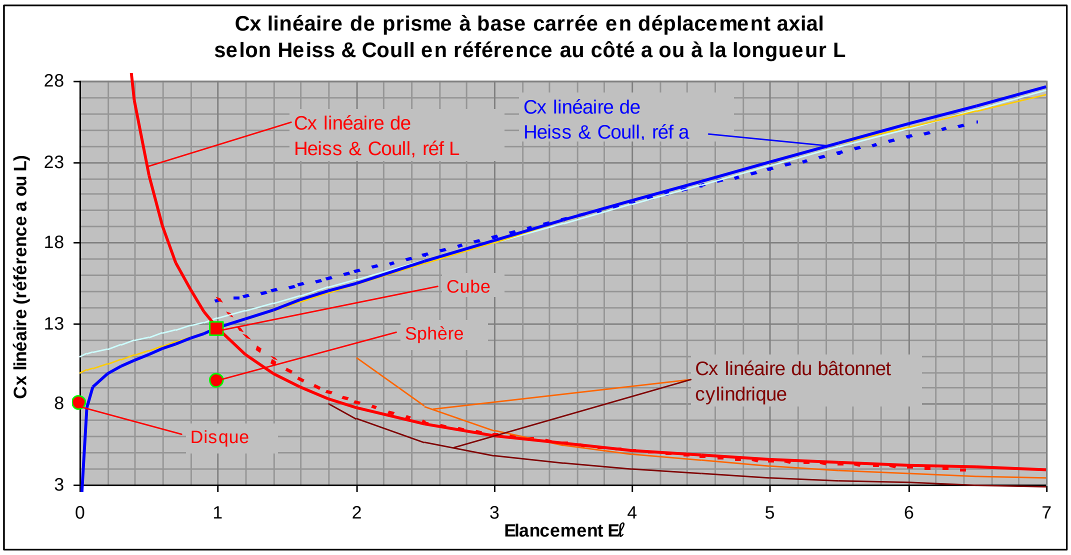
Cx linéaire du prisme droit à base carrée en déplacement axial :

Clift et coll. relayent les propositions de Heiss & Coull pour la Traînée du parallélépipède rectangle à section carrée (ou prisme droit à base carrée) :



La démarche de Heiss & Coull est assez compliquée dans sa formulation.

Néanmoins, elle est tout à fait praticable et conduit, pour le prisme droit à base carrée, aux C_x linéaires suivants (courbe rouge en trait continu en référence à la longueur **L** du prisme et courbe bleue dense en trait continu en référence à son côté **a**) :



Il est appréciable que ces C_x linéaires passent tous deux, à l'élancement unitaire, par le C_x linéaire du cube (**4π**, en référence à son côté **a** ou à sa longueur **L = a**).

La courbe bleue en trait continu, pour les élancements très faibles, ne passe pas, cependant, par la marque du disque circulaire (C_x linéaire = **8**) ni par celui de la plaque carrée d'épaisseur nulle (**9,15** [88]).

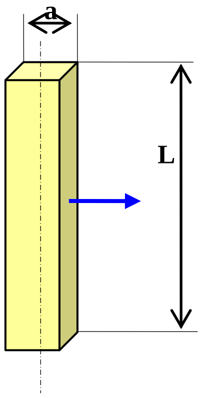
Sur ce dernier graphe, les courbes bleue et rouge en tiretés représentent les pronostics de Bowen et Masliyah pour ces mêmes prismes droits à base carrée (courbes établies par ces auteurs pour des prismes droits à base carrée d'élancement **1** à **6,5**).

[88] Nous avons déjà évoqué le problème de ce corps simple plus haut et en donnons la solution ici.

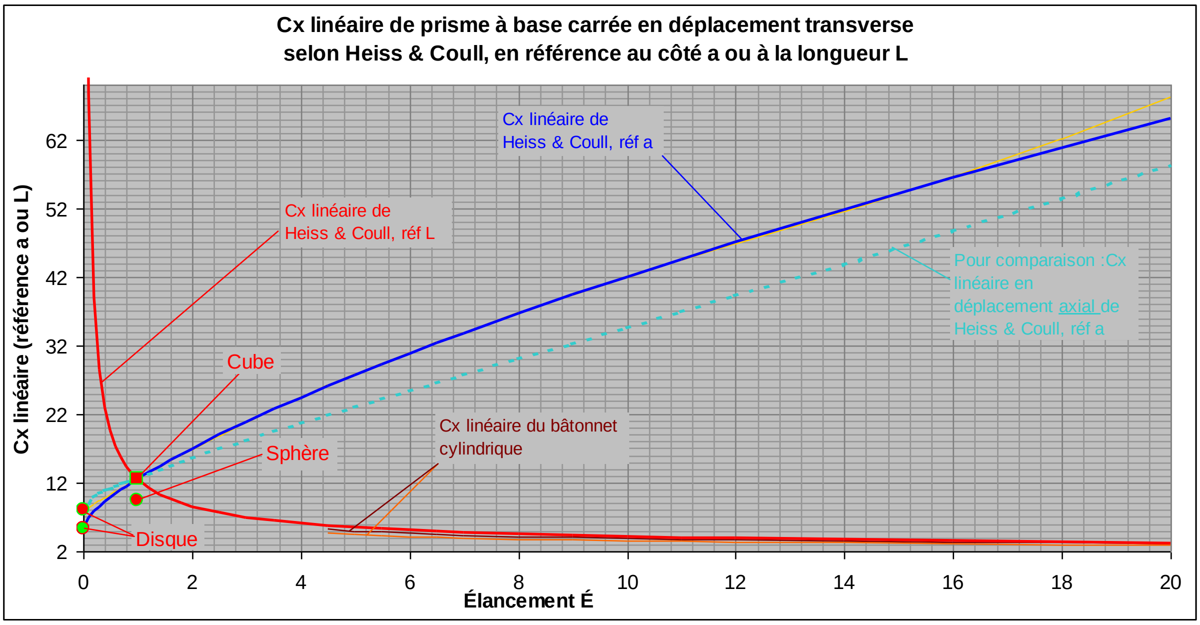
Il est difficile de juger du réalisme des ces courbes tiretées pour les forts élancements, mais force est de constater que pour l'élancement unitaire ces courbes se fourvoient ; ces même auteurs annoncent pour leur méthode une précision de **6 %** (mais pas seulement pour les prismes droits à base carrée)…

Nous sommes au regret de dire que ce mode d'estimation de Heiss & Coull (au moins en ce qui concerne ces prismes à base carrée) a été périmé par les travaux de Sunada, Ishida et Tokutake que nous exploiterons plus bas.

Cx linéaire du prisme droit à base carrée en déplacement transverse :



Heiss et Coull, relayés par Clift et coll., donnent également les moyens de calculer le $\mathbf{C_x}$ linéaire de tels corps. Nous avons suivi leur procédure : le résultat en dessine la courbe bleu dense ci-dessous :



Sur ce graphe, nous avons fait apparaître le $\mathbf{C_x}$ linéaire, en référence à leur longueur, des bâtonnets cylindriques (courbes orange et marron)…

De même, nous avons fait apparaître le **C_x** linéaire du disque circulaire en déplacement dans son plan (**5,333**, marque verte ceinte de rouge) : le courbe bleu dense *vise* correctement cette valeur particulière, ce qui est très encourageant !

La courbe jaune qui serpente derrière la courbe bleue dense est la régression cubique suivante :

$$\mathbf{C_{xLin\ a} = 0{,}0052\ É^3 - 0{,}195\ É^2 + 4{,}83\ É + 8}$$

Comme on le voit, elle décroche à l'élancement **16**. Mais elle passe bien par le **C_x** linéaire du cube. Par contre, elle ne passe pas par le **C_x** linéaire du disque circulaire en déplacement dans son plan (**5,333**) qui, en l'absence d'autres renseignements, pourrait représenter la plaque carrée également en déplacement dans son plan.

La courbe tiretée en bleu plus clair représente le **C_x** linéaire du même prisme droit à base carrée mais en déplacement axial. Il n'y a pas un rapport **2** entre ces deux **C_x** du même corps comme ils en ont la réputation en régime de Stokes (du moins aux plus forts élancements) ; des vérifications annexes montrent d'ailleurs que le rapport des deux **C_x** du bâtonnet cylindrique tend plutôt vers **1,75** que **2**, comme leurs libellés semblent le promettre s'ils sont lus rapidement (le quotient de ces deux **C_x** est de **1,66** pour l'élancement **100** et **1,7**5 pour l'élancement **1000**).
Au demeurant, ces deux courbes bleu dense et bleu plus clair tiretée se doivent passer toutes deux par le **C_x** linéaire du cube (**4π**), ce qu'elles font…

Dans la pratique ces deux **C_x** (axial et transverse) du prisme droit à base carrée se croisent autour de l'élancement **30**.

Pour les élancements qui courent de **8** à **100** nous avons pu vérifier que la régression en puissance :

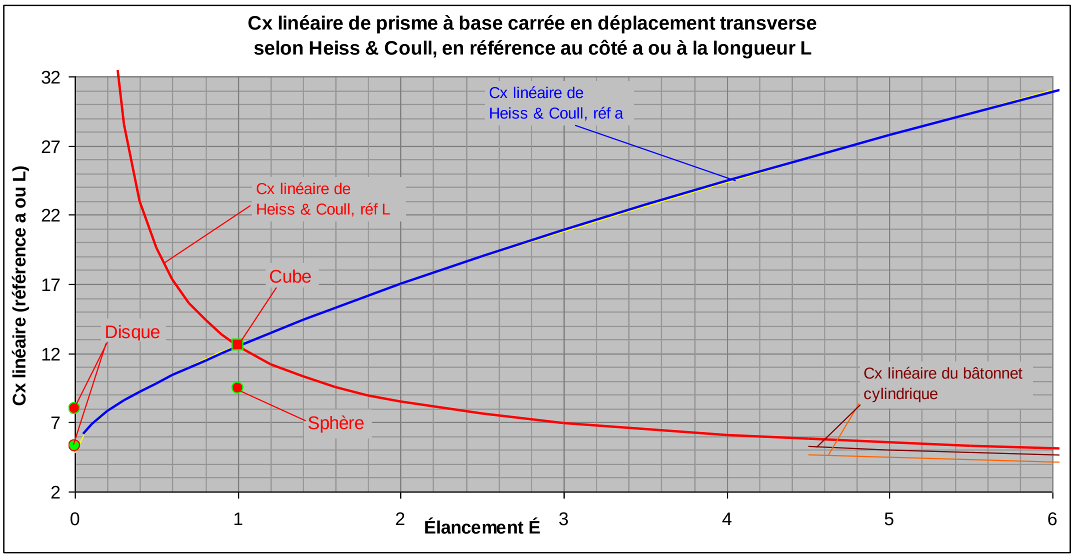
$$\mathbf{C_{xLin\ a} = 9{,}4267\ É^{0{,}6483}}$$

…donne des résultats d'une précision meilleure que **1,04 %** entre ces élancements de **8** et **100** (ces deux élancements étant compris dans l'écart)
Ceci étant, répétons que nous ne savons pas entre quels élancements les prescriptions de Heiss & Coull sont valides…

Entre les élancements **0,05** et **6**, le libellé :

$$\mathbf{C_{xLin\ a} = 5{,}8\ É^{0{,}5} + 2\ É + 4{,}8}$$

…révèle une précision meilleure que **0,94%** (les bornes **0,05** et **6** étant comprises). C'est la courbe jaune à peine visible derrière la courbe bleue dense :



Il est à noter que cette régression n'est pas calée sur le $\mathbf{C_x}$ linéaire du disque dans son plan (**5,333**) ; pour les très faibles élancements, cette valeur devra donc être imposée manuellement…

Répétons que nous ne connaissons pas la plage dans laquelle Heiss & Coull ont confronté leurs prescriptions avec la réalité.

Faisons aussi état de l'opinion de Clift et coll. sur la détermination de la Traînée des prismes droits à base carrée par Heiss & Coull :

« L'agrément de cette méthode avec les données expérimentales disponibles est raisonnable mais pas meilleur que celui de la méthode de Bowen et Masliyah considérant ces corps particuliers comme des corps de révolution. »

Comme à propos des mouvements axiaux des mêmes prismes à base carrée, nous sommes au regret de dire que ce mode d'estimation de Heiss & Coull a été périmé par les travaux de Sunada, Ishida et Tokutake que nous exploiterons plus bas.

Cas particulier du prime droit à base rectangulaire :

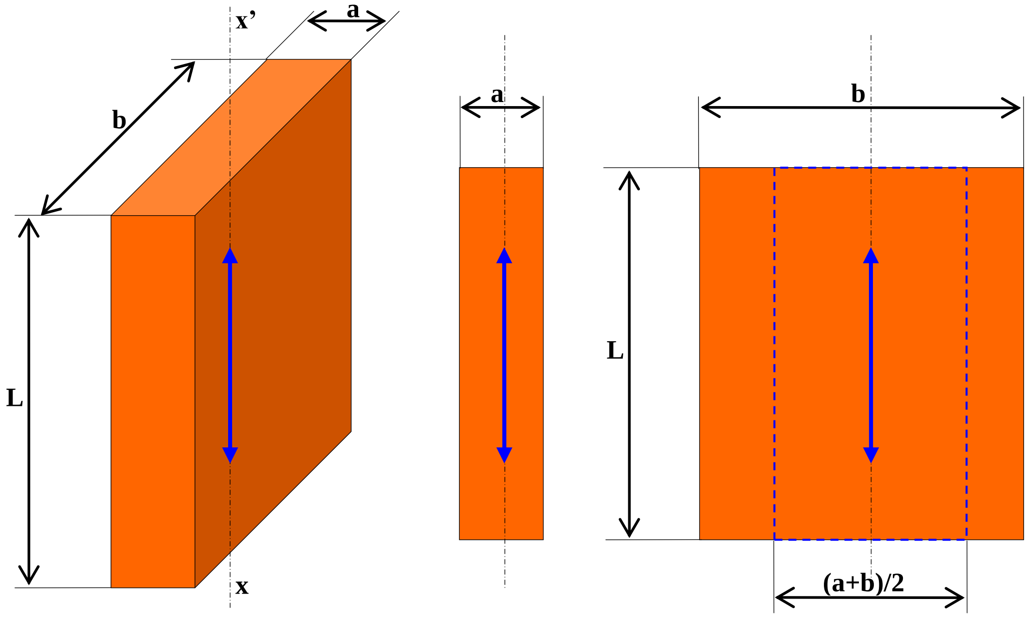
Empruntons d'ailleurs à Bowen et Masliyah (cités par Clift, Grace et Weber) le principe, jugé valide par eux, qu'un prisme droit à base rectangulaire (non carrée, donc) peut être assimilé à un prisme *à base carré équivalente* pourvu que l'on prenne comme *base carrée équivalente* celle de périmètre valant la moyenne arithmétique des deux périmètres (minimal et maximal) constatés, normalement à l'axe du mouvement, sur le prisme à base rectangulaire.

Ce libellé (peut-être dû à Clift et coll.) est assez sibyllin [89] ; nous donnons un exemple de la façon dont nous l'avons compris à l'instant.

Si nous l'avons bien compris, ce principe revient à accorder à la surface latérale de friction l'essentiel de la responsabilité de la Traînée, au détriment de l'action

[89] "experimental results for rectangular parallelepipeds [which] may be regarded as analogous to axisymmetric particles. The shape factor and drag ratio are evaluated from the arithmetic mean of he maximum and minimum perimeters, viewed normal to the corresponding axes."

des surfaces d'extrémités [90], par exemple, ci-dessous, pour ce qui est de la Traînée relative au mouvement selon l'axe **x'x** :



Les deux périmètres (maximal et minimal, vus normalement à l'axe **x'x** qui est celui du mouvement) sont **2(L + b)** et **2(L + a)**. Le périmètre équivalent (qui est la moyenne de ces deux périmètres) est donc **2L + b + a**, soit encore **2[L + (a + b)/2]** : vu de côté le prisme droit à base carrée équivalente dessine la silhouette bleue tiretée ci-dessus.

La surface latérale mouillée de ce prisme droit à base carrée équivalente est **4[L(a + b)/2]** soit **2L(a + b)**. Or c'est aussi la surface latérale mouillée du prisme droit à base rectangulaire d'origine (c.-à-d. **2La + 2Lb**)…

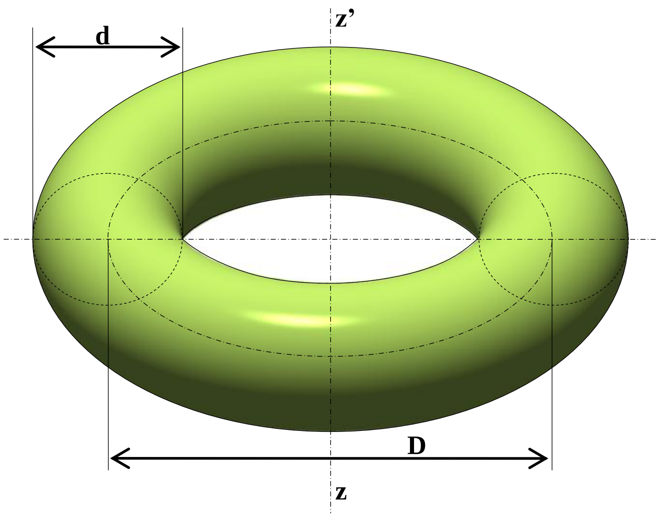
Nous mettrons ce principe simplificateur à l'épreuve dans notre exploitation du texte de Sheaffer relatant ses mesures de décantation de parallélépipèdes rectangles.

Cx linéaire du tore en déplacement axial :

Dans le Journal of Fluid Mechanics, Robert E. Johnson et Theodore Y. Wu publient un texte relatant leur calcul de la Traînée du tore fin en écoulement de Stokes.

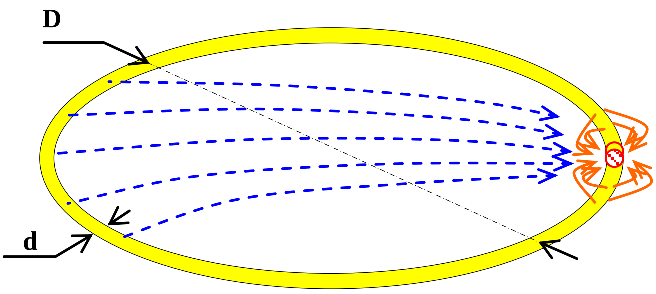
Par *tore fin* il faut comprendre un tore dont le grand diamètre **D** (ou diamètre générateur) est beaucoup plus grand que le petit diamètre **d**, ces diamètres étant définis sur le schéma ci-dessous :

[90] Cette assimilation vaut pour la méthode de Bowen et Masliyah, mais elle est forcément acceptable pour les autres méthodes, au moins en l'absence de procédures plus précises…



En effet, il peut exister toutes sortes de tore, depuis le tore *très fin* (dont la matière se trouve à grande distance du centre général, **D** étant très grand par rapport à **d**) jusqu'au tore *jointif* dont l'évidement central est réduit à zéro (**D=d**) [91], en allant théoriquement jusqu'à la sphère lorsque le grand diamètre **D** est réduit à zéro.

On comprend d'ailleurs, puisqu'en écoulement de Stokes les variations de pression se propagent à grande distance, que la grande *finesse* **D/d** du tore rend l'interaction entre ses différents éléments moins importante ; ainsi, sur l'élément que nous avons dessiné en rouge, ci-dessous, s'exercent les interactions des éléments voisins (flèches courbes orange ci-dessous, ces interactions étant à peu près celles qui existent dans le cas du cylindre), mais également les interactions des éléments plus lointains, y compris ceux qui sont à l'opposé (flèches tiretées bleues) :



L'étude de Johnson et Wu se cantonne aux tores de grandes finesses (quotient **D/d** très grand), mais cela ne signifie pas ces auteurs ont négligé les interactions sur chaque élément du tore des autres éléments, même lointains : simplement, certaines simplifications qui leur ont permis de parachever leur calcul ne sont justifiables que pour les tores de finesse suffisante.

Le critère de cette finesse a d'ailleurs été pris par Johnson et Wu comme **d/D** , quotient qui doit donc être petit pour que la finesse soit grande. Des scrupules d'ingénieur nous ont incité à adopter la convention inverse dans le présent texte, à savoir le critère **D/d** qui, lorsqu'il est grand, désigne une finesse également grande…

[91] Nous le nommons *jointif* car il n'a plus de passage au centre (*closed torus* ou *horn torus*, en anglais)…

Si notre lecture est bonne, Johnson et Wu ne précisent pas entre quelles limites la finesse **D/d** (ou **d/D**, cela revient ici au même) doit se trouver. Mais on peut noter qu'ils cantonnent l'analyse de leur solution aux finesses **D/d** allant de **2** à l'**infini** (soit un quotient **d/D** courant de **0,5** à **0**).

Ils limitent même certaines comparaisons qualitatives, nous le verrons, à la finesse **D/d** de **3,3** (pour comparaison, la finesse du tore vert ci-dessus est de **~3**.

D'autre part, nous le verrons, le libellé de leurs résultats souffrent de singularités mathématiques qui, par exemple, annulent les dénominateurs pour la finesse **D/d** de **2,16**…

Pour le tore se déplaçant axialement (c.-à-d. dans le sens de son axe de révolution **z'z**, voir notre tore vert ci-dessus), c.-à-d. encore de façon telle qu'aucun élément du tore ne se trouve en amont ou en aval d'un autre élément, le problème admet une symétrie de révolution (autour de l'axe **z'z**). Johnson et Wu prédisent pour la Traînée *au mètre de longueur* du tore la valeur suivante (par *Traînée au mètre de longueur*, il faut comprendre la Traînée totale divisée par la longueur développée **π D**) :

$$\frac{4\pi\mu V}{\mathrm{Ln}\left(8\frac{D}{d}\right)+\frac{1}{2}}+O(\varepsilon^2)=\frac{4\pi\mu V}{\mathrm{Ln}\left(\frac{D}{d}\right)+2{,}58}+O(\varepsilon^2)$$

…libellé où le terme **O(ε²)** est un reliquat censé être faible aux finesses **D/d** suffisamment fortes.

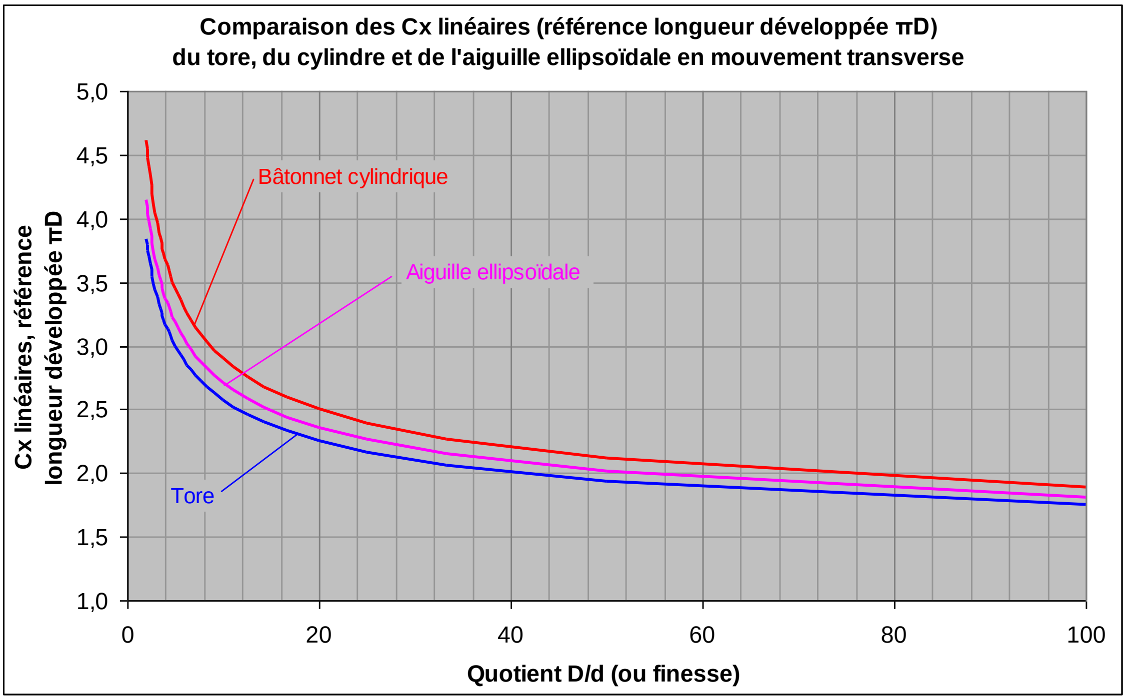
Ce même libellé est également celui avancé par Masuda pour un anneau mince.

Comme toujours, en régime de Stokes, on constate la présence au numérateur du produit **μV** ; si la longueur caractéristique en est absente, c'est que cette Traînée est déjà établie en référence à la longueur développée **π D**. On peut donc tirer sans effort de cette formulation le C_x linéaire du tore en référence à cette même longueur développée (en négligeant le reliquat **O(ε²)**) :

$$\boxed{C_{xLin\,\pi D}=\frac{4\pi}{\mathrm{Ln}\left(\frac{D}{d}\right)+2{,}58}}$$

…qui est le C_x linéaire du tore en déplacement axial (c.-à-d. parallèle à son axe de révolution **z'z**, voir notre schéma du tore vert) et **en référence à la longueur développée π D du tore**, ce libellé n'étant valide que pour les grandes finesses **D/d** (disons **D/d** > **10**), **D** étant le diamètre générateur du tore et **d** son petit diamètre (voir toujours notre schéma),.

Fort de ce résultat, Johnson et Wu se livrent à une série de comparaison, spécialement avec le cylindre de faible longueur (ou bâtonnet) dont la Traînée est bien connue :



Pour effectuer cette comparaison de la Traînée du tore (en bleu ci-dessus) avec celle du bâtonnet (en rouge ci-dessus), ils ont pris un diamètre de bâtonnet de **d** et une longueur de bâtonnet **π D** (**D** et **d** étant les deux diamètres du tore) : ils ont donc calculé la Traînée des bâtonnets droits de longueur telle qu'enroulés, ils auraient pu représenter le tore [92]…

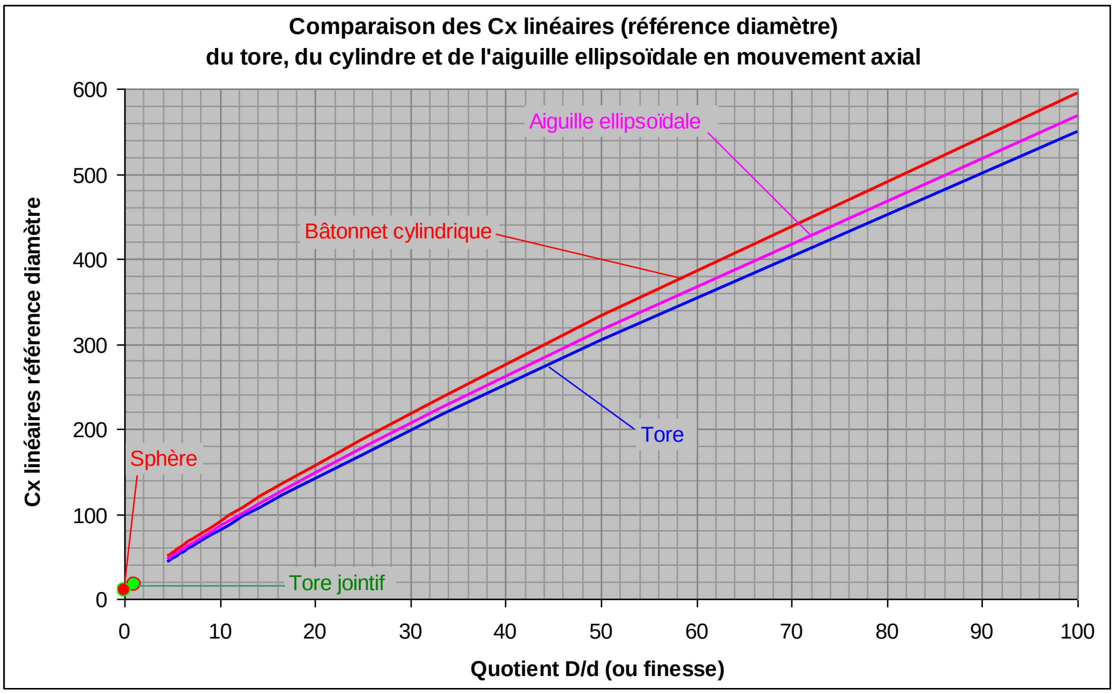
Et ils ont pratiqué de même avec des aiguilles ellipsoïdales de longueur **π D** (courbe fuchsia).

Cette comparaison des trois courbes montre bien que, pour les fortes finesses **D/d**, le tore connaît une Traînée du même ordre que le bâtonnet cylindrique et l'aiguille ellipsoïdale, forte finesse où chaque élément du tore ne ressent que peu l'influence des éléments diamétralement opposés (du fait de la grande importance relative de **D**).

Bien que ces trois courbes dévoilent probablement une tendance réaliste, il faut cependant se souvenir que les calculs de Johnson et Wu ne sont justement plus valides pour les faibles finesses (disons en dessous de la finesse **D/d = 5**), comme d'ailleurs les libellés donnant sur ce graphe le C_x linéaire (en référence longueur) des bâtonnets et des aiguilles ellipsoïdales [93]…

Il est très parlant de présenter la comparaison entre les C_x linéaires des mêmes trois corps établis cette fois <u>en référence au petit diamètre **d**</u> (ce diamètre **d** étant celui du *fil* qui, enroulé, constitue le tore, ou celui du bâtonnet cylindrique, ou le petit diamètre de l'aiguille ellipsoïdale :

[92] Seule la Traînée des bâtonnets droits est connue, au demeurant…
[93] Si l'on veut plus de précision, il faut utiliser la formulation réservée aux ellipsoïdes quelconques…

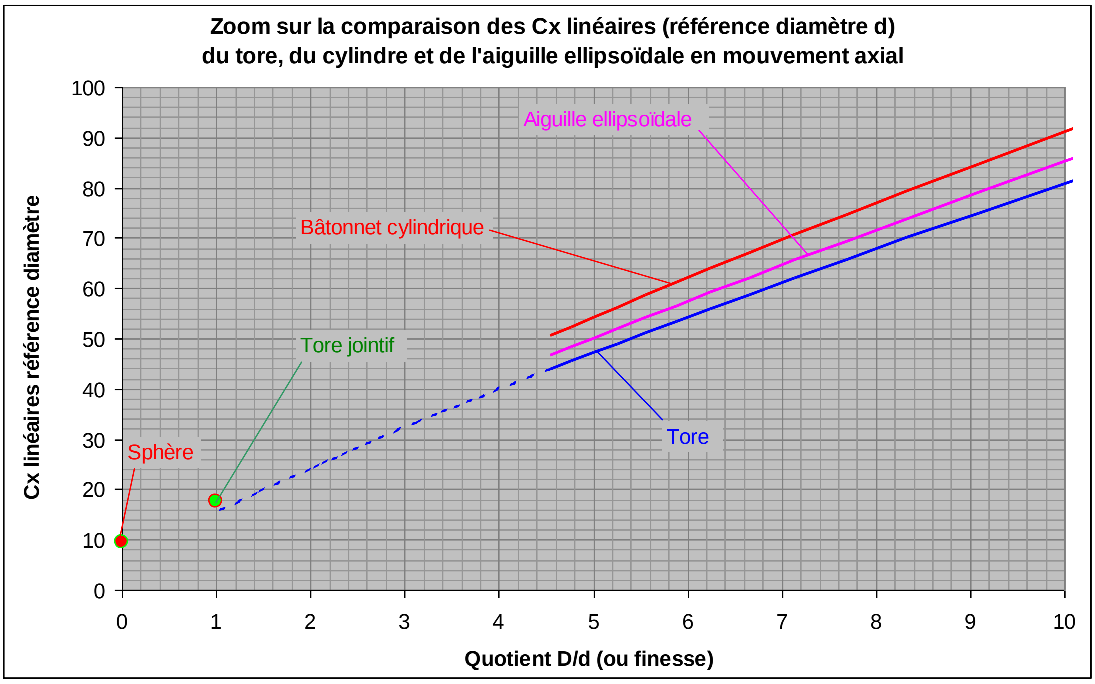


Le tore apparaît toujours en bleu. Si les calculs de Johnson et Wu avaient été fait sans aucune simplification et étaient valable pour les faibles finesses, cette courbe bleue devrait passer :

→ par le C_x linéaire (en référence à **d**) du tore jointif [94] (c.-à-d. le tore de **D/d = 1**), que Takagi a calculé en 1973 comme valant **5,6 π** ,

→ et passer également par la marque de la sphère (**3π**) pour la finesse **D/d = 0**, le diamètre **d** étant cependant défini.

Comme on le voit sur le graphe (et encore mieux sur le zoom suivant où nous avons prolongé la courbe de Johnson et Wu) c'est presque le cas…



[94] Tore qui n'a plus de passage en son centre…

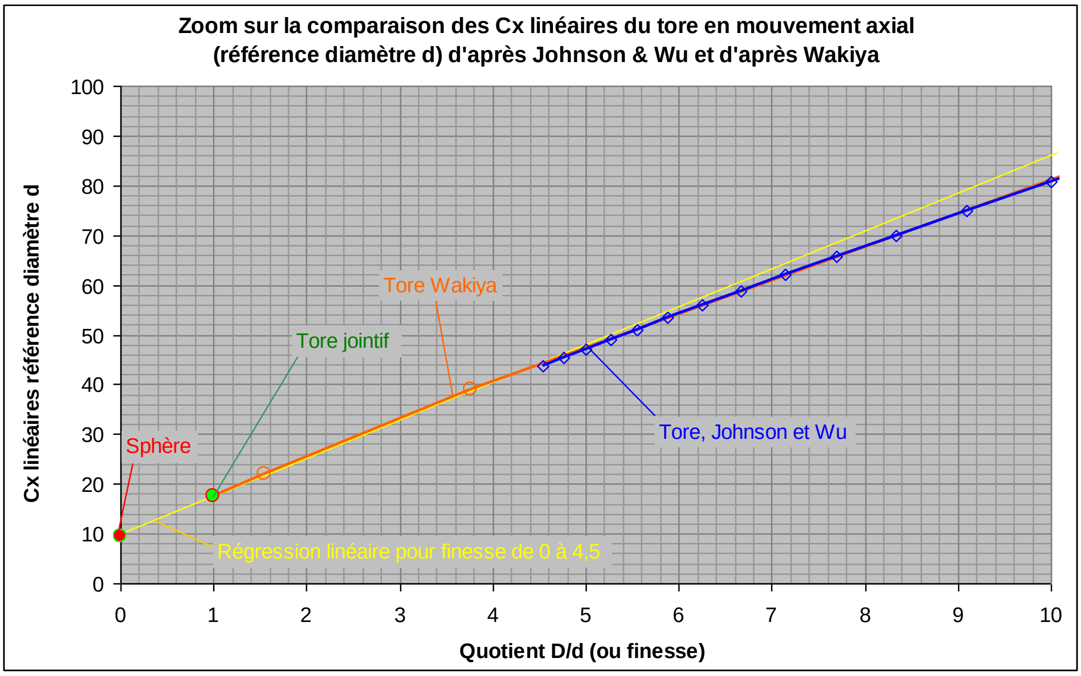
Ce dernier C_x linéaire (en référence **d,** trait plein bleu ci-dessus) est libellé comme suit :

$$\boxed{C_{xLin\ d} = \frac{4\pi^2 \frac{D}{d}}{Ln\left(\frac{D}{d}\right) + 2{,}58}}$$

…qui est le C_x linéaire du tore en déplacement parallèle à son axe de révolution **z'z** (voir notre schéma du tore vert) et en référence à son petit diamètre **d**, ce libellé n'étant valide que pour les grandes finesses **D/d** (disons **D/d > 5D**), **D** étant le grand diamètre (ou diamètre générateur) du tore (voir toujours notre schéma).

(le dénominateur de ce C_x linéaire posera évidemment des problèmes pour la finesse **D/d = 0,0758**, finesse pour laquelle l'étude de Johnson et Wu n'a pas été conçue…)

Shoichi Wakiya a calculé également le tore en mouvement axial dans son texte. Ses résultats confirment les calculs de Johnson & Wu mais semblent plus précis pour les petites finesses :



Sa courbe orange passe par le tore jointif. Si on aperçoit encore cette courbe orange derrière le trait bleu de Johnson et Wu, c'est parce qu'elle présente des facettes puisque Wakiya ne la calcule pas, par exemple, entre les finesses **D/d 3,76** et **10,07** [95]. L'accord de ces différents auteurs est donc magnifique…

Au passage, Wakiya précise la valeur de Takagi que nous avons donné plus haut pour le tore jointif (ou fermé) : son C_x linéaire vaut **5,6125 π** (en référence à son petit diamètre **d** ou, évidemment, à son grand diamètre **D**).

[95] Ces « facettes » sont évidemment les cordes des arc de la courbe qui existeraient entre les points calculés…

La rectitude de la courbe orange de Wakiya entre les abscisses **1**, **1,54** et **3,76** donne évidemment l'idée d'une régression linéaire consacrée aux petites finesses **D/d**. Ce pourrait être la droite jaune, qui nous semble réaliste pour les finesses **D/d** allant de **0** à **4,5** :

$$C_{xLin\,d} \approx 7{,}6*D/d + 10$$

(le libellé de cette régression linéaire indique que pour **D/d = 0** elle n'honore pas tout à fait les **3 π = 9,425** de la sphère, mais le respect de cette valeur extrême de **D/d** peut n'être pas exigé)

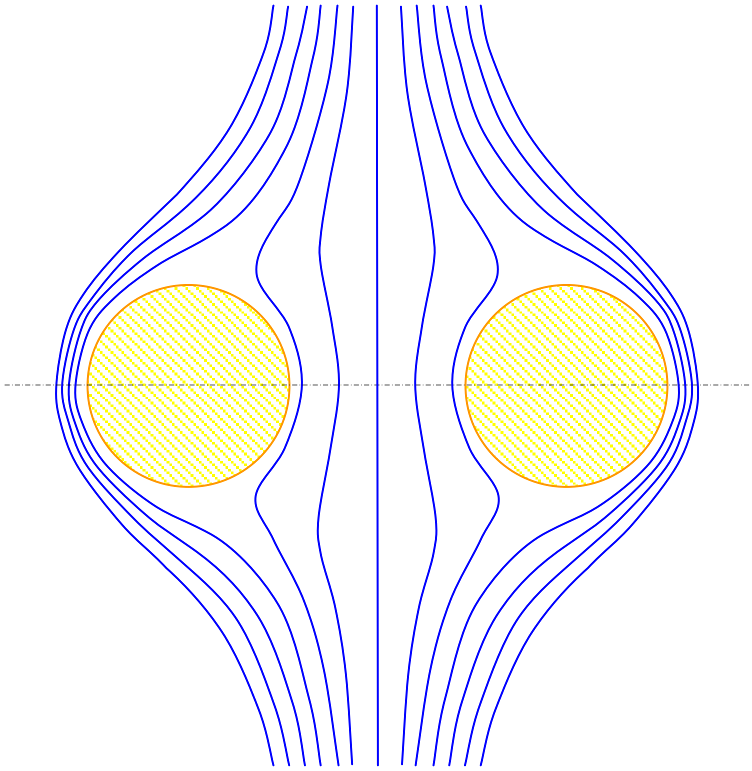
Pour les grandes finesses **D/d**, Wakiya tire de ses résultats généraux la conclusion que la Traînée vaut :

$$F = \frac{4\mu V D \pi^2}{Ln\left(8\frac{D}{d}\right) + 0{,}5}$$

…(qui agrée avec le libellé de Masuda pour l'anneau mince et qui nous conduit au même libellé du C_x linéaire que celui que nous avons tiré de Johnson et Wu, dès lors qu'on le base sur le même diamètre **d** (cependant Wakiya la réserve aux très grandes finesses **D/d**, c.-à-d. à partir de **D/d = 75**)…

P. Krokhmal, de l'Université de Floride a également effectué les très complexes calculs visant à déterminer la Traînée du tore. Dans son texte, il ne publie ses résultats que sous forme de graphe, mais ils sont tout à fait comparables à ceux de Wakiya.

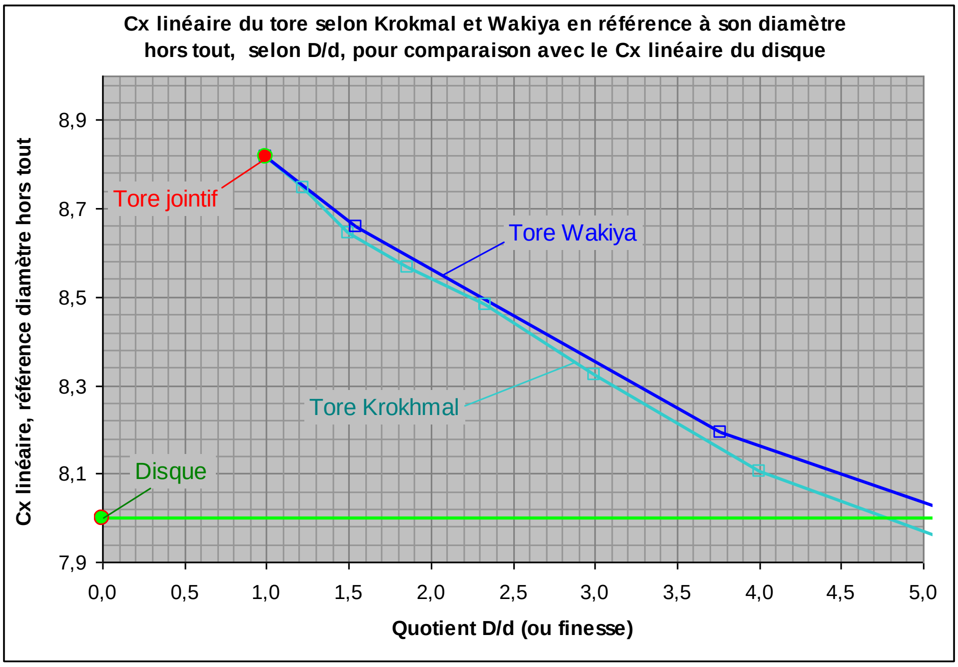
Dans ce même texte, on trouve une belle image montrant les lignes de courant autour du tore, image que nous avons reproduite ci-dessous :



L'espacement des lignes de courant dans le passage interne au tore montre bien que le flux y est moins important qu'à l'extérieur (si l'on part du principe que les lignes de courant ont été réparties régulièrement loin du corps)…

Krokhmal indique d'ailleurs dans un graphe à quel point le flux passant au centre du tore est très ralenti.

Cela nous donne l'idée d'exprimer le $\mathbf{C_x}$ linéaire du tore en référence <u>à son diamètre extérieur</u> (ou « hors tout ») afin de le comparer avec le disque :



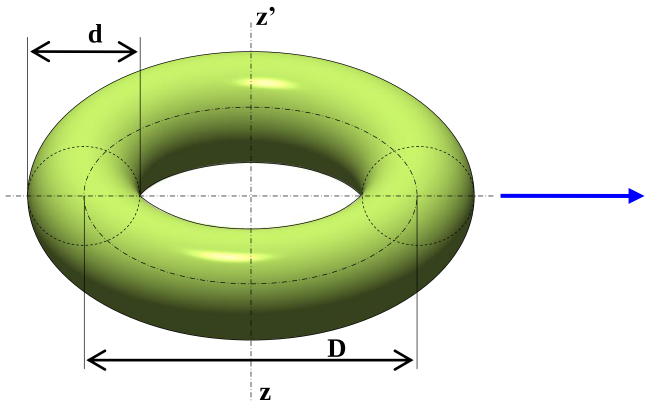
Le disque est ici représenté par un trait horizontal vert fluo (pour lui, la notion de *finesse* n'est pas définie) ; en bleu dense est la courbe (déjà vue) calculée par Wakiya et en bleu plus clair la courbe calculée par Krokhmal et capturée par nous sur son graphe (les petites irrégularités de la courbes bleu clair sont dues à nos erreurs de captation sur le graphe de Krokhmal).

On voit que bien que si le tore jointif refuse tout passage en son centre (comportement qui le rapproche du disque), il présente (sans doute) plus de surface de friction et montre conséquemment plus de Traînée que le disque…

Ce qui est curieux par contre (et édifiant) c'est que la courbe ne montre pas une tangence horizontale à son sommet (à la finesse **1** du tore jointif) : comme l'écoulement est très entravé dans le passage au centre du tore, on aurait pu s'attendre que les deux cas « un petit trou central » ou « pas de trou du tout » produisent à peu près la même Traînée ; ce n'est pas le cas…

<u>Cx linéaire du tore en déplacement dans son plan :</u>

Ce n'est plus dans la direction **z'z** que le tore va se déplacer, mais dans la direction perpendiculaire :



Pour ce type de déplacement *coplanaire*, Johnson et Wu prédise une Traînée au mètre de longueur (comprendre toujours la Traînée totale divisée par la longueur <u>développée</u> $\boldsymbol{\pi}$ **D**) valant :

$$\frac{3\pi\left(\mathrm{Ln}\left(\frac{D}{d}\right)-0{,}754\right)\mu V}{\left(\mathrm{Ln}\left(\frac{D}{d}\right)+0{,}08\right)\left(\mathrm{Ln}\left(\frac{D}{d}\right)+1{,}58\right)-2}+O\left(\varepsilon^2\right)$$

En négligeant le dernier terme $\mathbf{O(\varepsilon^2)}$, censé être faible aux grandes finesses **D/d**, il est aisé d'en tirer notre sérénissime $\mathbf{C_x}$ linéaire (toujours en référence $\boldsymbol{\pi}$ **D**) :

$$C_{xLin\,\pi D} = \frac{3\pi\left(Ln\left(\frac{D}{d}\right) - 0{,}754\right)}{\left(Ln\left(\frac{D}{d}\right) + 0{,}08\right)\left(Ln\left(\frac{D}{d}\right) + 1{,}58\right) - 2}$$

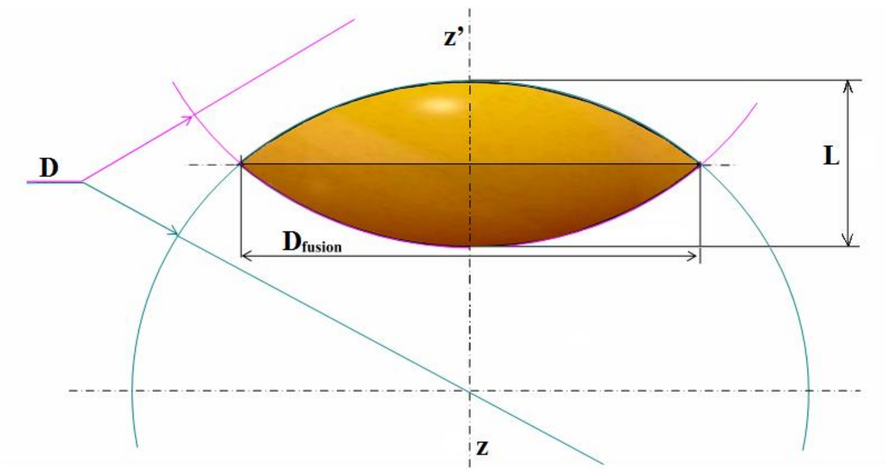
…qui est le C_x linéaire du tore en déplacement dans son plan, en référence à sa longueur développée **π D**, formule valide pour les grandes finesses **D/d** (disons **D/d** > **5D)**, **D** étant le grand diamètre du tore et **d** son petit diamètre (voir notre schéma).

Bien que nous ne sachions pas quel est la limite inférieure des élancements possibles (en dessous de quelle limite cet énoncé n'est plus valide), il est notable que pour la finesse **D/d ≈ 2,16** le dénominateur dudit énoncé s'annule. Ce qui signifie qu'à l'approche de cette finesse l'énoncé lui-même n'est plus réaliste…

Au demeurant, ainsi que nous l'avons dit plus haut, Johnson et Wu ont limités certaines de leurs comparaisons du libellé ci-dessus à la finesse **D/d = 3,33**…

Cx linéaire de la lentille sphérique et des deux sphères fusionnées en déplacement axial :

Ces corps sont formés par l'intersection de deux sphères, la sphère de couleur glauque, en bas et une sphère égale (de même diamètre) en fuchsia :



Nous verrons plus loin dans ce texte qu'à l'instar des grands mathématiciens qui ont calculé la Traînée de cette lentille sphérique biconvexe, nous utiliserons parfois le diamètre dit $\mathbf{D_{fusion}}$ qui est le diamètre où les deux sphères génératrices fusionnent.

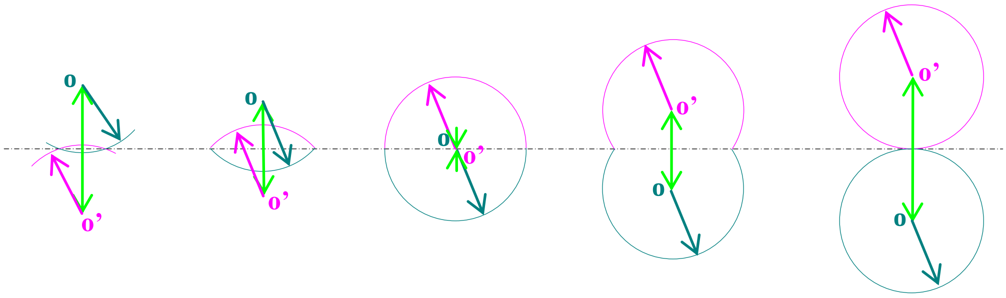
D'autres fois ce sera le diamètre **D** des deux sphères génératrices fuchsia et glauque que nous utiliserons…

Lorsque les deux centres **o** et **o'** des sphères se rapprochent l'un de l'autre, le corps formé par les deux sphères prend de l'épaisseur (deuxième schéma, ci-dessous).

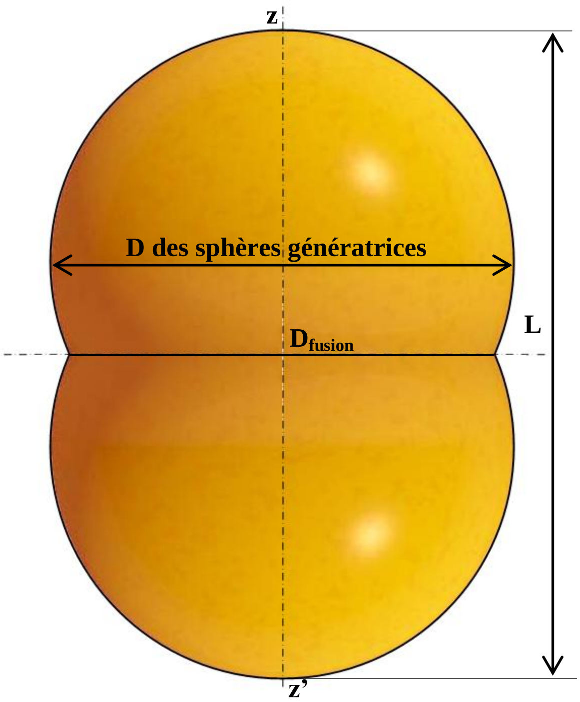
Lorsque les deux centres sont confondus, les deux sphères engendrent une sphère unique (troisième schéma ci-dessous).

Puis, si ces deux centres continuent toujours chacun dans la même direction (après s'être croisés), la distance entre ces centres augmente et se forme un corps à l'allure de graine d'arachide (quatrième schéma ci-dessous), corps que nous appellerons, comme les auteurs auxquels nous nous réfèrerons, *sphères fusionnées*.

Lorsque la distance des deux centres atteint un diamètre de sphère génératrice, les deux sphères sont tangentes (schéma de droite) :



Le troisième corps, en *graine d'arachide*, est celui-ci :

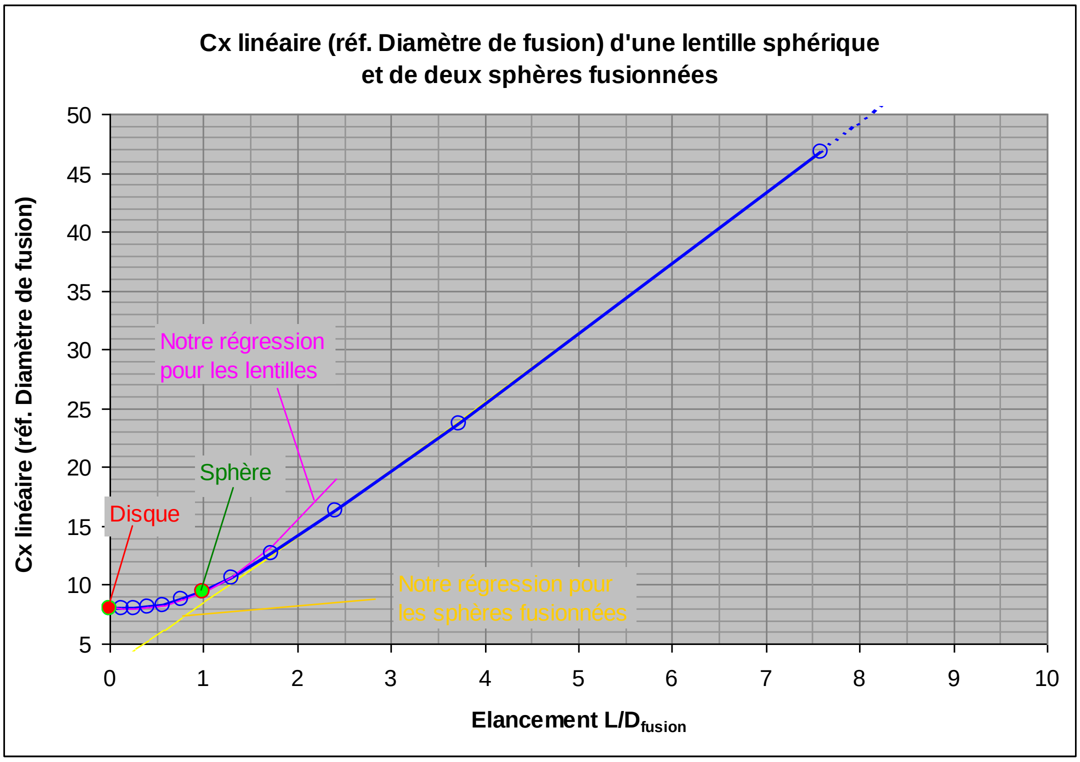


La partie centrale du corps peut s'appeler cercle de fusion (des deux sphères) et le diamètre de ce cercle **D**$_{\mathbf{fusion}}$, sera encore utilisé

Le mouvement axial (selon l'axe **z'z**) admet évidemment une symétrie de révolution.

Dans un texte d'une très haute tenue mathématique, Michael Zabarankin et Andrei F. Ulitko réalisent le calcul de la Traînée axiale des corps présentés par nous à l'instant (lentilles et sphères fusionnées); ils produisent un tableau donnant le quotient de cette Traînée par la Traînée d'une sphère de diamètre égal au diamètre du cercle de fusion (nommé $\mathbf{D_{fusion}}$ par nous dans notre présentation de ces corps)…

Il nous est assez facile d'en tirer (en multipliant les valeurs de ce tableau par **3 π**) le **C_x** linéaire des corps (lentilles ou sphères fusionnées [96]) ; cela donne la courbe bleu dense ci-dessous :



Le choix des abscisses en **L/D_{fusion}** permet de représenter le disque (qui est un cas extrême de la lentille pour lequel **L/D_{fusion} = 0**) et la sphère (corps formé de deux lentille hémisphérique pour laquelle **L / D_{fusion} = 1**).

Cet élancement **L / D_{fusion}** (**L** étant la hauteur physique des corps, mesurée d'un pôle à l'autre) n'a pas vraiment de signification physique au dessus de l'élancement unitaire (pour les sphères fusionnées), mais le choix de cette abscisse dessine à partir de l'abscisse **2** une courbe très proche de la droite (voir la régression linéaire jaune qui chemine derrière la courbe en bleu dense.

Cela nous a surpris dans un premier temps, car quand l'espacement des centres des sphères génératrices continue de croître (au-delà de l'abscisse **7**) le corps formé s'approche du corps formé par deux sphères tangentes, cas où le diamètre de fusion se réduit à zéro.

On peut alors penser que les ordonnées, le **C_x** linéaire en référence à ce diamètre de fusion, va alors tendre vers l'infini. C'est exact, mais il faut aussi songer que les ordonnées elles-mêmes tendent vers l'infini.

Autrement dit, la courbe bleue, pour ce cas singulier des deux sphères tangentes, jette un rayon vers le coin en haut à droite du cadran où notre graphe est dessiné…

Au demeurant, effectuer le quotient **$C_{xLin\ Réf\ Dfusion}$ / [L / D_{fusion}]** donne une bonne idée du devenir de la courbe pour les grandes ordonnées…

---

[96] La lentille est elle-même un corps composé par la fusion de deux sphères, mais nous continuerons à la nommer *lentille*…

Or ce quotient (qui est la pente de la courbe au point de tangence (soit à l'abscisse **L/D**$_{\text{fusion}}$ [97])s'écrit :

$$\frac{C_{xLin\ Réf\ D_{fusion}}}{L / D_{fusion}}$$

…ce qui n'est autre que le $\mathbf{C_x}$ linéaire des mêmes corps en référence à leur longueur (soit $C_{xLin\ Réf\ L}$). [98]

<u>La pente du rayon qui prolonge la courbe bleu dense vers le haut à droite du cadran du graphe est donc finie !</u>

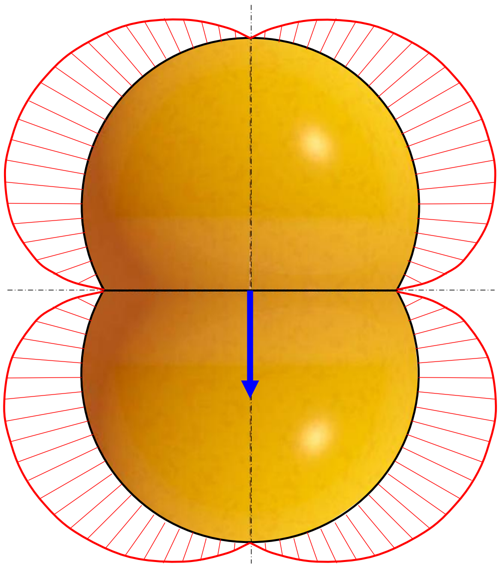
On peut même la calculer dans la région du graphe où le cercle de fusion s'amenuise et où se prépare la tangence des deux sphères. En effet, le $\mathbf{C_x}$ linéaire de deux sphères tangentes (<u>en référence **D** des sphères génératrices</u>) est connu : c'est $\mathbf{C_{xLin\ Réf\ D} = 12{,}186}$.

Nous avons dit que la pente vaut $C_{xLin\ Réf\ L}$, soit deux fois moins (soit **6,093**).

Cette pente est la petite prolongation tiretée que nous avons dessinée sur le graphe ci-dessus : Comme cette pente est celle qui existe « à l'abscisse du point de tangence » (donc infiniment à droite, sur le graphe), on doit admettre que cette pente de la courbe bleu dense « à l'infini » est très peu différente de la celle de la courbe bleu à l'abscisse **7,60**…

Dans le même texte, Zabarankin et Ulitko dessine la distribution des frictions sur le corps formé par les deux sphères fusionnées lors de son mouvement de décantation vertical :

Distribution des frictions sur les sphères fusionnées



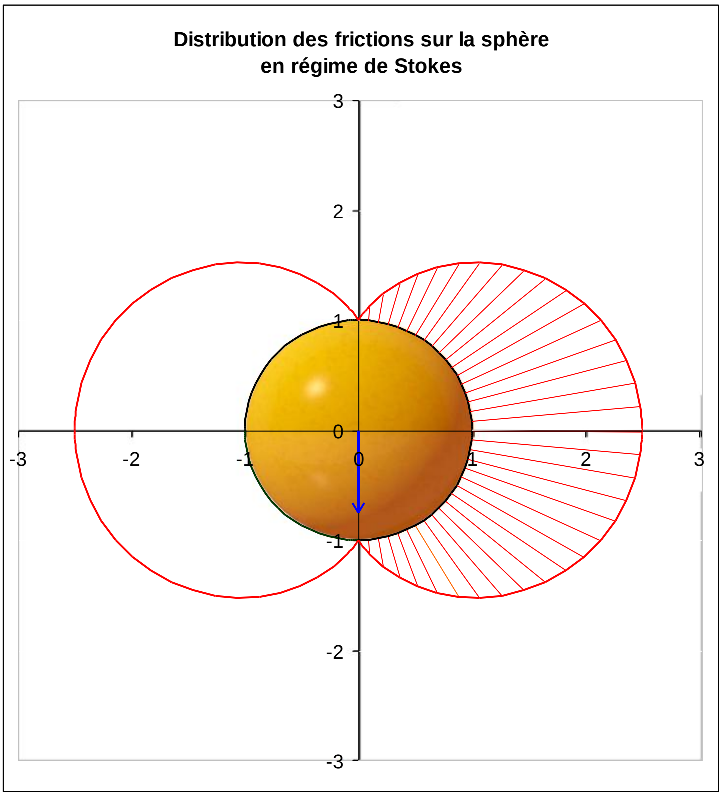
[97] À l'abscisse ou les deux sphères sont tangentes, qui est très à droite, puisque $\mathbf{D_{fusion}}$ y est nul…

[98] En effet, ce quotient réalise le produit du $\mathbf{C_x}$ linéaire des corps en référence **D fusion** par ce diamètre $\mathbf{D_{fusion}}$ (ce qui donne la Traînée, aux coefficients **μ** et **V** près) et rediviser cette Traînée par **L** produit le $\mathbf{C_x}$ linéaire de ces corps en référence **L**…

Pour ces deux sphères fusionnées, nous ne savons pas lire quantitativement ce diagramme [99]. Par contre, qualitativement, on peut noter que, par raison de symétrie, la friction est nulle aux deux points d'arrêt (le point d'arrêt amont et le point d'arrêt aval) : en effet, en ces deux points, la symétrie impose que la friction ne s'exerce ni vers la droite, ni vers la gauche (ce qui créerait une dissymétrie) : elle est donc nulle.

La retombée à zéro de la contrainte de friction au cercle de fusion est, par contre, fort intéressante. Ce retour à la nullité dans les angles fermés est surement à retenir…

La distribution des frictions ci-dessus est évidemment à comparer à la distribution des frictions sur la sphère, telle que calculée par Stokes :



On y retrouve bien la même nullité des frictions aux deux points d'arrêt.

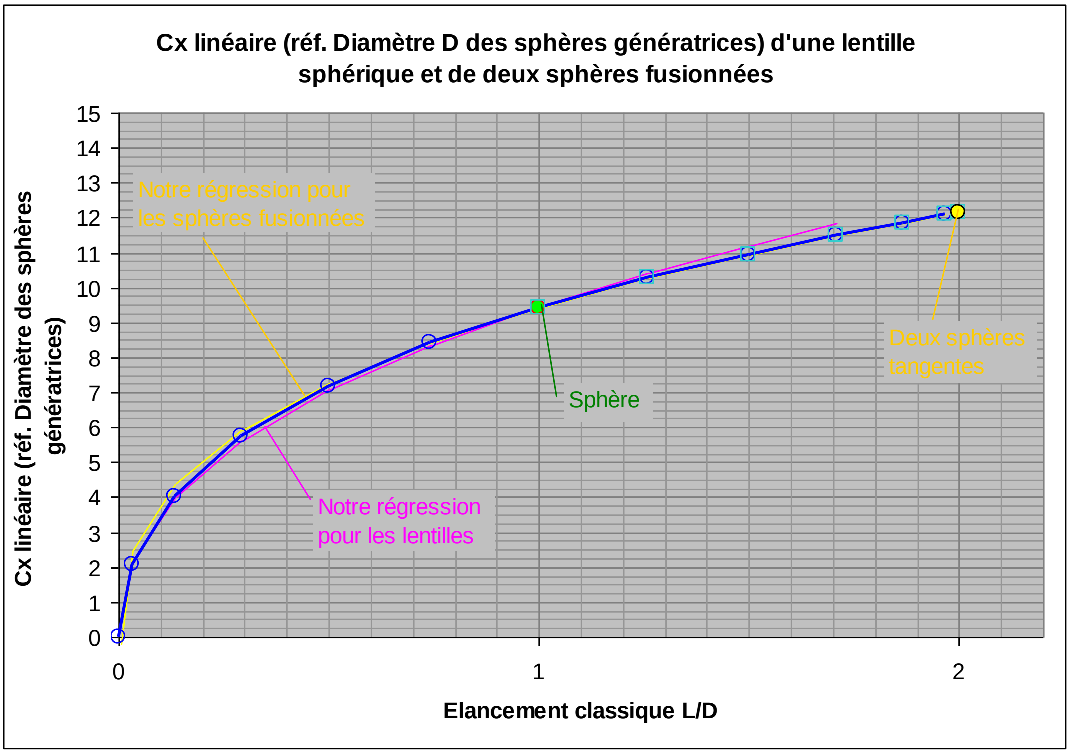
Un autre constat qui peut être fait est que ces distribution de friction sont symétriques dans le sens amont – aval (la partie haute des courbes est symétrique de la partie basse) : cela est dû à la réversibilité des mouvements en régime de Stokes…

Pour la sphère, la contrainte de friction maximale se situe sur le côté (au maître couple) et vaut **1,5**.

Mais revenons au $\mathbf{C_x}$ linéaire complet de nos corps. Ce $\mathbf{C_x}$ linéaire peut être exprimé en référence, non pas au diamètre de fusion (comme précédemment), mais au

[99] Les auteurs font appel à la notion de *vorticité* (qui est équivalente à notre *rotationnel*) et adimensionnalisent ce diagramme à partir du rayon du cercle de fusion ; une fois de plus nous atteignons nos limites mathématiques…

diamètre **D** des sphères génératrices. Cela donne ce graphe qui prend l'élancement **L/D** plus classique comme ordonnée ("plus classique" sinon pour les lentilles, du moins pour les sphères fusionnées [100]) (voir la définition de cette longueur **L** sur nos schémas déjà présentés) :



La courbe bleu dense est toujours issue des calculs de Zabarankin et Ulitko. Dans un autre texte signé en 2007 de son seul nom, Michael Zabarankin redonne également la Traînée des sphères fusionnées en déplacement axial : ce sont les marques carrées bleu clair circonscrites aux marques rondes bleu dense précédentes.

Ce C_x linéaire en référence **D** admet une régression jaune très précise pour les corps d'élancement supérieur ou égaux à l'unité et allant jusqu'à **1,97** compris [101] :

$$\mathbf{C_{xLin\,D} = 10{,}22\,(L/D)^{0{,}342} - 0{,}79}$$

Cette régression est précise à **0,06 %** sur cette plage, ce qui est exceptionnel…

Une autre régression (en fuchsia) est nécessaire pour les lentilles :

$$\mathbf{C_{xLin\,D} = 10\,(L/D)^{0{,}395} - 0{,}525}$$

Elle n'est précise qu'à **1,73 %** entre les élancements **L/D** allant de **0,13** à **1,26**, ces bornes comprises [102]…

[100] Pour les lentilles, donc pour les élancements **L/D** inférieurs à **1**, cet élancement n'a plus de signification physique, mais il reste facile à calculer puisque **D**, le diamètre des sphères génératrices, est forcément connu…

[101] …soit presque l'élancement de deux sphères tangentes…

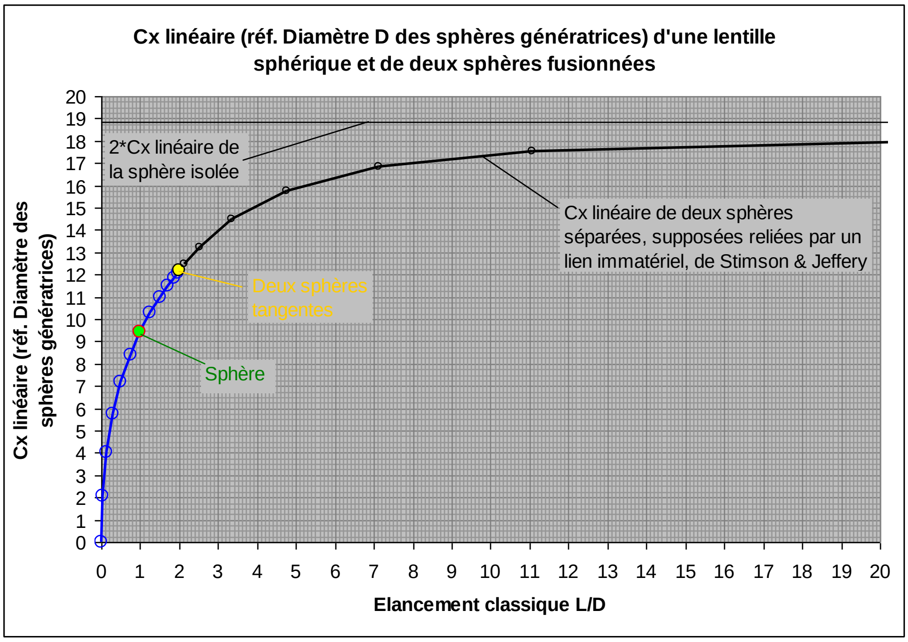
[102] …**L** est ici l'épaisseur de la lentille. On voit la régression est également valable pour la sphère et un peu au-delà…

En 1926, Margaret Stimson et G. B. Jeffery ont calculé la Traînée de deux sphères de même diamètre **D** placées l'une au-dessus de l'autre à une certaine distance et décantant en régime de Stokes (cette distance allant de zéro à l'infini).

Il ne nous a pas été difficile de noter leurs résultats et de transformer leur critère de distance (de centre à centre) en un élancement virtuel qui serait le quotient de la longueur **L** de l'*attelage virtuel* formé par les deux sphères par leur diamètre **D** commun.

Bien-sûr, ledit *attelage virtuel* semble être impossible à réaliser, mais les lois de la Physique font que la Traînée de ces deux sphères en mouvement est la même et donc que, à Masse volumique égale, ces deux sphères vont décanter *de conserve* [103], comme si leur distance était maintenue par un fil immatériel.

Ce phénomène nous permet donc de proposer une extension aux courbes de Zabarankin et Ulitko (extension noire, ci-dessous):

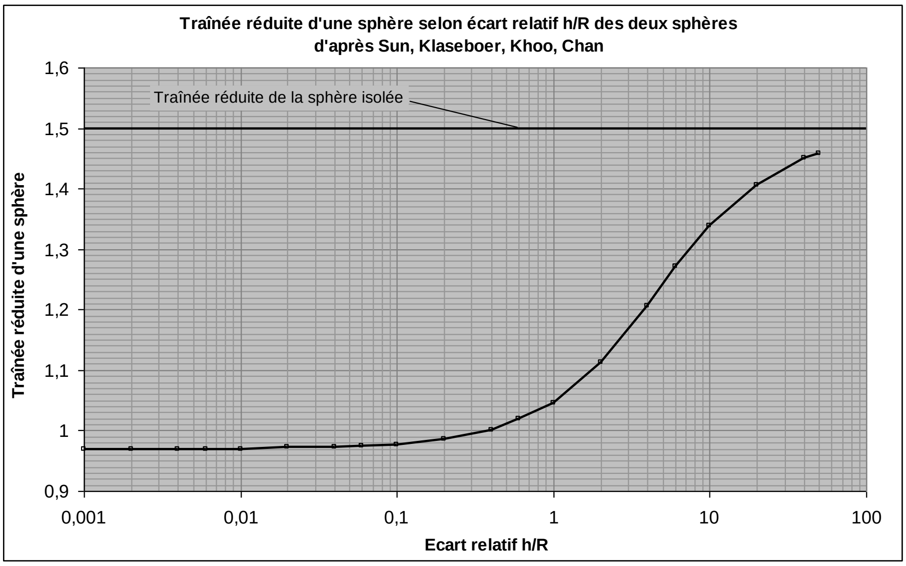


Cette extension se présente tout à fait bien à son raccordement avec la courbe bleu dense.

L'observation de l'extension noire indique que lorsque les sphères sont proches, elles souffrent d'une Traînée totale notablement plus faible que les **2*3π = 18 ?85** qu'elles endureraient si elles étaient à très grande distance l'une de l'autre (asymptote horizontale noire à cette ordonnée). À l'abscisse **11** (distance de centre à centre de **10 diamètres**), par exemple, chaque Traînée est encore plus faible de **7 %** par rapport à la Traînée de la sphère isolée…

[103] « *de conserve* » est l'expression consacrée, dans la Marine, pour signifier que deux navires font route en gardant la même distance l'un de l'autre. Par extension, quand deux marins blessés se suivent à la même distance en boitant, on peut donc dire qu'ils « boitent de conserve »…

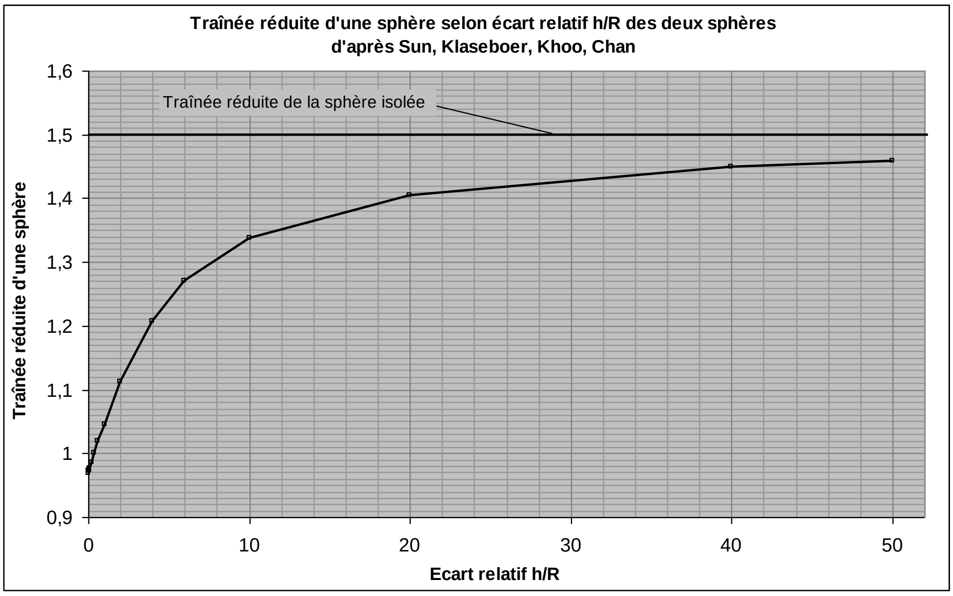
Dans un texte abordant les choses de façon plus générale, les chercheurs Sun, Klaseboer, Khoo et Chan précisent la Traînée d'un couple de sphères de même diamètre en mouvement parallèle à la ligne de leurs centres :



Ce graphe de la Traînée réduite d'une seule des deux sphères, à cause de ses abscisses logarithmiques, nous renseigne bien sur l'évolution de la Traînée pour les petits écarts relatifs (ceux-ci étant le quotient de l'écart **h** entre les sphères et leur rayon **R** identique) : pour les petits écarts relatifs, la Traînée évolue assez peu.

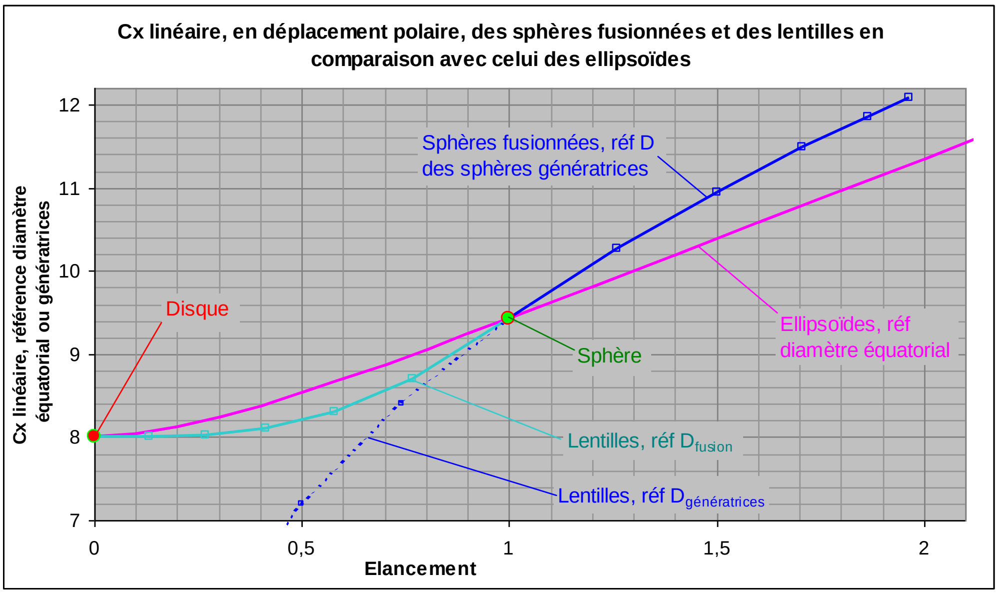
Par contre, pour les forts écarts relatifs, la Traînée de chaque sphère tend asymptotiquement vers la Traînée de la sphère isolée…

La forme en **S** de cette courbe peut paraître curieuse, mais elle n'est que le fruit de la représentation logarithmique des abscisses. Une représentation cartésienne simple donne ce résultat :



La conversion de cette Traînée réduite d'une sphère en le C_x linéaire des deux sphères (en référence à leur diamètre identique **D**) ainsi que la conversion de l'écart relatif **h/R** en l'élancement virtuel **L/D** précédemment utilisé par nous est aisé. Ce travail d'adaptation redessine parfaitement la courbe noire de Stimson et Jeffery montrée plus haut (ce qui semblait probable au vu de la forme de la courbe ci-dessus)…

Ce serait manquer à notre devoir de vulgarisateur que de ne pas montrer la comparaison du C_x linéaire des sphères fusionnées avec celui de corps qui leur sont assez proches : les ellipsoïdes de révolution (que nous avons étudiés plus haut) :



Pour les élancements **L/D** supérieurs à l'unité, le C_x linéaire des sphères fusionnées (en référence au diamètre des sphères génératrices) se fait petit à petit plus fort que celui de l'ellipsoïde (calculé en référence à son diamètre équatorial, soit le diamètre de la section frontale au déplacement).

Pour les élancements **L/D** inférieurs à l'unité, le C_x linéaire des lentilles en référence au diamètre **D** des sphères génératrices (en bleu dense tireté) prolonge la courbe des sphères fusionnées (en référence au même diamètre des sphères génératrices). Cependant, ce diamètre n'a plus ici de signification physique et il est plus utile d'adopter un C_x linéaire en référence au diamètre de fusion (courbe bleu clair) : la comparaison avec l'ellipsoïde de révolution très aplati et le disque est alors naturelle.

Une tentative d'explication de la place respective des différents C_x linéaires sur le graphe précédent serait celle-ci :

→ Au dessus de l'élancement unitaire (celui de la sphère), la striction existant au cercle de fusion des sphères fusionnées augmente peut-être la Traînée, comme la forme plus obtuse de leurs extrémités (par rapport aux formes plus progressives des ellipsoïdes allongés).

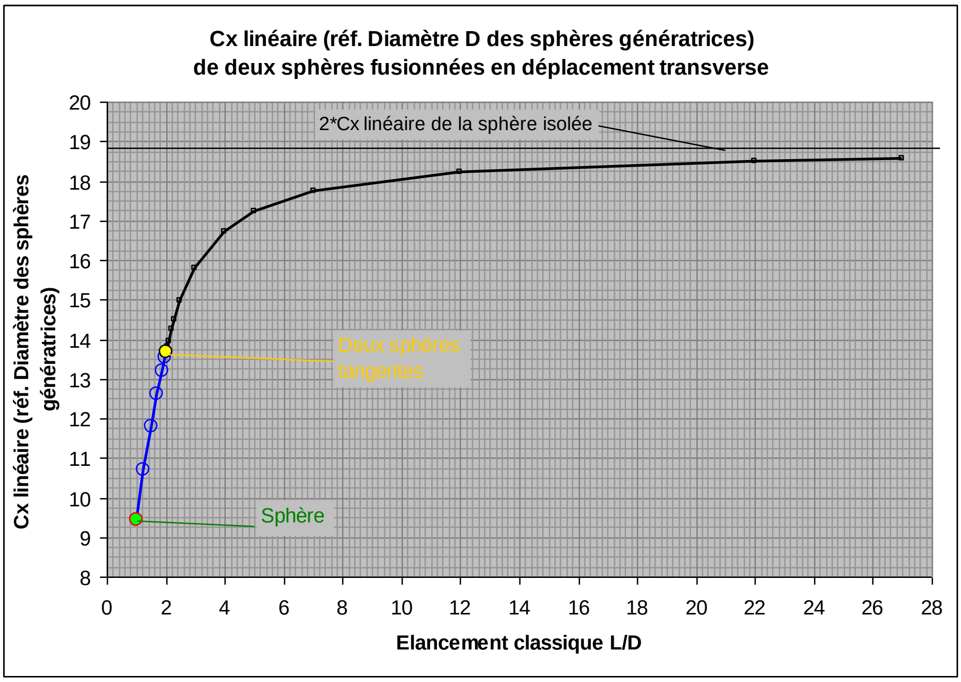
→ En dessous de l'élancement unitaire les lentilles présentent peut-être moins de surface mouillée…

Il faut admettre cependant que ces tentatives d'explications sont purement spéculatives et constituent plus des interrogations que des affirmations.

Cx linéaire de la lentille sphérique et des deux sphères fusionnées en déplacement transverse :

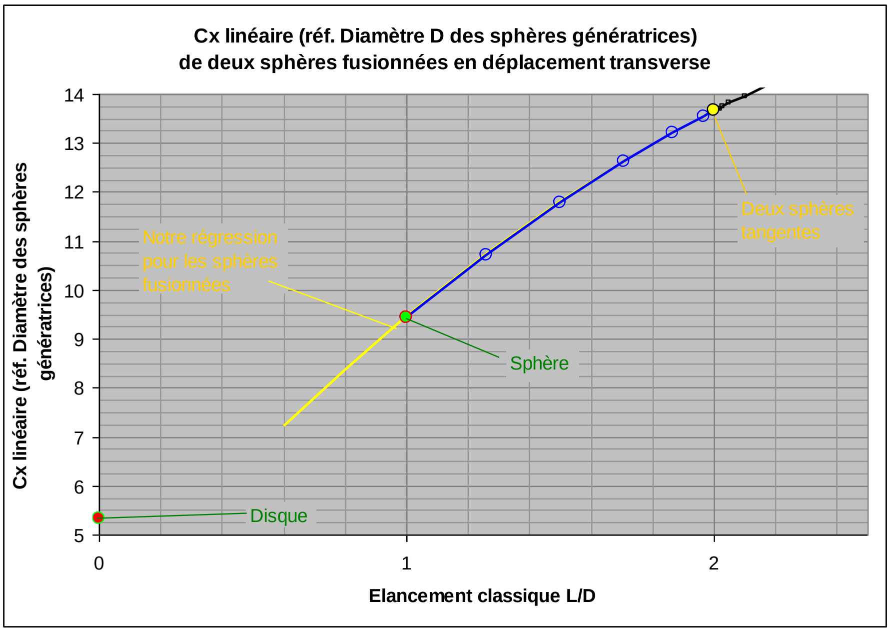
Par *déplacement transverse* nous voulons signifier *déplacement dans un sens perpendiculaire à leur axe de révolution*.

Michael Zabarankin dans son texte donne également la Traînée des sphères fusionnées en mouvement transverse, soit en déplacement perpendiculaire à leur grand axe (et axe de symétrie) ; cela nous permet de dessiner la courbe bleu dense ci-dessous :



La prolongation noire vers le haut est tirée du texte de Sun et coll. déjà cité, comme la valeur du C_x linéaire des deux sphères tangentes toujours en déplacement transverse (en référence à leur diamètre commun **D**), cas que les historiques Stimson et Jeffery n'ont pas abordé dans leur texte.

Nous n'avons malheureusement eu accès à aucune donnée sur le déplacement des lentilles perpendiculairement à leur axe de symétrie ou de révolution, ce qui interrompt la courbe bleu dense à l'élancement unitaire de la sphère ; mais il est très probable que le C_x linéaire des lentilles les plus épaisses (élancements de **0,6** à **1**) puissent être pris en charge par notre régression jaune pour les sphères fusionnées (élancements de **1** à **2**), régression que nous avons dû épaissir afin qu'on la voit derrière la courbe bleu dense, ci-dessous :



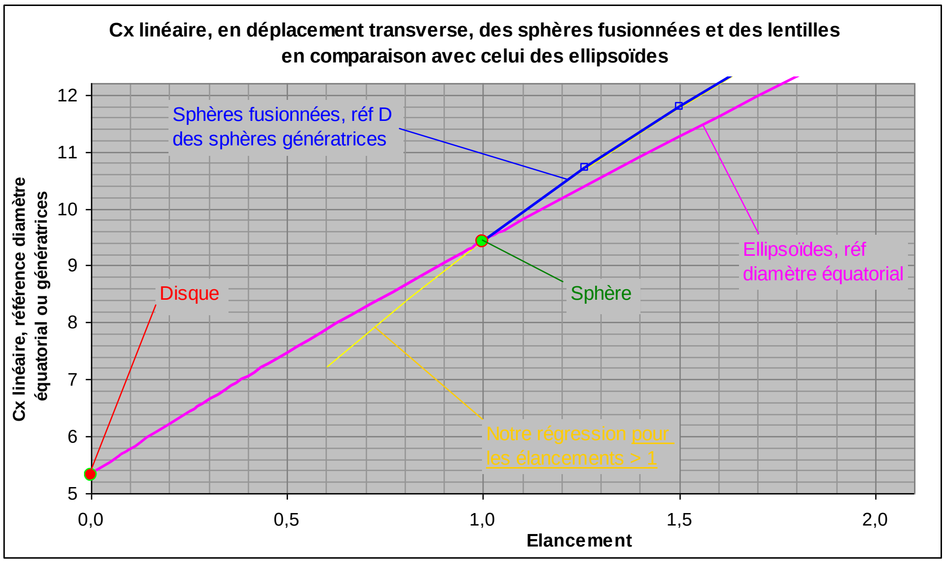
En effet cette régression jaune semble viser de façon satisfaisante le $\mathbf{C_x}$ linéaire du disque en déplacement dans son plan (**5,33**).

Cette régression jaune s'écrit :

$$\mathbf{C_{xLin\ D} = -(L/D)^2 + 7{,}2\,(L/D) + 3{,}25}.$$

Elle est précise à **0,27 %** pour les sphères fusionnées entre les élancements **1** et **2** compris mais, bien-sûr, nous ne pouvons estimer sa précision en dessous de l'élancement unitaire...

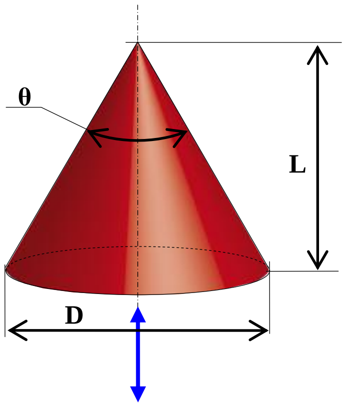
De même que précédemment pour les déplacements axiaux des sphères fusionnées ou lentilles, nous nous faisons un devoir (et un plaisir) de présenter la comparaison entre le $\mathbf{C_x}$ linéaire de ces même corps en déplacement transverse avec le $\mathbf{C_x}$ linéaire des ellipsoïdes de révolution en déplacement transverse :



Ici encore, la striction existant à mi-longueur des sphères fusionnées semble grever les sphères fusionnées par rapport aux ellipsoïdes de même diamètre [104] et de même élancement…

Cx linéaire du cône en déplacement axial :

La figure 4.9 de Clift et coll. dont nous avons réalisé la captation plus haut donne le Quotient de Traînée calculé d'un cône d'angle au sommet **60°** :



Ce cône de **60°** d'angle au sommet **θ** présente, d'après nos reconstitutions, un C_x linéaire de **7,735,** en référence **D**.

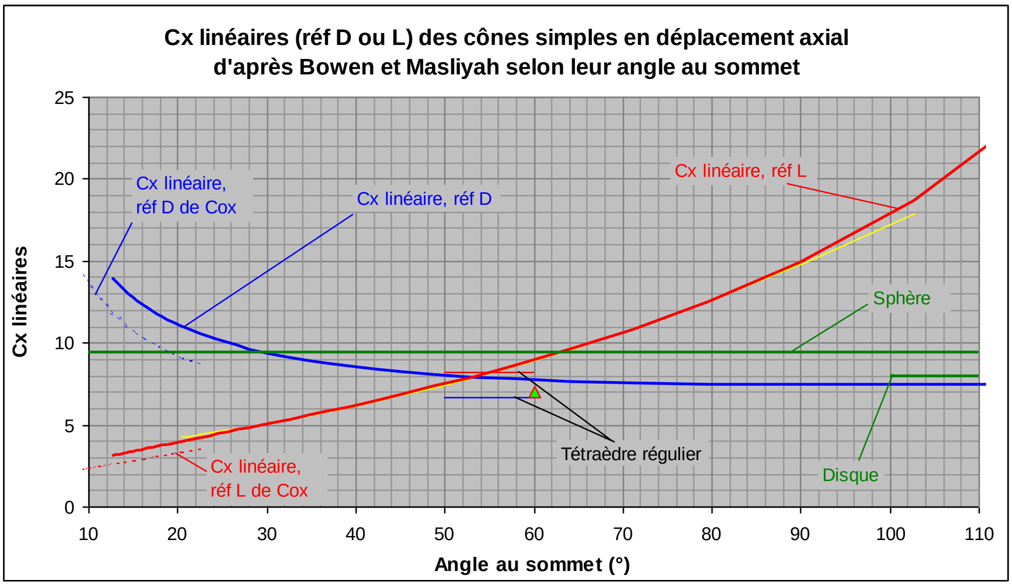
Ce $\mathbf{C_x}$ linéaire est la seule valeur expérimentale que nous ayons trouvée pour ce type de corps, mais elle se tient assez près de la courbe bleu dense de Bowen et Masliyah. Nous l'avons représenté sur le graphe ci-dessous sous la forme d'un triangle isocèle rouge à cœur vert.

L'utilisation du mode de calcul de Bowen et Masliyah, à savoir l'utilisation du critère **Σ** :

$$\Sigma = \frac{\text{Aire de la particule}}{\text{Aire de la sphère de périmètre équivalent}}$$

…promet les évolutions suivantes des $\mathbf{C_x}$ linéaires des cônes selon leur angle au sommet :

[104] …même diamètre puisque le $\mathbf{C_x}$ linéaire est établi en référence au diamètre des corps…



Comme on le verra à l'instant, le quotient des ordonnées de la courbe bleue sur les ordonnées de la rouge vaut toujours l'élancement **L/D** : elles se croisent donc pour l'angle **53°** qui est celui où l'élancement vaut **1**.

Il est utile de remarquer que le C_x linéaire de ce cône simple exprimé en référence au diamètre (courbe bleue) reste assez proche de celui du disque pour les angles au sommet supérieur à **50°** ; notre graphe ne le montre pas, mais la courbe bleue remonte pour les angles supérieurs à **110°** pour s'approcher de l'ordonnée **8** du disque (ordonnée qu'elle n'atteint pas tout à fait puisque pour cette abscisse elle culmine à **7,57**, ce qui est presque bon)…

Pour cette famille de corps, c'est le C_x linéaire établi en référence à la longueur **L** (ou hauteur au-dessus de la base circulaire) qui propose la régression la plus simple (en jaune derrière la courbe rouge) :

$$C_{xLin\,L} = 0{,}0011\,\theta^2 + 0{,}03\,\theta + 3{,}2$$

…**θ** étant l'angle au sommet du cône en degré…

Cette régression pourra peut-être avoir une valeur indicative en cas de besoin pour les cônes d'angles au sommet pas trop écarté de **60°** (angle du cône dont nous disposons d'une Traînée mesurée)…

À titre de comparaison, nous avons indiqué le C_x linéaire de la sphère (horizontale verte car nous ne savons à quelle abscisse le rattacher).

Nous avons aussi porté sur ce graphe les C_x linéaires du tétraèdre en référence à son côté **a** (en bleu) et à sa hauteur (en rouge).

De même, nous avons fait apparaître en tiretés les C_x linéaires déterminés par la formulation que nous avons tirée, pour les aiguilles coniques, des calculs de Cox, formulation qui n'est pas légitime ici puisqu'elle est réservée aux forts élancements (disons > **10**, soit un angle au sommet < **5°**) : la forme générale de ces deux courbes ressemble néanmoins beaucoup à celle des courbes calculées selon Bowen et Masliyah…

L'énoncé indiqué implicitement par Cox [105] pour le $\mathbf{C_x}$ linéaire du cône simple (ou plutôt ce que l'on gagnera à appeler *aiguilles coniques*) est :

$$\mathbf{C_{xLin\,L}} = \frac{\mathbf{2\pi}}{\mathbf{Ln(2a/b) - 0{,}5}}$$

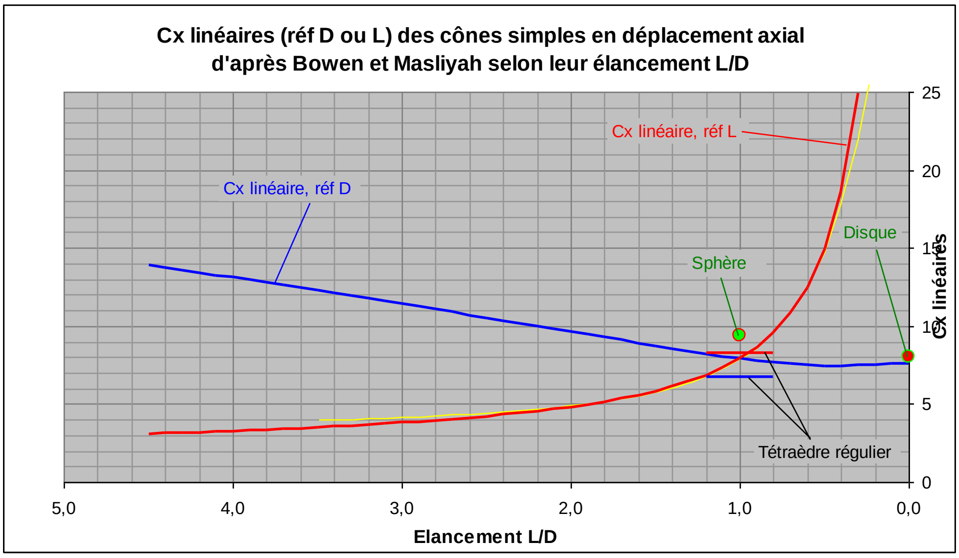
…<u>mais ce libellé comporte un piège</u> dressé involontairement par Cox : le paramètre **b** n'est pas ici le rayon maximal du corps : c'est son demi-rayon (**a** étant sa demi longueur)…

Nous nous expliquons de ce problème plus bas dans l'analyse des travaux de Cox, mais le lecteur pourra noter qu'après correction, le $\mathbf{C_x}$ linéaire des aiguilles conique déplacement axial (en référence à leur longueur totale) est :

$$\mathbf{C_{xLin\,L}} = \frac{\mathbf{2\pi}}{\mathbf{Ln(2\lambda) + 0{,}19315}}$$

Les deux courbes tiretées ne déméritent pas si l'on songe qu'elles sont réservées aux aiguilles coniques, c.-à-d. à des corps d'élancement supérieur à (disons :) **10** et que de tels élancements correspondent à des angles au sommet inférieurs à **5,7°**, ce qui bien en dehors du graphe…

Bien-sûr, une autre présentation des ces $\mathbf{C_x}$ linéaires est possible : celle qui prend les élancements comme abscisses :



Les deux courbes étant toujours dans la proportion **L/D**, elles se croisent pour l'élancement **L/D = 1**.

[105] Il calcule, pour l'aiguille simplement conique en déplacement transverse, la valeur du reliquat au dénominateur comme valant **+ 0,5** en précisant que ce reliquat vaux **1 –** celui qu'il attribue à la même aiguille simplement conique en déplacement axial.

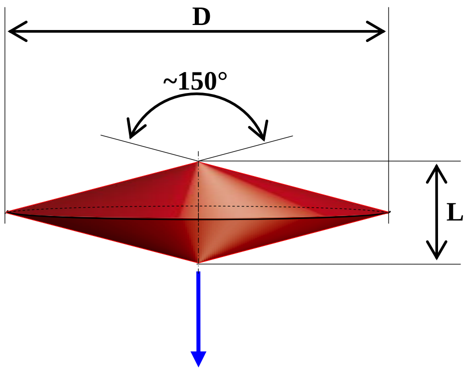
On retrouve également sur ce graphe notre régression parabolique jaune, ainsi que la sphère et le disque, placés cette fois à leur élancement…

S'agissant de la stabilité du mouvement des cônes simples, Jayaweera et Mason écrivent, dans la présentation de leur texte :

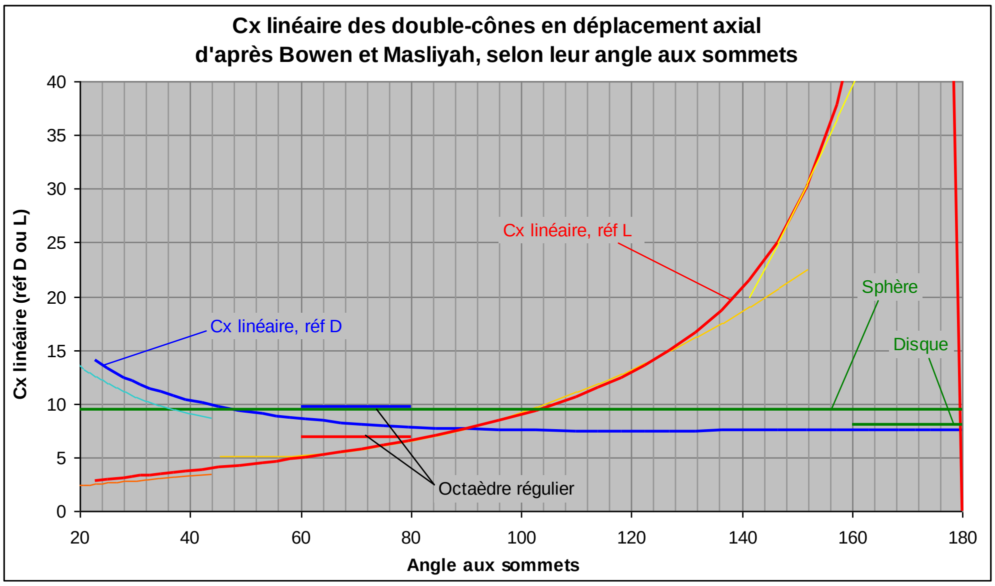
« Cones with a flat base fall with apex upwards if the vertex angle θ < ¼π and with apex downwards if θ > ¼π. »

Cx linéaire du double-cône (ou bicône) en déplacement axial :

Nous avons vu plus haut que Clift et coll. ont comparé les pronostics de Bowen et Masliyah avec certaines données expérimentales. Parmi ces données figurent un double cône (à l'extrême droite de la courbe bleue sous la forme d'un losange rouge ceint de vert). D'après notre travail de restitution, ce double cône présente deux angles aux sommets de **~150°** :



En suivant les prescriptions de Bowen et Masliyah, nous avons pu déterminer C_x linéaire des doubles cônes selon l'angle au sommet de leurs deux pointes :



Il est notable que pour les angles aux sommets supérieurs à **90°**, le C_x linéaire en référence diamétrale reste assez constant et proche de celui du disque (il tourne autour de **7,6** et, en toute logique devrait rejoindre celui du disque –c.-à-d. **8** – à l'abscisse **180°**, ce qu'il ne fait pas)…

Pour comparaison nous avons encore porté sur ce graphe le **C_x** linéaire de la sphère et du disque, ainsi que celui de l'octaèdre régulier, double pyramide qui ressemble à un double cône avec des facettes : en rouge ce **C_x** linéaire est donné en référence à la longueur ou hauteur de ce tétraèdre, en bleu il est donné en référence à son côté **a**.

Dans la couleur jaune sont des régressions paraboliques valables pour deux plages d'angles aux sommets **θ** ; leur équation est :

$$\mathbf{C_{xLin\,L} = 0{,}0017\,\theta^2 - 0{,}1722\,\theta + 9{,}43}$$

…valable, comme on le voit, pour les angles aux sommets **60** à **95°**, à moins d'accepter une erreur supérieure, ce qui pousse la plage jusqu'à **130°**…

Autour des angles aux sommets **150°**, une autre régression possible (en jaune également) est :

$$\mathbf{C_{xLin\,L} = 0{,}006\,\theta^2 - 0{,}75\,\theta + 5{,}9}$$

…mais, de toutes façons, le **C_x** linéaire en référence au diamètre reste proche de **7,6** autour de cet angle de **150°**.

À la gauche du même graphe apparaissent en bleu plus clair et en orange les **C_x** linéaires du double-cône que Cox a calculés pour les grands élancements de ce corps.

Bien que le calcul de Cox soit ici inapproprié (l'élancement du double-cône pour un angle aux sommets de **20°** n'est que de **5,7**), ces courbes de Cox raccordent de façon très satisfaisante avec ces parties extrêmes des courbes dégagée d'après les travaux de Bowen et Masliyah (ce qui tend à justifier et ces travaux et ceux de Cox)).

L'énoncé de Cox pour les double-cônes (ou plutôt ce que l'on gagnera à appeler *aiguilles biconiques*) est :

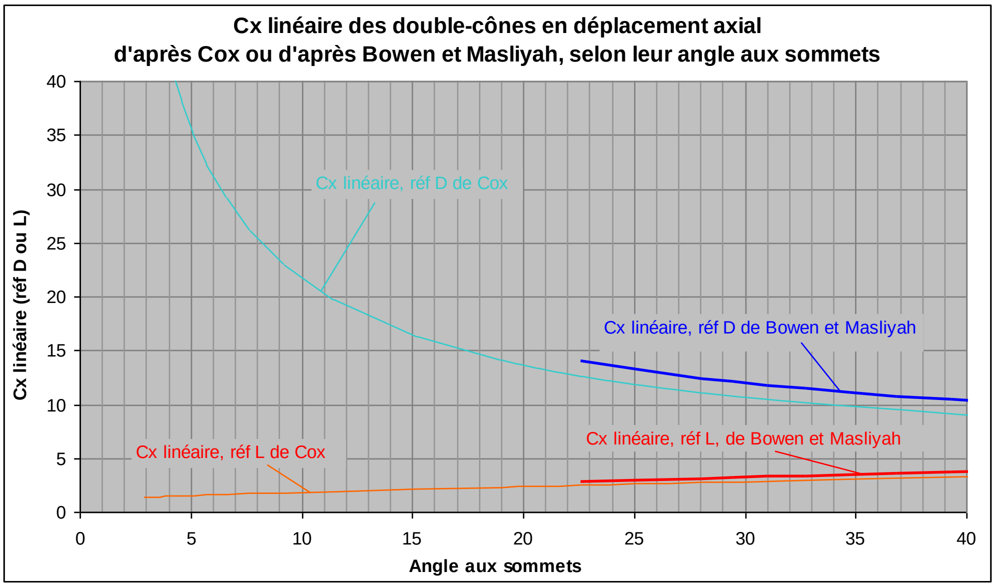
$$\mathbf{C_{xLin\,L} = \frac{2\pi}{Ln(2\lambda) + 0{,}19315}}$$

…qui est le **C_x** linéaire des *aiguilles biconiques* en déplacement axial (en référence à leur longueur totale), **λ** étant l'élancement de ces double-cônes.

Il est notable que ce libellé est le même que pour les *aiguilles coniques* (formée d'un simple cône), ce qui est troublant mais non dénué de logique [106]…

Montrons d'ailleurs ces résultats de Cox pour les très petits angles aux sommets des aiguilles biconiques :

[106] La surface latérale d'un cône est, à très peu près, **πRL** si la longueur **L** de ce cône est grande devant **2R**. La surface d'un bicône de même rayon maximal **R** est alors ≈ **πR(L/2) + πR(L/2)**, ce qui donne aussi ≈ **πRL**. La chose qui est troublante avec ce bicône, c'est que la surface **πR²** de la base du cône simple ne soit pas prise en compte par les calculs de Cox, même si elle est **20** fois plus faible que **πRL** pour un élancement de **10**.



Les deux courbes dessinées d'après Cox sont toujours en orange et en bleu plus clair.

Cox fait d'ailleurs remarquer que le $\mathbf{C_x}$ linéaire de ces aiguilles biconiques est plus faible que celui des aiguilles ellipsoïdales de même élancement.

Mais étendons-nous un peu plus sur les travaux de Cox :

Traînée du cylindre et autres corps en déplacements axiaux par R. G. Cox.

Nous avons déjà rencontré plus haut le libellé de Cox donnant la Traînée du cylindre assez long (ou bâtonnet) en déplacements axiaux et nous venons de présenter ses préconisations pour les aiguilles coniques et biconiques.

Il est cependant assez instructif de décrire plus avant les résultats de ce chercheur et leurs limitations. Dans la première partie de son texte, THE MOTION OF LONG SLENDER BODIES IN A VISCOUS FLUID, il expose la méthode mathématique qui lui a permis de dégager un des deux libellés donnant la Traînée des bâtonnets cylindriques d'assez grand élancement : Le libellé de Cox promet à ces bâtonnets cylindrique d'assez grand élancement $\boldsymbol{\lambda}$ un $\mathbf{C_x}$ linéaire en déplacements axiaux de :

$$\mathbf{C_{xLin\ L}} = \frac{\mathbf{2\pi}}{\mathbf{Ln(2\lambda) - 0,80685}}$$

($\mathbf{C_x}$ linéaire établi en référence à la longueur desdits bâtonnets) [107].

Que signifie pour Cox « un assez grand élancement » [108] ? Nous ne saurions le dire avec certitude car, pragmatiquement, seule la confrontation du libellé ci-dessus

[107] Nous donnons ici une version plus complète du coefficient **0,807**…

[108] En fait, la définition des grands élancements en Mécanique des Fluides des hauts Reynolds est que la pente à la surface du corps évolue très lentement avec l'abscisse (prise dans le sens de l'écoulement). Il n'est pas sûr que cette définition convienne à la Mécanique des Fluides des bas Reynolds…

avec la réalité expérimentale peut nous l'apprendre [109] : nous pensons bien-sûr à des expériences de décantation effectuées avec des bâtonnets de divers élancements.

Les travaux d'Ui sur la Traînée des cylindres en déplacement axiaux font, par chance, justice de ce problème : ces travaux donnent le C_x linéaire de Cox quelque **3 %** en dessous de la réalité entre les élancements **10** à **50** et un peu moins au-delà. En dessous de l'élancement **10**, l'énoncé de Cox est même valable jusqu'à l'élancement **6** où il annonce un C_x linéaire trop fort de seulement **0,8 %**.

Les calculs de Cox s'avèrent applicables à un certain nombre de corps en dehors des bâtonnets (nous y reviendrons) et en particulier à l'ellipsoïde de grand élancement (ou aiguille ellipsoïdale), cas où le libellé de Cox devient celui-ci :

$$\mathbf{C_{xLin\,L}} = \frac{\mathbf{2\pi}}{\mathbf{Ln[2\lambda] - 0{,}5}}$$

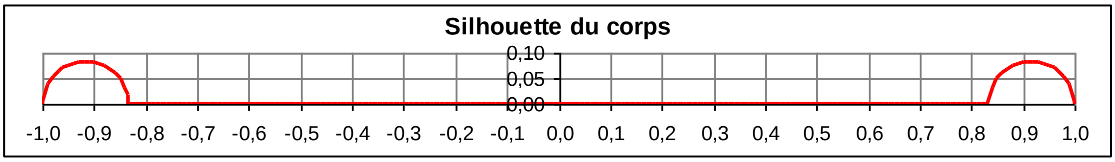
(qui est le C_x linéaire de l'aiguille ellipsoïdale en référence à sa longueur).

Or ce dernier libellé n'est acceptable (nous l'avons comparé plus haut avec la valeur exacte des ellipsoïdes en déplacement axial) que pour les élancements supérieurs à **8** ou **14** (selon la précision requise).

Ce cas particulier des aiguilles ellipsoïdales semble cependant confirmer les calculs de Cox, même s'il ne nous renseigne guère sur la signification de l'expression « d'élancement assez fort ».

Les résultats de Cox étant applicables, en première approche, à beaucoup de corps de façon simple, nous nous somme livré à une série d'essais visant à le mettre en défaut.

Par exemple, nous avons fait dessiner à notre tableur ce corps en haltère d'élancement **22** dont la hampe est tellement fine (son diamètre est **1/100ème** de celui des deux sphères) que l'on peut songer à négliger sa Traînée (nous reparlerons de cet libéralité plus bas) :



L'intégration de Cox (réalisée graphiquement par notre tableur) attribue un C_x linéaire diamétral à ces deux sphères (séparées d'un écart de **20 diamètres**) de **~ 9,62**.

Ces deux sphères séparées de cet écart relatif **20** devrait présenter à elle deux un C_x linéaire (relatif à leur diamètre commun) de **~ 2*9,15** ainsi qu'il apparaît sur le graphe que nous étudierons plus bas [110], graphe établi d'après les travaux de Sun,

[109] Le C_x linéaire de la sphère, **3 π**, a été établi par G. G. Stokes pour des Reynolds très inférieurs à l'unité mais dans les faits, il donne de bons résultats jusqu'au Reynolds unité…

[110] À cet écart relatif, finalement, les deux sphères ont presque leur C_x linéaire de corps isolé de **3 π**, ce qu'indiquent l'horizontale pointillée rouge.

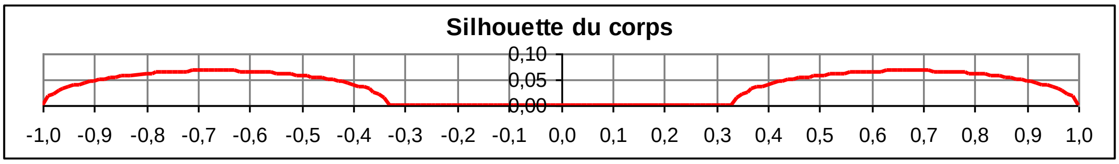
Klaseboer, Khoo et Chan entre autres : pour ce cas particulier, le calcul de Cox nous paraît donc s'éloigner de la vérité…

Nous sommes d'ailleurs gêné de réaliser que si l'on passe le diamètre de la hampe de **1/100ème** du diamètre des sphères à **1 millionième**, le $\mathbf{C_x}$ linéaire de chacune des sphères (toujours espacées de 20 diamètres) passe à **4,45**.

Et si l'on passe ce diamètre de hampe à $\mathbf{10^{-10}}$ fois celui des sphères, le $\mathbf{C_x}$ linéaire de chacune des sphères passe à **2,9**…

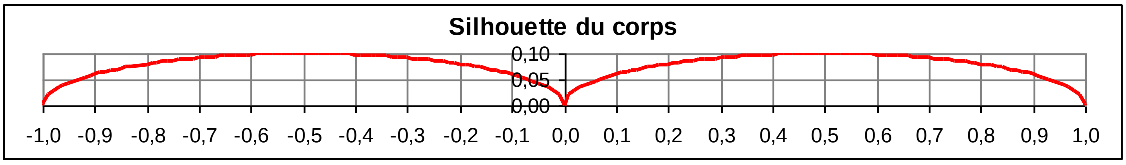
À notre sens, c'est accorder beaucoup de Traînée à une hampe qui n'a presqu'aucune consistance physique !

De même le corps composite formé de deux ellipsoïdes d'élancement **5** séparés par une longueur met en défaut le calcul de Cox :



Nous avons gardé pour ce nouveau cas une hampe de diamètre **1 millionième** plus faible que celui des ellipsoïdes. Le $\mathbf{C_x}$ linéaire, référence diamètre, de chaque ellipsoïde est alors calculé à **6,35**, ce qui hisse son $\mathbf{C_x}$ linéaire référence longueur à **1,270**. Or le graphe utilisé à l'instant prédit pour cet ellipsoïde d'élancement **5** éloigné d'une longueur de son jumeau, un $\mathbf{C_x}$ linéaire de **~ 3** en référence à sa longueur.

Par contre, si nous créons le corps formé par deux ellipsoïdes d'élancement **5** en contact :



…notre tableur intègre la Traînée de chaque ellipsoïde comme étant **2,462**, ce qui est assez proche de l'abscisse de la courbe la plus basse du même graphe à l'ordonnée nulle (écart relatif nul).

Ce constat est encourageant car il légitime le calcul de Cox pour ce corps formé de deux ellipsoïdes d'élancement **5** en contact, corps qui peut être vu également comme un corps d'élancement **10** à taille de guêpe…

Nous verrons d'ailleurs plus bas que le $\mathbf{C_x}$ linéaire d'un tel couple d'ellipsoïdes jumeaux en contact est très proche de celui d'un ellipsoïde d'élancement double (à savoir **10**) : cet ellipsoïde d'élancement **10** apparaît d'ailleurs également à l'abscisse nulle sur le même graphe ; Cox attribue à cet ellipsoïde un $\mathbf{C_x}$ linéaire (réf. **L**) de **2,518** [111].

Ce $\mathbf{C_x}$ linéaire de l'ellipsoïde d'élancement double est d'ailleurs troublant car il est de même ordre que celui du corps "à taille de guêpe". Nous pensons pourtant que

[111] Mais en utilisant le libellé pour les aiguilles elliptiques. Le vrai $\mathbf{C_x}$ linéaire est un tout petit peu plus faible…

cette quasi-égalité des $\mathbf{C_x}$ linéaires représente bien la réalité de ce qui se passe en régime de Stokes lorsque l'on donne une taille de guêpe à un ellipsoïde.

Mais la question se pose quand-même de comprendre pourquoi nos corps « à hampe très fine » n'ont pas été calculés correctement par la méthode de Cox.
Cette méthode utilise des mathématiques de haut vol qui ne sont pas de notre ressort. Par contre nous pouvons décrire ce que nous en avons compris :

Le libellé des $\mathbf{C_x}$ linéaires (en référence Longueur) qu'il est possible de tirer (très facilement) des résultats de Cox (en négligeant les éléments de second ordre) est celui-ci :

$$C_{x\text{Lin Réf L}} = \frac{2\pi}{\mathrm{Ln}(2\lambda) + C_1}$$

…le coefficient $\mathbf{C_1}$ prenant les valeurs :

–0,80685 pour les cylindres *assez long* ou bâtonnets cylindriques,

–0,5 pour les aiguilles ellipsoïdales,

+0,19315 pour les doubles cônes (que nous avons appelés plus haut des bicônes).

Pour les aiguilles ellipsoïdales, nous l'avons déjà vu, la valeur **–0,5** du coefficient $\mathbf{C_1}$ écrit le libellé :

$$C_{x\text{Lin Réf.L}} = \frac{2\pi}{\mathrm{Ln}(2\lambda) - 0{,}5}$$

…qui est admis universellement pour les aiguilles ellipsoïdales en déplacements axiaux (c'est une simplifications pour les forts élancements de l'équation dévolue aux ellipsoïdes de tous élancements
Notons que ce libellé de Cox pour les aiguilles ellipsoïdales est celui proposé par d'autres auteurs pour le bâtonnet cylindrique (même reliquat $\mathbf{C_1 = –0,5}$) ; c'est ce que l'on voit sur ce graphe, où, pour les élancements supérieurs à **10**, les courbes jaune (pour le bâtonnet) et bleue (pour l'ellipsoïde) deviennent indiscernables aux plus fortes abscisses.
Ceci étant, Cox calcule, quant à lui, pour le bâtonnet cylindrique un reliquat $\mathbf{C_1}$ de **–0,80685**, bien différent de **–0,5**.

Le libellé pour le bicône établi à l'instant est, à notre sens, une découverte qui a été assez peu relayée par les autres auteurs.

Mais le plus curieux dans tous ces résultats de Cox, c'est qu'ils sont tirés d'une équation, l'équation (7.9) qui est celle-ci [112] :

[112] Nous avons ici exprimé notre $\mathbf{C_x}$ linéaire directement d'après la Traînée donnée par Cox, en négligeant les termes de second ordre…

$$C_{x\text{Lin Réf.L}} = 2\pi\left[\frac{1}{Ln(\lambda)} - \frac{1}{Ln(\lambda)^2}\{C_1 + Ln(2)\}\right]$$

Or cette équation se simplifie assez facilement en :

$$\boxed{C_{x\text{Lin Réf.L}} = 2\pi\left[\frac{Ln\left(\frac{\lambda}{2}\right) - C_1}{Ln(\lambda)^2}\right]}$$

…rédaction à peine plus compliquée que la rédaction retenue par Cox (et qui est très répandue pour les cylindres et les aiguilles elliptiques).

Attention au fait que dans cet encadré, le coefficient $\mathbf{C_1}$ est précédé d'un signe moins, contrairement à ce que l'on observe dans la rédaction de Cox…

Sachant que pour aboutir à sa rédaction Cox a utilisé des simplifications qu'il ne précise pas [113], et sachant que nous n'avons pas pu reproduire sa démarche de simplification mathématique, il peut être de bonne ingénierie d'utiliser la rédaction non simplifiée encadrée ci-dessus, tirée par nous de son équation (7.9), plutôt que le libellé simplifié (mais moins juste) de Cox.

Cependant, comme d'habitude, ce qui incitera à l'utilisation d'une expression ou d'une autre sera la confrontation de ces expressions avec la réalité expérimentale.

Au demeurant, il est assez facile de calculer l'erreur commise par le libellé simplifié de Cox par rapport à notre libellé *in extenso* encadré ci-dessus (mathématiquement plus précis) :

Pour le cylindre d'élancement **10** et **20**, l'erreur est de **0,24** et **0,14 %**, le coefficient $\mathbf{C_1}$ (indépendant de l'élancement) valant **–0,80685**.

Pour l'ellipsoïde d'élancement **10** et **20**, l'erreur est de **0,7** et **0,42 %** et le coefficient $\mathbf{C_1}$ vaut **–0,5**.

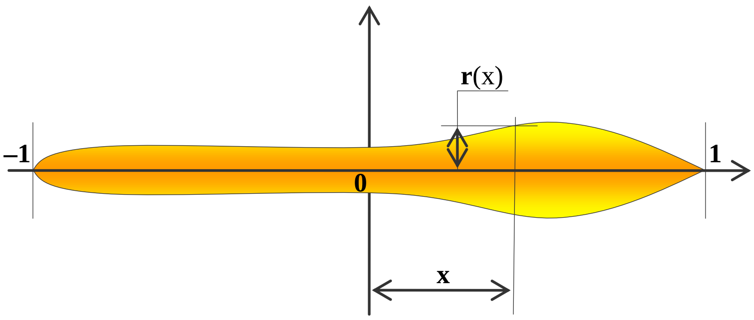
Pour le bicône d'élancement **10** et **20**, le coefficient **C1** vaut **+0,19315** et l'erreur est de**14,8** et **8,75 %** : ainsi pour l'élancement **20**, l'équation simplifiée de Cox prédit un $\mathbf{C_x}$ linéaire (en référence longueur) de **1,618** alors que l'équation *in extenso* prédit **1,477**.

Cette erreur (ou en tout cas cette différence pour cent) est très forte et encourage forcément à l'utilisation du libellé non simplifiée. Nous avions malheureusement remarqué plus haut que la courbe de Cox (obtenue avec son libellé simplifié) aboutissait déjà trop bas, dans une plage illicite (c.-à-d. pour des élancements trop petits) : notre équation *in-extenso* encadrée donnerait des $\mathbf{C_x}$ linéaires encore plus faibles…

[113] …mais il utilise sans doute le fait que l'élancement est fort et que le coefficient $\mathbf{C_1}$ a une valeur finie comprise entre **–0,2** et **0,5**.

C'est le moment d'expliciter la façon dont Cox attribue sa valeur au coefficient $\mathbf{C_1}$:

Le corps de révolution et de grand élancement est défini classiquement par l'abscisse relative **x** de ses sections circulaires (cet abscisse pouvant prendre les valeurs de **–1** à **1**) et par le rayon relatif **r**(x) de ces sections ; **r**(x) –ou **r**- est relativisé par quotient avec le rayon maxi du corps, ce rayon relatif pouvant donc prendre des valeurs de **0** à **1** :



Le coefficient $\mathbf{C_1}$ est alors donné par l'équation :

$$\mathbf{C_1} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} \mathbf{Ln}\left(\frac{1-\mathbf{x}^2}{\mathbf{r}_{(x)}{}^2}\right) \mathrm{d}\mathbf{x}$$

On remarque que lorsque le rayon $\mathbf{r}_{(x)}$, décrit un ellipsoïde il s'écrit alors :

$\mathbf{(1–x^2)^{-1/2}}$

Le logarithme népérien devient alors nul sur toute l'étendue de l'intégrale et le coefficient $\mathbf{C_1}$ de l'équation de Cox vaut **–0,5**.

On remarque par contre qu'aux abscisses **–1** et **+1**, les rayons **r** relatifs nuls de notre corps (et de beaucoup de corps), créent une singularité qu'il faut traiter de façon particulière (Cox s'en explique dans son texte), par exemple en éliminant les abscisses où se produisent ces singularités de l'intégrale.

Pour notre part, nous avons exclus, dans notre tableau, ces bornes **–1** et **+1** en commençant notre intégration à **–0,99999999** et en la terminant à **0,99999999**.

Ce tableau réalise l'intégration très trivialement par la méthode des trapèzes mais, pour les deux sphères aux deux bouts d'une hampe d'un diamètre relatif $\mathbf{10^{-6}}$ nous créions des singularités tout au long de la hampe…

Évidemment, c'est bien le très petit diamètre de la hampe reliant nos sphères ou nos ellipsoïdes (étudiés plus haut) qui mettait notre tableau en difficulté : en fait, c'est même la hampe qui crée l'essentiel de la Traînée, fût-elle d'un diamètre un million de fois plus faible que le diamètre des sphères…

Et ce n'est pas une erreur due à la trivialité de notre méthode d'intégration par les trapèzes puisque l'intégrale analytique donne une valeur très proche…

Pour appliquer sa méthode au cylindre, Cox pose comme équation du rayon du corps :

$\mathbf{r}_{(x)} = \mathbf{1}$ pour $\mathbf{-1 \leq x \leq +1}$

…ce qui le conduit au coefficient $\mathbf{C_1 = -0{,}80685}$.

Et pour appliquer sa méthode au bicône, le même Cox pose d'autorité :

$\mathbf{r}_{(x)} = \mathbf{1+x}$ pour $\mathbf{-1 \leq x \leq 0}$

et :

$\mathbf{r}_{(x)} = \mathbf{1-x}$ pour $\mathbf{0 \leq x \leq +1}$

…ce qui le conduit à la valeur **+0,19315** déjà énoncée.

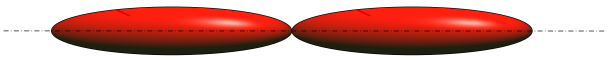
Cette imposition *manuelle* des valeurs de **r**(x) dans son intégrale est, à notre sens, le point faible de la méthode de Cox : le régime de Stokes est censé créer de très fortes interactions entre les différentes parties des corps (par exemple entre sa moitié avant et sa moitié arrière) ; or, si l'on impose *manuellement* pour dessiner la partie arrière une équation différente de celle dessinant la partie avant, on coupe les interactions entre les deux parties.

Si au contraire, c'est la même équation qui définit les formes avant et arrière du corps (comme ce sera le cas dans le travail de Tuck que nous étudierons plus bas), on peut, par contre, prétendre que la partie avant sera prise en compte par l'intégrale de Cox en intégrant implicitement l'influence de la partie arrière (même si cela reste à démontrer)…

Bien-sûr, l'influence de la partie avant d'un corps sur sa partie arrière (et vice-versa) se fait d'autant moins forte que l'élancement de ce corps est grand ! Mais on sait que ces influences restent fortes, même pour des élancements de l'ordre de **15** ou **20**, comme le montrera le graphe que nous présenterons plus bas (on y constate que pour un écart de **10** diamètres, chacun des d'ellipsoïdes de révolution jumeaux d'élancement **5** présente un $\mathbf{C_x}$ linéaire encore diminué de **8 %** par la présence de l'autre ellipsoïde) ; c'est la situation représentée ci-dessous :

Si l'on s'intéresse par la pensée au corps composite d'élancement **20** formé par ces deux ellipsoïdes jumeaux, il est alors clair qu'évaluer la Traînée d'un seul de ces ellipsoïdes sans tenir compte de la présence de l'autre conduit à une erreur de **8 %**.

Pire encore, dans la situation suivante où les ellipsoïdes sont en contact :



…évaluer la Traînée d'un seul des ellipsoïdes en négligeant la présence de l'autre conduirait à une erreur de quelque **24 %** (c'est ainsi qu'il faut lire notre graphe précédemment évoqué)…

Ci-dessus, nous avons présenté des arguments qui font naître des doutes sur les calculs de Cox lorsque sont imposées *manuellement* des équations différentes pour la définition du rayon $\mathbf{r}_{(x)}$ du corps dans le calcul de C_1, autrement dit quand l'espace d'intégration (**–1** ;**+1**) est séparé en deux de chaque côté de l'axe des **y** : Cox lui-même a pratiqué cette imposition *manuelle* d'équation différente dans son calcul du bicône et c'est ce qui nous a incité à pratiquer de même pour calculer (ci-dessous) la Traînée du diabolo conique.

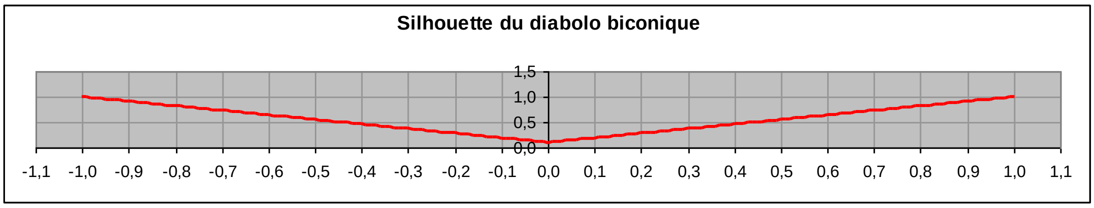
Mais les mêmes arguments valent encore plus lorsque l'on coupe l'espace d'intégration à l'écart de l'axe de **y** comme nous le ferons plus bas.

Dans cette affaire comme dans d'autres, nous ne pouvons cependant pas nous poser en juge. Nous présentons juste nos résultats parce qu'ils nous paraissent réalistes.

C_x linéaire du diabolo conique :

Lorsque nous avons compris que Cox avait appliqué sa méthode de cette manière quasi-manuelle au bicône et que nous avons compris que les faces circulaires avant et arrière du cylindre étaient exclues de l'intégrale, nous nous sommes senti à l'aise pour appliquer sa méthode à un diabolo conique (nonobstant les réserves que nous venons d'exprimer sur les risques que présente l'imposition *manuelle* d'équations dans l'intégrale de Cox).

Mais voyons ce que cette imposition *manuelle* donne :



Après tout ce corps n'est pas si loin du cylindre avec ses faces circulaires abruptes aux deux extrémités …

Nous avons réalisé l'intégration graphique de ce corps, mais l'intégration analytique est également possible : elle n'est que fastidieuse. Nous revenons cependant plus bas sur un piège qu'à dressé involontairement Cox dans son texte.

Mais décrivons rapidement la méthode utilisée par nous pour obtenir analytiquement le $\mathbf{C_x}$ linéaire du diabolo biconique :

La forme du corps est définie, pour les **x** négatifs, par :

$$\mathbf{r(x) = x(D_{\text{relat Isthme}} - 1) + D_{\text{relat Isthme}}}$$

…et pour les **x** positifs par :

$$\mathbf{r(x) = x(1 - D_{\text{relat Isthme}}) + D_{\text{relat Isthme}}}$$

À cette condition, l'intégrale de Cox s'écrit :

$$I_{Cox} = \int_{-1}^{1} Ln\left[\frac{1-x^2}{(ax+b)^2}\right]dx$$

…avec :
a = D$_{\text{relat Isthme}}$ **–1** pour les abscisses négative et :

a = 1 – D$_{\text{relat Isthme}}$ pour les abscisses positives, le coefficient **b** valant toujours **D**$_{\text{relat Isthme}}$.

Le logarithme du quotient présent sous l'intégrale se décompose en la différence de deux logarithmes et l'intégration peut être réalisée sans difficultés particulières ;

Le résultat en découle comme valant :

$$I_{Cox} = xLn\left[\frac{1-x^2}{(ax+b)^2}\right] - \frac{2b}{a}Ln(ax+b) + Ln\left[\frac{1+x}{1-x}\right] + C$$

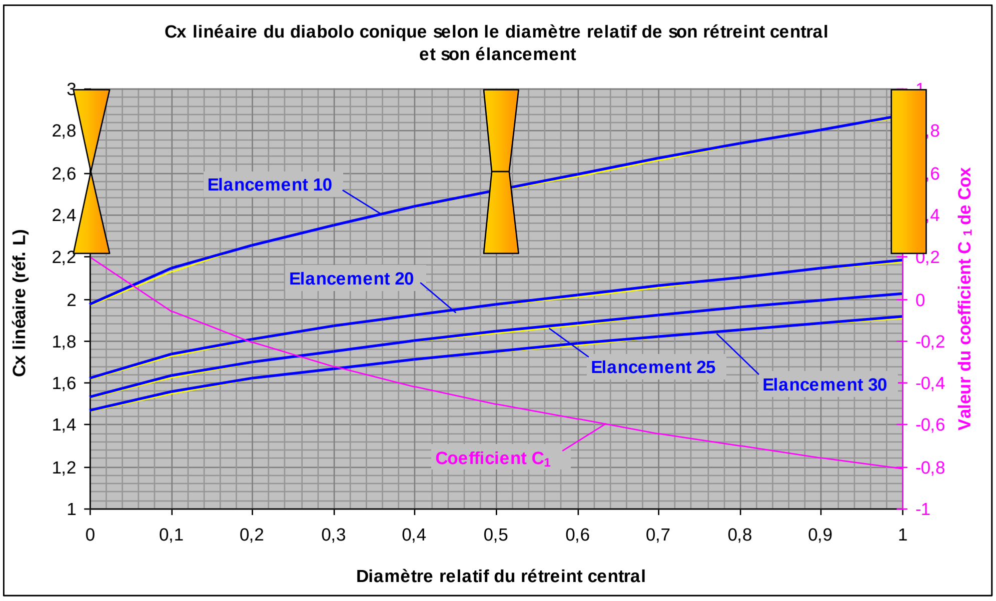
La mise aux bornes de cette intégrale se fait bien-sûr en scindant l'espace d'intégration en deux :

$$I_{Cox} = \int_{-1}^{0} Ln\left[\frac{1-x^2}{(ax+b)^2}\right]dx + \int_{0}^{1} Ln\left[\frac{1-x^2}{(ax+b)^2}\right]dx$$

…puisque, comme il a été précisé à l'instant, **a** possède une valeur différente dans les deux cas…

L'aide d'un tableur fait alors apparaître que les bornes **–1** et **1** sont à exclure, (elles annulent le numérateur du logarithme), au profit des valeurs **–0,999 999 999 999** et **0,999 999 999 999** qui, si nous avons bien compris le texte de Cox, conviennent parfaitement.

Les valeurs strictement nulle et unitaire de **D**$_{\text{relat Isthme}}$ sont également à exclure (la valeur unitaire dessinant un cylindre, corps calculé par Cox et la valeur nulle annulant le dénominateur du logarithme), mais toutes les autres valeurs de **D**$_{\text{relat Isthme}}$ comprises entre ces deux interdits donnent au diabolo conique le C_x linéaire suivant :



Sur le graphe ci-dessus, nous avons également porté en fuchsia la valeur du coefficient C_1 de l'équation générale de Cox qui est le même (en fonction du diamètre relatif du rétreint) pour tous les élancements.

Ce coefficient C_1 admet une régression en polynôme d'ordre **4**. Il en résulte que les quatre courbes bleues du graphe précédent et en général le **C_x** linéaire des diabolos coniques se résument à une seule équation :

$$\mathbf{C_{xLin\ Réf.L}} = \frac{\mathbf{2\pi}}{\mathbf{Ln[2\lambda] + 1{,}963D_{rr}^{\ 4} - 5{,}014D_{rr}^{\ 3} + 4{,}842D_{rr}^{\ 2} - 2{,}78D_{rr} + 0{,}187}}$$

…équation où **λ** est l'élancement du corps et **D_{rr}** son diamètre relatif de rétreint.

On voit cheminer en jaune ces régressions derrière les quatre courbes bleues ci-dessus.

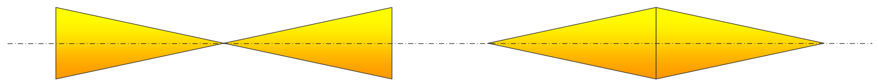
L'observation de cette famille de courbes montre que :

→ pour un diamètre relatif du rétreint central valant **1**, le **C_x** linéaire (référence longueur du corps) est celui du cylindre de Cox (avec un coefficient C_1 de **–0,80685** dans l'équation de Cox) et que :

→ pour un diamètre relatif du rétreint central valant **0** (ou presque) le **C_x** linéaire est celui du bicône déjà étudié (avec un coefficient C_1 de **0,19315)**.

Qu'un diabolo conique ait le même **C_x** linéaire qu'un bicône de même élancement est fort intéressant.

Surtout, cela semble témoigner que le **C_x** linéaire de deux cônes en contact par leur pointe ou leur base est le même :



Même Traînée ?

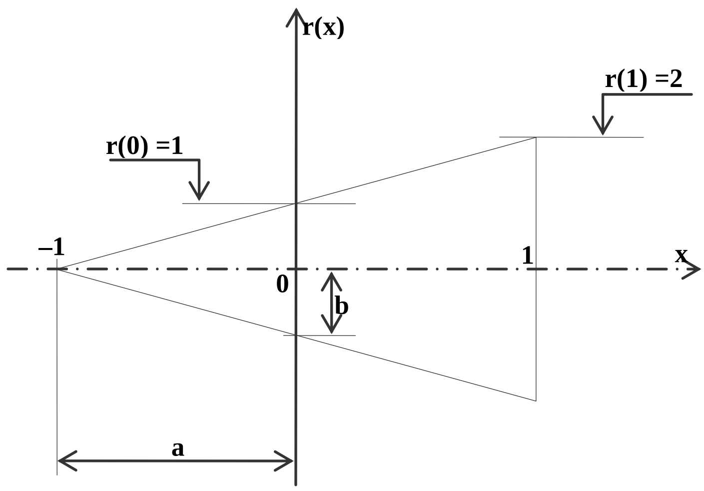
Si cette identité des $\mathbf{C_x}$ linéaires dans les deux cas était confirmée, elle constituerait une symétrie supplémentaire qui viendrait rejoindre la cohorte des phénomènes très curieux qui fleurissent en régime de Stokes.

<u>Le piège involontaire de Cox :</u>

En calculant la Traînée du cône simple, Cox a opté pour respecter la condition (7.1) qu'il a posé précédemment dans son texte ; celle-ci stipule :

« Désignons toujours par **2a** la longueur du corps. Désignons à présent par **b** le rayon du corps à l'origine des axes, de telle sorte que **r(x=0) = 1**. »

Les rayons du corps et sa longueur sont donc adimensionnalisés (de façon classique) comme suit :



Le problème c'est que, dans ce schéma, **a/b** n'est plus l'élancement du corps puisque, si **a** représente bien sa demi-longueur, **b** représente, non plus le demi-diamètre maximal du corps mais simplement le demi-rayon maximal.

Cox intègre alors à **-0,5** la valeur du coefficient C_1 qui est attaché à ce cône dans l'équation qui en donne la Traînée :

$$\mathbf{F_1} = \frac{\mathbf{4\pi\mu a V}}{\mathbf{Ln[2a/b] - 0{,}5}}$$ [114]

[114] Nous ne reproduisons pas les termes d'ordre inférieur.

Cependant ici, **a/b** n'est plus l'élancement **λ** du corps mais le double de cet élancement. C'est dire que dans cette équation on peut remplacer **a/b** par **2λ** :

$$\mathbf{F_1 = \frac{4\pi\mu a V}{Ln[2(2\lambda)] - 0{,}5}}$$

…où, en sortant le coefficient **2** du logarithme :

$$\mathbf{F_1 = \frac{4\pi\mu a V}{Ln[2\lambda] + Ln[2] - 0{,}5}}$$

Ce qui nous donne, puisque **Ln[2]= 0,69315**, le libellé que nous retiendrons pour le $\mathbf{C_x}$ linéaire référence longueur du corps [115] de ce cône simple d'élancement quelconque **λ** :

$$\boxed{\mathbf{C_{x\text{Lin Réf.L}} = \frac{2\pi}{Ln[2\lambda] + 0{,}19315}}}$$

…qui est, d'après Cox, le $\mathbf{C_x}$ linéaire des aiguilles simplement coniques (donc des cônes simples de grand élancement **λ**) en référence à leur longueur lors de déplacements axiaux…

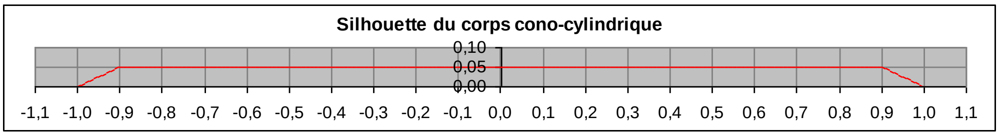
Ce $\mathbf{C_x}$ linéaire du cône simple, calculé (à notre façon) d'après les enseignements de Cox, est le même que celui du bicône, ce qui est assez contre-intuitif.

D'une façon générale, il nous est apparu que l'intégration conduisant au coefficient C_1 de l'équation générale de Cox était moins embrouillante lorsque l'on se passait de la condition (7.1) de Cox et que l'on continuait à nommer par **a** le rayon maximal du corps où qu'il soit situé, **a/b** restant donc alors classiquement son élancement **λ**…

Il nous semble donc, même si cette affirmation peut paraître immodeste, que cette condition (7.1) n'a pas d'utilité.

Autres corps de Cox en déplacements axiaux : les corps cono-cylindriques :

Il est très aisé de dessiner, par exemple, des corps cylindriques doté d'ogives coniques :



[115] La longueur du corps est **2a**…

On se trouve avec de tels corps dans des cas intermédiaires entre le bicône (analysé par Cox) et le bâtonnet cylindrique (également analysé par lui).

De fait, le $\mathbf{C_x}$ linéaire de ce corps d'élancement **20** et dont chaque partie conique occupe le dixième de la demi-longueur est quantifié par notre tableur à **2,10** (en référence longueur), et ce $\mathbf{C_x}$ linéaire est à comparer :

→ avec les **2,18** d'un bâtonnet cylindrique de même élancement,

→ et aux **1,62** du bicône de même élancement (ces deux dernier $\mathbf{C_x}$ linéaires également en référence longueur, bien-sûr).

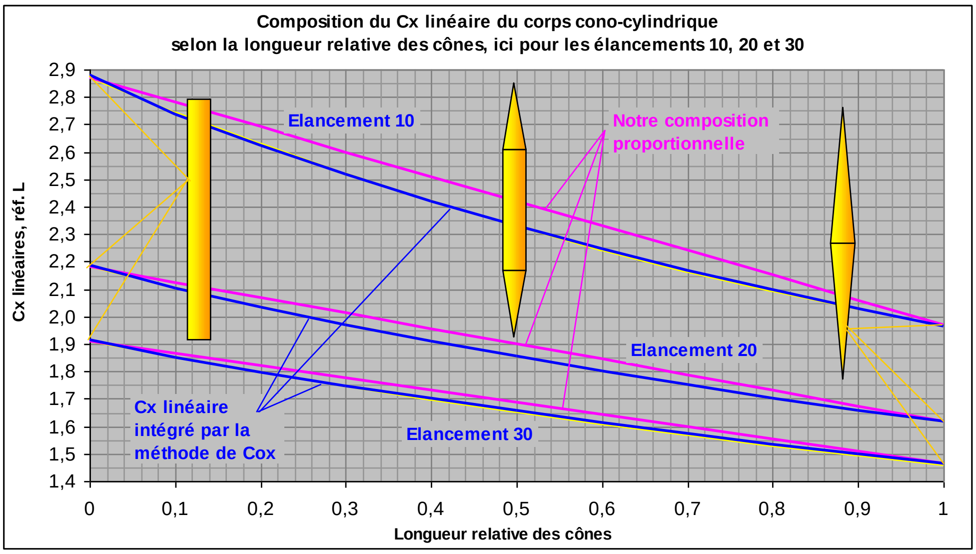
Cette comparaison avec cylindres et bicônes peut prendre des formes plus arithmétiques : on peut songer, en effet, à pondérer l'apport de chaque forme en fonction de sa longueur relative, ce que nous nommons plus bas *la composition proportionnelle* ; ainsi le corps cono-cylindrique schématisé ci-dessus tient (ou pourrait tenir) pour **9/10ème** du cylindre et pour **1/10ème** du bicône.

De fait, si l'on raisonne ainsi on trouve pour le $\mathbf{C_x}$ linéaire de ce même corps (en référence longueur), on écrit :

$$\mathbf{C_{xLin\,L} = 1{,}62*1/10 + 2{,}18*9/10 = 2{,}124}$$ [116]

Le résultat de cette *composition proportionnelle* n'est pas si loin de la valeur de **2,10** trouvée par notre tableau après intégration graphique de l'intégrale de Cox…

En généralisant cette approche, on dessine les droites fuchsia du graphe ci-dessous pour les élancements **10**, **20** et **30** :



Ces droites sont forcément des droites, vu la méthode qui les fait naître.

Les courbes bleues représentent, quant à elles, le $\mathbf{C_x}$ linéaire des différents corps tel que calculé graphiquement par notre tableau selon l'intégrale de Cox : il

[116] Le lecteur aura noté que nous avons pris, dans cette équation, pour le bicône et le cylindre les $\mathbf{C_x}$ linéaires attachés au même élancement **20**.

apparaît que la méthode de *composition proportionnelle* (en fuchsia) n'est pas exagérément fausse pour les plus grands élancements.

Cheminant derrière les courbes bleues, à peine visible, sont trois régressions paraboliques jaunes qui les approchent assez fidèlement :

$\mathbf{0,36}*\mathbf{L}_{\text{relat cônes}}^{\mathbf{2}} - \mathbf{1,26}*\mathbf{L}_{\text{relat cônes}} + \mathbf{2,87}$…pour l'élancement **10**

$\mathbf{0,18}*\mathbf{L}_{\text{relat cônes}}^{\mathbf{2}} - \mathbf{0,75}*\ \mathbf{L}_{\text{relat cônes}} + \mathbf{2,18}$…pour l'élancement **20**

$\mathbf{0,13}*\mathbf{L}_{\text{relat cônes}}^{\mathbf{2}} - \mathbf{0,58}*\ \mathbf{L}_{\text{relat cônes}} + \mathbf{1,91}$…pour l'élancement **30**

Évidemment, les reliquats de ces équations, **2,87**, **2,18** et **1,91**, sont les $\mathbf{C_x}$ linéaires des bâtonnets cylindriques d'élancement **10**, **20** et **30**, calculables par l'équation de Cox.

On ne peut que songer à fondre ces trois équations en une équation générale qui donnerait le $\mathbf{C_x}$ linéaire de corps cono-cylindriques de tous élancement (à condition qu'ils soit forts) et de toutes longueurs relatives des cônes.

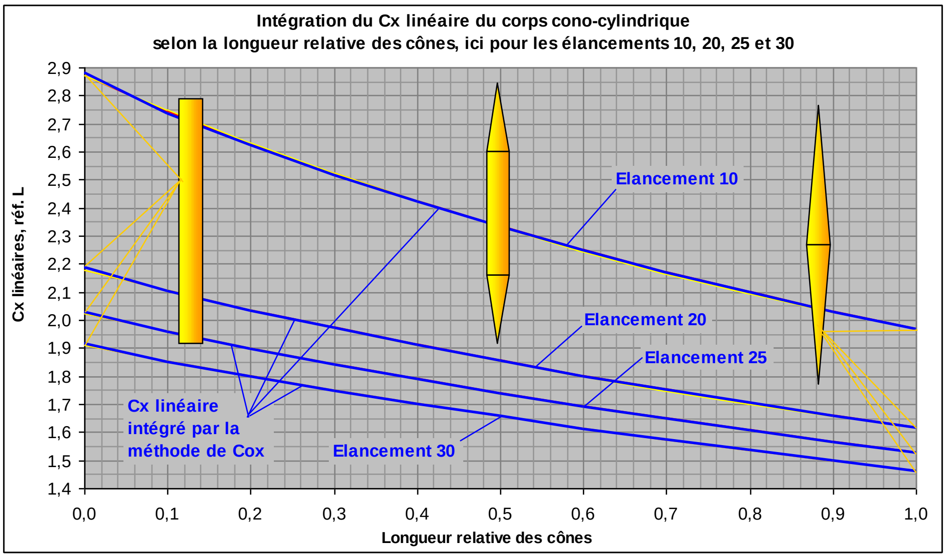
Cette régression générale est :

$\mathbf{C}_{\mathbf{xLin}\ \text{réf.L}} =$

$$\mathbf{3}\ \boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{-0,93}}\ \mathbf{L}_{\text{relat cônes}}^{\mathbf{2}} + [\mathbf{C}_{\mathbf{xLin\ Bicône}\ \lambda} - \mathbf{C}_{\mathbf{xLin\ Cylindre}\ \lambda} - \mathbf{3}\ \boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{-0,93}}]\mathbf{L}_{\text{relat cônes}} + \mathbf{C}_{\mathbf{xLin\ Cylindre}\ \lambda}$$

Dans cette régression, $\mathbf{C}_{\mathbf{xLin\ Cylindre}\ \lambda}$ et $\mathbf{C}_{\mathbf{xLin\ Bicône}\ \lambda}$ sont les $\mathbf{C_X}$ linéaires du cylindre et du bicône de même élancement $\boldsymbol{\lambda}$ que le corps cono-cylindrique considéré, $\mathbf{C_X}$ linéaires calculables par l'équation de Cox. $\mathbf{L}_{\text{relat cônes}}$ représente toujours la longueur relative des cônes (cette longueur relative pouvant aller de **0** pour le cylindre sans cônes à **1** pour le bicône).

Voici en jaune ce que donne cette régression générale appliquée aux trois élancements précédemment étudiés plus l'élancement **25**, en comparaison avec les courbes bleues qui représentent notre intégration graphique de ces corps cono-cylindriques d'après la méthode de Cox :



Ces régressions jaunes cheminent, à peine visibles, sous les quatre courbes bleues.

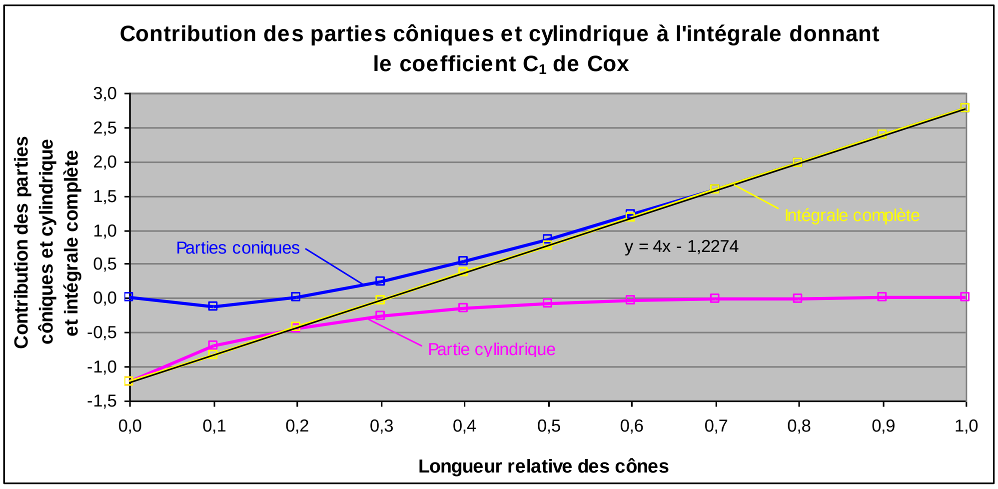
En rouge sur le même graphe apparaissent ici et là sous les courbes bleues les courbes de $\mathbf{C_x}$ linéaires établies cette fois par intégration analytique de l'équation de Cox.

Ce travail analytique justifie donc pleinement notre travail d'intégration graphique, réalisé à l'aide d'un tableau rustique de quelque 200 lignes seulement dont, à titre d'incitation, nous donnons ici un captation d'écran :

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2							
3							
4							
5		Longueur relative du cône :		1			
6		Un ou deux cônes ? :		2 cônes			
7							
8–11		Valeur de l'abscisse relative s	Calcul du rayon local relatif ou Lamda(s)	D'où Rayon local absolu	Valeur à intégrer	d'où Surfaces élémentaire à sommer	
12		-0,99999999	0,0000	5,000E-10	19,1138		
13		-0,9999	0,0001	5,000E-06	9,9034	0,0015	
14		-0,99	0,0100	5,000E-04	5,2933	0,0752	
15		-0,98	0,0200	1,000E-03	4,5951	0,0494	
16		-0,97	0,0300	1,500E-03	4,1846	0,0439	

<u>Nous verrons cependant à l'instant que ces régressions générales jaunes sont périmées par une autre encore plus précise</u>.

En effet, il y a mieux : en étudiant les contributions des cônes et de la partie cylindrique à l'intégrale de Cox, nous nous sommes rendu compte que le libellé analytique de l'intégrale de Cox (en jaune ci-dessous) est linéarisable à moins de **1,4 millièmes près** d'erreur relative :



La régression linéaire de l'intégrale de Cox est représentée en noir (avec son équation).

En bleu est la contribution à cette intégrale des deux parties coniques et en fuchsia la contribution de la partie cylindrique : sur ce dernier point, il faut faire attention au fait que la contribution de la face avant du cylindre sans cônes (pour $\mathbf{L_{relat\ cônes}} = \mathbf{0}$) et sans doute avec cônes (pour les autres valeurs de $\mathbf{L_{relat\ cônes}}$) est probablement intégrée à la contribution violette !

Il résulte de cette formidable aubaine mathématique que le $\mathbf{C_x}$ linéaire des corps cono-cylindriques admet le libellé suivant :

$$\boxed{C_{x\text{Lin réf.L}} = \frac{2\pi}{\mathrm{Ln}(2\lambda) + L_{\text{relat cônes}} - 0{,}80685}}$$

…qui est le C_x linéaire (en référence longueur), en déplacements axiaux, des corps d'élancement λ formés d'une partie cylindrique portant à leurs extrémités deux ogives coniques égales, le quotient des longueurs cumulées de ces ogives coniques sur la longueur totale du corps étant $L_{\text{relat cônes}}$.[117]

Ce libellé périme la régression générale en $3\,\lambda^{-0,93}\,L_{\text{relat cônes}}^{\;2}$ que nous avons proposée plus haut.

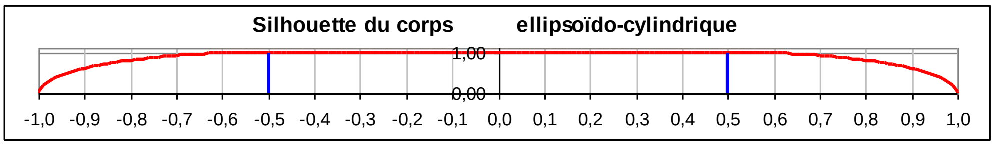
Les tracés que dessine ce libellé pour les différents élancements est indiscernable des tracés réalisés d'après les calculs analytiques (l'erreur maximale est de **0,00038 %** !)…

Une étude mathématique expliquant cette aubaine mathématique serait bien-sûr à effectuer mais il est fort satisfaisant de noter que pour les valeurs **0** et **1** de $L_{\text{relat cônes}}$ ce même libellé produit bien, à son dénominateur, les reliquats (ou coefficients C_1) **- 0,80685** et **+ 0,19315** que Cox promet au cylindre et au bicône…

On peut trouver facilement que le corps cono-cylindrique possède la même Traînée qu'un ellipsoïde de même élancement lorsque le même reliquat vaut **–0,5**, c.-à-d. pour la valeur **0,30685** de $L_{\text{relat cônes}}$.

<u>Corps ellipsoïdo-cylindriques de Cox en déplacements axiaux :</u>

Il est aisé de faire calculer à un tableur l'intégrale de Cox donnant le coefficient C_1 de corps formés de deux ogives hémi-ellipsoïdales raccordant tangentiellement sur une partie cylindrique. Ces corps ressemblent bien-sûr à ceci :



(les segments verticaux bleus indiquent les limites des parties ellipsoïdales et cylindrique)

Un cas particulier du corps ellipsoïdo-cylindrique est celui que dessinent les calculs de E. O. Tuck dont nous étudierons plus bas les travaux.

L'équation de ce chercheur Australien permet de dessiner un corps d'élancement **11,91** formé d'une partie cylindrique mesurant la moitié de sa longueur et des deux hémi-ellipsoïdes formant ogives à ses deux extrémités (ces deux hémi-

[117] Une étude spéciale serait à mener pour des corps cono-cylindriques dont les deux ogives coniques ne seraient pas égales…

ellipsoïdes mesurant donc chacune le quart de la longueur totale du corps) : c'est la silhouette que nous présentons ci-dessus.

Les brillant calculs de Tuck attribuent à ce corps d'élancement **11,91** en déplacement axial un **C_x** linéaire de **2,513** (en référence à sa longueur) alors que nos calculs réalisée par la méthode de Cox lui attribuent un coefficient C_1 de – **0,65343**, soit un **C_x** linéaire de **2,4962**.

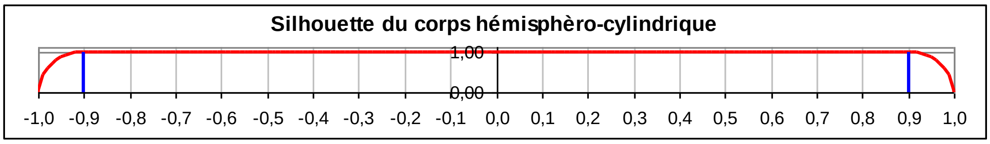
La différence que l'on constate est donc de moins de **0,7 %** ce qui est fort encourageant pour notre exploitation (quelque peu risquée) des calculs de Cox…

De plus, l'équation générale de Cox :

$$C_{x\text{Lin Réf L}} = \frac{2\pi}{\text{Ln}(2\lambda) + C_1}$$

…avec cette valeur **C_1 = – 0,65343**, donne accès à des corps de même silhouette [118] mais d'élancement **λ** plus ou moins fort (pourvu qu'il soit *assez* fort)…

Il est ainsi peut-être profitable de donner le **C_x** linéaire des corps hémisphéro-cylindriques d'élancement total **10** comportant à chaque extrémité un hémisphère (ce corps n'étant qu'un cas particulier des corps ellipsoïdo-cylindriques précédents) :



Le **C_x** linéaire (référence longueur) de ce corps d'élancement **10** et doté de deux hémisphères est **2,831**.

Pour les autres élancements (pourvu qu'il soient assez forts), les deux ogives (de même longueur relative, à savoir chacune le dixième de la demi-longueur) formeront des hémi-ellipsoïdes et l'équation générale de Cox donnera leur **C_x** linéaire :

Avec cette longueur relative d'ogives de **1/10ème**, le coefficient C_1 de Cox est – **0,77619** et le **C_x** linéaire (en référence longueur) de tels corps est :

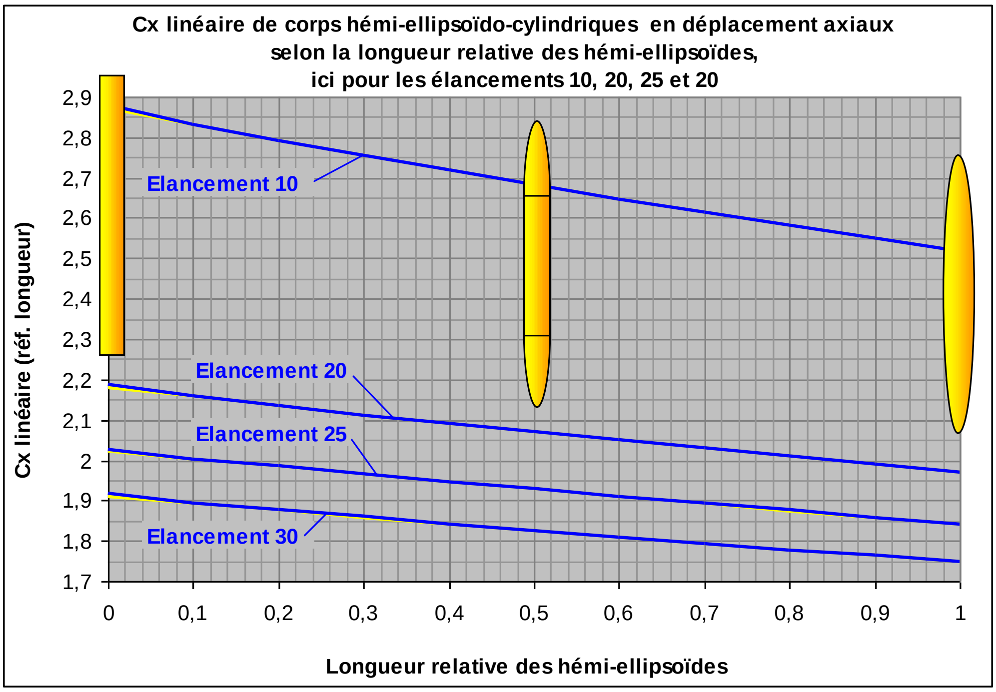
$$C_{x\text{Lin Réf L}} = \frac{2\pi}{\text{Ln}(2\lambda) - 0{,}77619}$$

…qui est, d'après les calculs effectués selon la méthode de Cox, le **C_x** linéaire des corps ellipsoïdo-cylindriques, corps formés d'une partie centrale cylindrique et dont les deux extrémités sont des hémi-ellipsoïdes mesurant chacune le dixième de la demi-longueur du corps.

[118] Par « même silhouette » nous voulons signifier la même longueur relative des ogives hémi-ellipsoïdales…

La détermination de la constante C_1 de Cox a ci-dessus été réalisée par notre tableau rustique de 200 lignes. Un calcul analytique devrait améliorer ces résultats…

Il est aisé de réaliser avec ces corps ellipsoïdo-cylindriques le même travail que celui réalisé plus haut pour les corps cono-cylindriques… Nous l'avons fait en dessinant les quatre courbes donnant le C_x linéaire des corps ellipsoïdo-cylindriques selon l'importance de leurs parties ellipsoïdales pour les élancement de **10**, **20**, **25** et **30** (courbes bleues) :



À gauche du graphe, les corps sont des cylindres purs ; à droite ils sont des ellipsoïdes purs (sans partie cylindrique).

Surtout pour les plus grands élancements, ces courbes sont assez proche de droites : cette rectitude légitimerait tout à fait l'utilisation alternative de notre *composition proportionnelle* du C_x linéaire à partir des C_x linéaires du cylindre et de l'ellipsoïdes.

Cependant, quelque peu blessé de n'avoir pas anticipé intuitivement l'aubaine mathématique qui a écrit la régression générale donnant le C_x linéaire des corps cono-cylindriques, nous tentons notre chance à propos des corps ellipsoïdo-cylindriques en écrivant une régression générale assez proche de celle dévolue aux corps cono-cylindrique.

Et la chance sourit aux naïfs ! Après réglage de l'influence de la longueur relative des parties ellipsoïdales cumulées à l'aide d'un seul curseur, nous trouvons sans difficulté cette régression :

$$\mathbf{C}_{\mathbf{x}\text{Lin réf.L}} = \frac{\mathbf{2\pi}}{\mathbf{Ln(2\lambda) + 0{,}308\ L}_{\text{relatHémi-ellipsoïdes}} \mathbf{- 0{,}80685}}$$

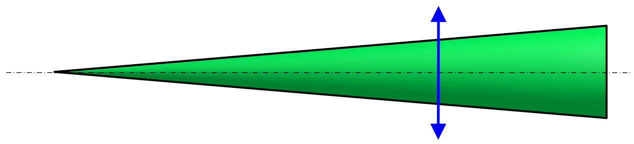
…qui serait, en application *manuelle* de la méthode de Cox, le $\mathbf{C_x}$ linéaire, en référence longueur, des corps formés d'une partie cylindrique et d'ogives ellipsoïdales de longueur relative $\mathbf{L}_{\text{relat Hémi-Ellipsoïdes}}$.

Sur le graphe précédent, cette régression générale dessine les courbes jaunes qui cheminent derrière les courbes bleues…

Il est notable que pour la valeur nulle de $\mathbf{L}_{\text{relat Hémi-Ellipsoïdes}}$ ce libellé est celui du $\mathbf{C_x}$ linéaire du bâtonnet cylindrique de Cox. Pour la valeur unitaire de $\mathbf{L}_{\text{relat Hémi-Ellipsoïdes}}$, le reliquat qui suit le logarithme népérien du dénominateur vaut **–0,49885**, reliquat qui est très proche du reliquat prescrit par Cox pour les ellipsoïdes (**– 0,5**) (l'erreur % n'est que de **2,3 millièmes**).

Nous n'avons pas cherché à améliorer cet encadré puisqu'il est issu de l'intégration graphique de notre rustique tableau : il est probable qu'une intégration analytique conduirait à un résultat un peu plus précis.

Aiguilles simplement coniques de Cox en déplacements transverses :



Pour les aiguilles simplement coniques en déplacements transverses (c.-à-d. en déplacement normal à leur axe), nous avons tiré des énoncés de Cox le libellé suivant, en nous gardant de tomber dans le piège décrit plus haut :

$$\mathbf{C}_{\mathbf{xLin\,L}} = \frac{\mathbf{4\pi}}{\mathbf{Ln(2\lambda)+1{,}19315}}$$

(rappelons que Cox annonce implicitement, quant à lui, un coefficient C_1 de **-0,5**, ce coefficient devant cependant s'appliquer à une équation générale où $\boldsymbol{\lambda}$ a été remplacé par un autre quotient)

Cox donne également le moment s'appliquant à de tels corps dans ces déplacement transverses : on doit en effet s'attendre à ce qu'ils s'orientent pour reprendre un mouvement axial.

Autres corps de Cox en déplacements transverses :

Dans son texte, Cox continue ses calculs de Traînée de corps en déplacements transverses. Ces calculs conduisent, pour ces déplacements transverses, à ce résultat :

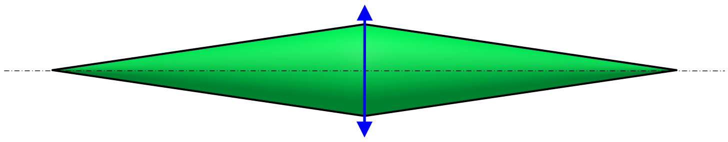
$$\mathbf{C}_{\mathbf{x}\text{Lin Réf L}} = \frac{\mathbf{4\pi}}{\mathbf{Ln\left(2\lambda\right)+C_2}}$$

$$\mathbf{C_2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} \mathbf{Ln}\left(\frac{1-\mathbf{x}^2}{\mathbf{r}_{(x)}{}^2}\right) d\mathbf{x}$$

Cox fait alors remarquer que ce reliquat $\mathbf{C_2}$ est lié simplement à celui dévolu aux déplacements axiaux ($\mathbf{C_1}$) par la relation $\mathbf{C_2 = C_1+1}$.

Ce raccourci donne un accès immédiat au $\mathbf{C_x}$ linéaire d'un corps en déplacement transverse dès lors qu'on a établi son $\mathbf{C_x}$ linéaire en déplacements axiaux.

De cette façon, pour le $\mathbf{C_x}$ linéaire du bicône en déplacement transverse :

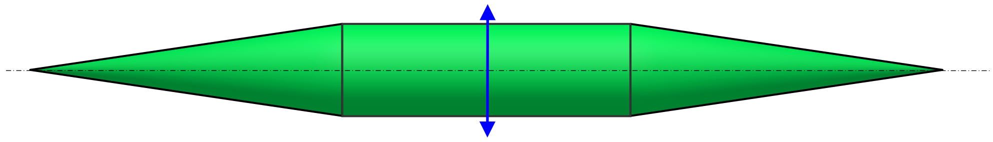


…on trouve facilement :

$$\mathbf{C}_{\mathbf{x}\text{Lin Réf L}} = \frac{4\pi}{\mathbf{Ln}(2\lambda) + 1{,}19315}$$

…qui est, selon Cox, le $\mathbf{C_x}$ linéaire des bicônes de grands élancements en déplacements transverses, en référence à leur longueur.

Il vient alors à une intuition normalement constituée (et surtout instruite des résultats proposés plus haut pour les déplacements axiaux) une proposition de $\mathbf{C_x}$ linéaire pour les corps cono-cylindriques en déplacements transverses [119] :



$$\boxed{\mathbf{C}_{\mathbf{x}\text{Lin Réf L}} = \frac{4\pi}{\mathbf{Ln}(2\lambda) + \mathbf{L_{pc}} + 0{,}19315}}$$

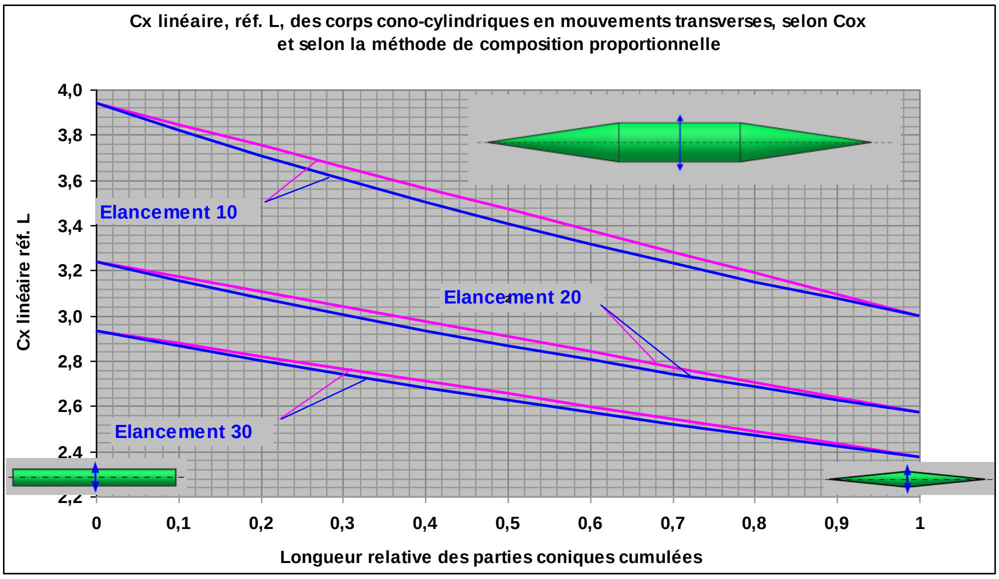
… équation où $\boldsymbol{\lambda}$ est comme toujours l'élancement **L/D** des corps et où $\mathbf{L_{pc}}$ est le quotient de la longueur cumulée des parties coniques sur la longueur totale **L** du corps. Cette équation peut constituer une proposition raisonnable du $\mathbf{C_x}$ linéaire de corps cono-cylindriques de grands élancements en déplacement transverses (en référence à leur longueur **L**).

[119] Si l'on considère comme acquis notre libellé pour le $\mathbf{C_x}$ linéaire des corps cono-cylindriques en mouvements axiaux, ce libellé donne par identification le reliquat $\mathbf{C_1}$ de Cox pour chaque longueur relative des parties coniques. Comme Cox a trouvé que $\mathbf{C_2 = C_1+1}$, il est aisé d'en déduire le libellé pour les mouvements transverses.

Comme on peut en juger, pour $\mathbf{L_{pc} = 0}$ ce libellé redevient celui du cylindre et pour $\mathbf{L_{pc} = 1}$ il redevient celui du bicône.

Nous n'avons pas pu mettre à l'épreuve ce même libellé, par manque d'informations sur des corps comparables (contrairement aux déplacements axiaux, pour lesquels les travaux de Tuck nous avaient été très utiles).

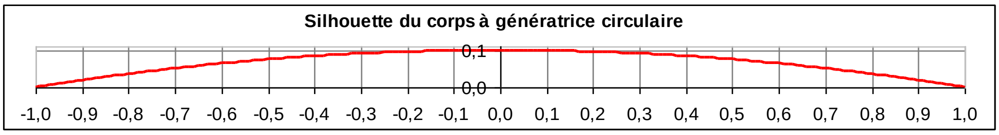
Voici cependant l'évolution du $\mathbf{C_x}$ linéaire de ces corps cono-cylindriques tel que calculé par notre méthode de la composition proportionnelle (en fuchsia) et tel que calculé par le libellé ci-dessus (en bleu dense) :



Comme on s'en doute, les tracés fuchsia (issus de la composition proportionnelle) sont des droites alors que les tracés bleu dense (issus de l'équation de Cox) sont des hyperboles.

<u>Corps à génératrice circulaire de Cox en déplacements axiaux :</u>

Nous verrons à l'instant que les calculs de l'australien E. O. Tuck permettent d'assigner un $\mathbf{C_x}$ linéaire aux corps à génératrice circulaire (ou en *grain de riz*) en mouvements axiaux. La méthode de calcul de Cox a été utilisée par nous pour de tels corps.



Notre tableau réalise sans difficulté l'intégration graphique nécessaire au calcul du coefficient C_1 de l'équation de Cox :

$$\mathbf{C_1} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} \int_{-1}^{1} \mathbf{Ln}\left(\frac{\mathbf{1 - x^2}}{\mathbf{r_{(x)}}^2}\right) \mathrm{d}\mathbf{x}$$

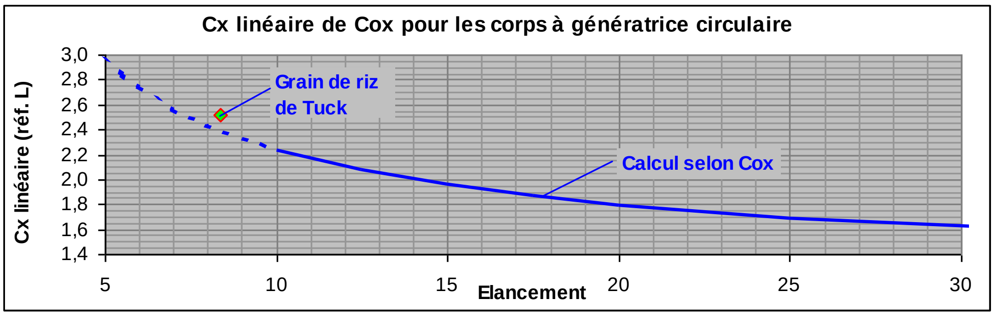
…la quantité $\mathbf{r}_{(x)}$, présente au dénominateur du logarithme népérien, dessinant la génératrice circulaire.

Sur ce dernier point il faut être attentif au fait qu'il n'existe qu'un seul corps à génératrice circulaire pour un élancement donné (si le corps est modifié homothétiquement pour changer son élancement, l'équation de Cox fonctionnera sans problème mais on devra nommer le corps ainsi formé *corps à génératrice elliptique*).

Ces remarques posées, on trouve assez facilement que le coefficient C_1 de l'équation de Cox varie assez peu selon l'élancement du corps à génératrice circulaire :

Il garde une valeur assez proche de **–0,186748** (il vaut **–0,189245** pour l'élancement **10** et **–0,186285** pour l'élancement **30** ce qui ne crée qu'une différence relative en $\mathbf{C_x}$ linéaire de **0,1 %** pour l'élancement **10** et de **0,01 %** pour l'élancement **30**).

En adoptant ce coefficient C_1 de **–0,186748**, nous trouvons pour le $\mathbf{C_x}$ linéaire (en référence longueur) du corps à génératrice circulaire selon son élancement la courbe bleu dense suivante :



La partie tiretée de la courbe bleu dense est évidemment moins fiable puisqu'elle concerne des élancements insuffisamment forts.

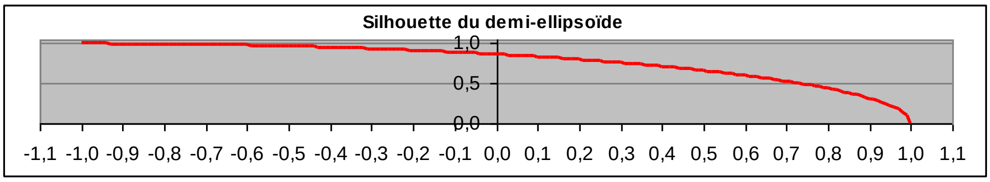
Le losange vert ceint de rouge représente le $\mathbf{C_x}$ linéaire du corps en *grain de riz* de Tuck que nous étudierons à l'instant : sa génératrice est extrêmement proche de l'arc circulaire et son $\mathbf{C_x}$ linéaire se trouve juste au-dessus de la projection *illicite* de la courbe bleu dense de Cox…

Assez curieusement, cette courbe de Cox cohabite assez bien avec notre panorama de résultats trouvé selon E. O. Tuck sur les corps en *grain de riz*.

Nous reviendrons plus bas sur ces corps à génératrice circulaire.

<u>Demi-ellipsoïde de Cox en déplacements axiaux :</u>

Il nous est venu à l'idée de calculer analytiquement, selon la méthode de Cox, le $\mathbf{C_x}$ linéaire d'un demi-ellipsoïde :



En effet, du côté gauche sur le schéma ce demi ellipsoïde tient du bâtonnet cylindrique et du côté droit il tient de l'ellipsoïde.

Ces deux corps ayant été calculés par Cox, on est en droit de réaliser un calcul mixte.

Celui-ci conduit sans difficulté particulière [120] au libellé suivant :

$$\mathbf{C_{xLin\ L}} = \frac{\mathbf{4\pi}}{\mathbf{Ln(2\lambda) - 0,5}}$$

…qui <u>serait</u> le $\mathbf{C_x}$ linéaire d'un demi-ellipsoïde d'élancement $\boldsymbol{\lambda}$ en déplacement axial.

<u>Ce libellé est curieusement celui attaché à l'ellipsoïde complet</u>, alors que Cox attache au cylindre un coefficient C_1 valant **–0,80685**…

Nous ne savons que penser de ce résultat que nous n'avons lu nulle part…

<u>Les travaux de E. O. Tuck sur les corps en déplacement axial :</u>

L'australien E. O. Tuck a présenté en 1968 à la troisième conférence australienne d'Hydraulique et de Mécanique des Fluides, <u>un court texte</u> assez pédagogique où il calcule la Traînée d'une famille de <u>corps de révolution en déplacement axial</u>, les rayons de ladite famille étant dessinés par l'équation :

$$\mathbf{R(x) = 2\sqrt{1-x^2}\ Exp\left[-\frac{\frac{1+A_0}{2} + 2A_2\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right)}{A_0 + A_2\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right)}\right]}$$

(attention au signe – qui préside au quotient présent dans l'exponentielle)

Dans cette équation, **x** est l'*abscisse relative* définie entre **–1** et **+1** [121].

L'équation est variable selon les deux paramètres $\mathbf{A_0}$ et $\mathbf{A_2}$ qui doivent respecter la condition :

---

[120] On est juste contraint de prendre comme borne inférieure $\mathbf{-1+10^{-17}}$ qui semble la précision dont notre tableur est capable ; cependant, cette borne inférieure ne fait pas *flamber* la primitive qui reste facilement prédictible…

[121] Ce qui signifie que l'équation dessinera une génératrice qui, en tournant, dessinera des corps entre les abscisses **–1** et **1**.

$$-A_0 \leq A_2 \leq 2A_0$$

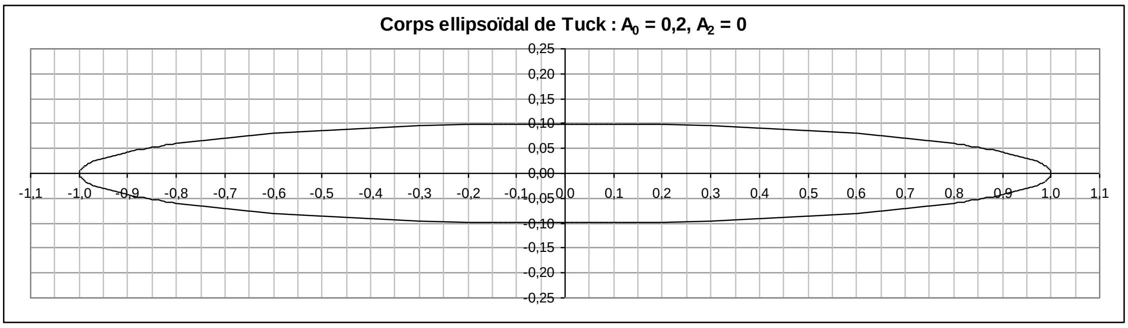
La démarche qu'utilise ce mathématicien est qualifiée par lui de *démarche inverse* : elle ne consiste pas à calculer la Traînée d'un corps de révolution dont on connaîtrait l'équation de la génératrice, mais au contraire à définir un ensemble infini de familles de corps (d'équations dépendantes de $\mathbf{A_0}$ et $\mathbf{A_2}$, par exemple) dont la Traînée serait connue et parmi lesquels corps on serait en droit d'espérer rencontrer, par hasard, un corps très proche de celui dont on recherche la Traînée [122].

Les corps de Tuck qui attireront notre attention seront donc des corps de rencontre, né au hasard des valeurs des paramètres $\mathbf{A_0}$ et $\mathbf{A_2}$ (puis d'autres paramètres ultérieurement)…

Dans les faits, comme on le constatera plus bas, en faisant varier les paramètres $\mathbf{A_0}$ et $\mathbf{A_2}$ de l'équation de Tuck (puis d'autres paramètres), nous avons bien trouvé des *corps de rencontre* (que nous nommerons *corps de Tuck*) dont les formes sont très proches de corps purement géométriques (comme le corps à génératrice circulaire, par exemple) : puisque Tuck annonce la Traînée de ces corps de rencontre, on ne peut que s'attendre à ce que la Traînée des corps purement géométriques auxquels ils ressemblent beaucoup soit la même, à très peu près.

E. O. Tuck donne lui-même des exemples des corps dessinés par l'équation ci-dessus pour une valeur constante $\mathbf{A_0 = 0{,}2}$ et pour différentes valeurs de $\mathbf{A_2}$.

Surtout, en premier lieu, Tuck indique que le couple ($\mathbf{A_0 = 0{,}2\ ;\ A_2 = 0}$) dessine un ellipsoïde de révolution d'élancement **10,043** (mais ici un ellipsoïde parfait, du point de vue géométrique, ce qu'il est facile de vérifier en donnant les valeurs susdites aux deux paramètres dans l'équation générale de Tuck [123]) :



Ce corps est intéressant puisque la Traînée en est connue pour tous les élancements (nous l'avons étudiée plus haut). E. O. Tuck prédit, pour cet ellipsoïde la Traînée $\mathbf{8\,\pi\,\mu V\,\ell A_0}$, ℓ étant la demi-longueur du corps. Pour nous, ce résultat est gage d'un $\mathbf{C_x}$ linéaire de $\mathbf{4\,\pi\,A_0}$, soit $\mathbf{0{,}8\,\pi}$ (en référence à la longueur $\mathbf{2\ell}$ du corps) ou, bien-sûr, $\mathbf{0{,}8\pi{*}10{,}043 = 25{,}24}$ en référence au petit diamètre de l'ellipsoïde.

[122] Il n'est pas interdit que, par un hasard encore plus extrême, les formes du corps défini par Tuck soient exactement celle du corps dont on veut connaître la Traînée…

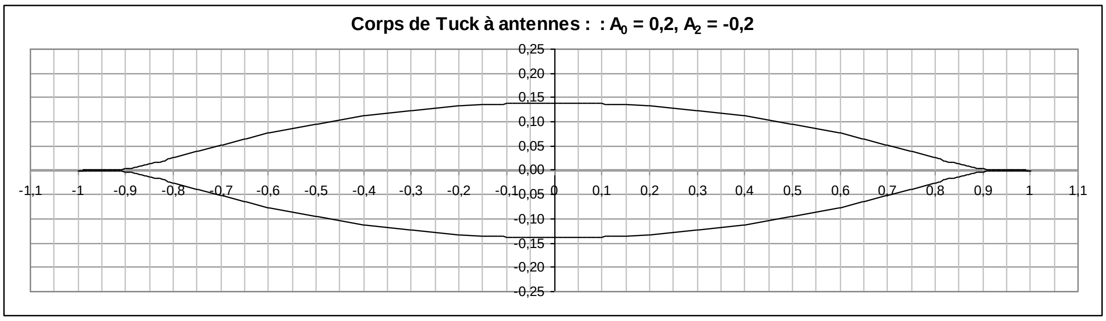
[123] Ces valeurs de $\mathbf{A_0}$ et de $\mathbf{A_2}$ réduisent l'exponentielle à une constante.

C'est à très peu près la valeur que, pour cet élancement de **10,043**, donnent les équations déjà analysées par nous plus haut [124].

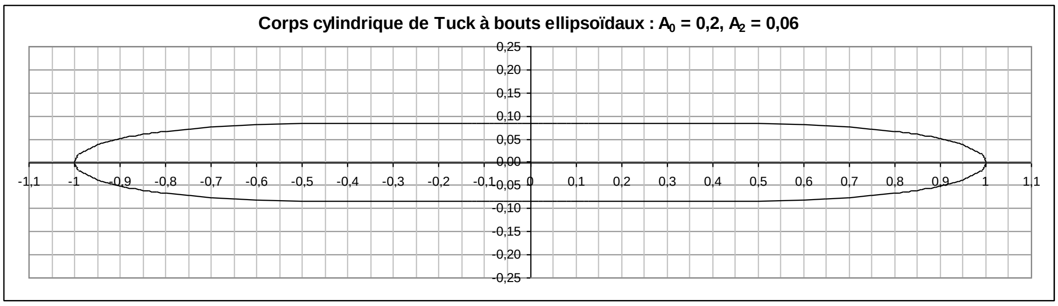
Ce résultat est encourageant (en tout cas pour notre bonne compréhension du texte de Tuck). Ce même texte annonce ensuite que tous les corps formés par la valeur $\mathbf{A_0 = 0{,}2}$ et par toutes autres valeurs possibles de $\mathbf{A_2}$ (c.-à-d. les valeurs respectant $\mathbf{-A_0 \leq A_2 \leq 2A_0}$) présenteront la même Traînée $\mathbf{8\,\pi\,\mu V\,\ell A_0}$ et donc pour nous (ℓ étant la demi-longueur du corps) le même C_x linéaire $\mathbf{4\,\pi\,A_0}$.

Il est cependant important de prendre conscience du fait que le diamètre de tous ces corps n'est pas constant (leur longueur l'étant, par contre).

Voilà plusieurs exemples de ces corps. Nous leur avons donné le nom générique de *Corps de Tuck*, en les différenciant par un sous-nom :



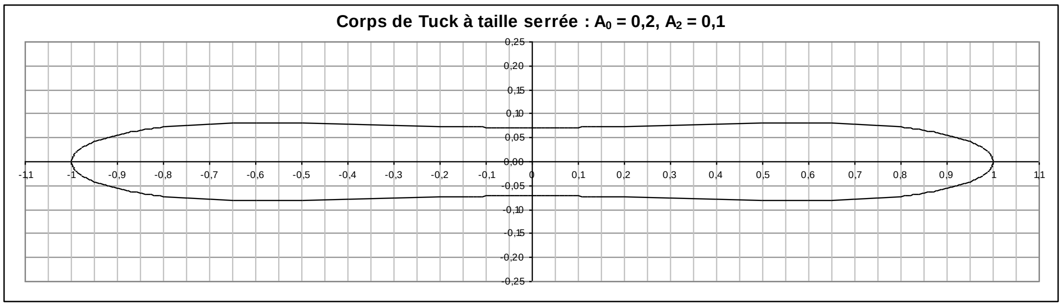
Ce corps a été sous-nommé par nous *à antennes* dans le but d'insister sur le fait que ce corps est prolongé jusqu'aux abscisses **–1** et **+1** par deux antennes de diamètres négligeables, la longueur de ces antennes devant cependant être comptée dans sa longueur totale $\mathbf{2\ell}$ (cette longueur $\mathbf{2\ell}$ étant appelée à devenir, dans un premier temps, notre longueur de référence).

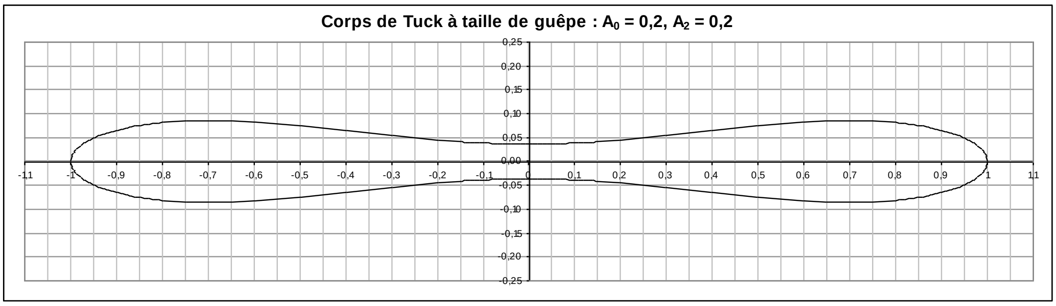


Nous étudierons ce corps cylindrique de Tuck "à bouts ellipsoïdaux" plus bas. Il est extrêmement proche du corps ellipsoïdo-cylindrique que nous avons précédemment étudié selon la méthode de Cox…

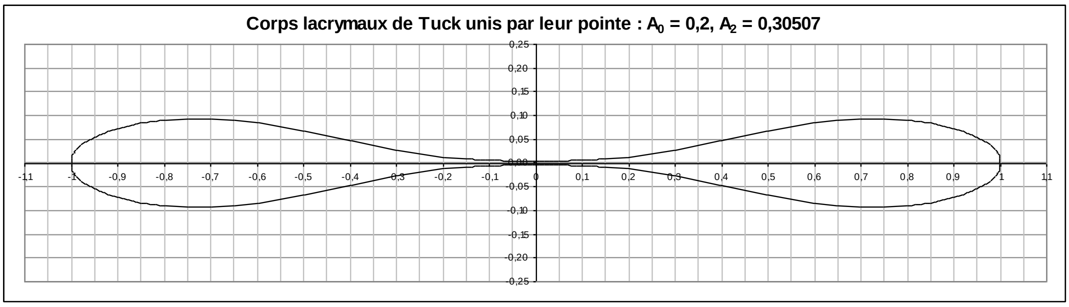
Tuck donne également en exemple dans son texte, les deux corps suivants :

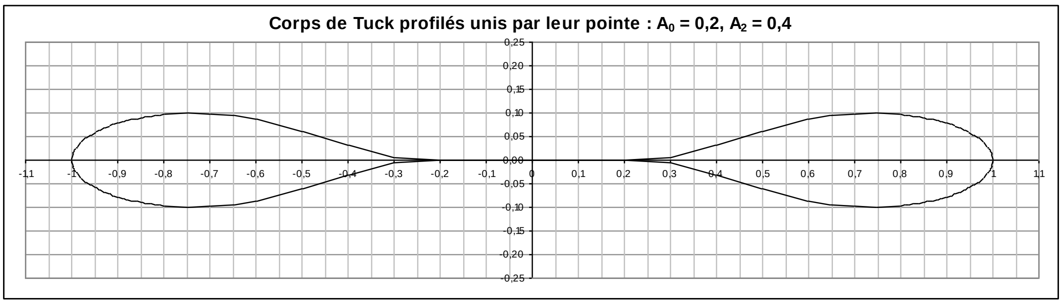
[124] Nous verrons plus bas que ce « à très peu près » est l'indice de l'existence d'un problème. En fait il y a une erreur de **0,8 %** dans la valeur calculée par Tuck…





Ces deux dernier corps à taille serrée ou à taille de guêpe pourraient être l'occasion d'observer l'influence sur la Traînée (par exemple sur le $\mathbf{C_x}$ linaire en référence diamétrale) de ce rétreint médian…





Ces deux derniers corps peuvent paraître presque séparés (pour la valeur $\mathbf{A_2 = 0,30507}$ [125]) ou même physiquement séparés (pour la valeur $\mathbf{A_2 = 0,4}$) puisque l'isthme

[125] Nous avons donné à ces deux corps le nom de lacrymaux puisque nous rechignons toujours à utiliser l'expression *en goutte d'eau* ; ce texte consacré au bas Reynolds en est évidemment la preuve, lesdites gouttes d'eau adoptent généralement dans l'air la forme sphérique (les gouttes de pluie n'abandonnent cette forme qu'à partir du diamètre équivalent **~1 mm**). Il faut donc penser que la forme de ces corps *lacrymaux* est celle qu'adoptent les larmes lorsqu'elles coulent sur nos joues (souhaitons que ce soient des larmes de bonheur)…

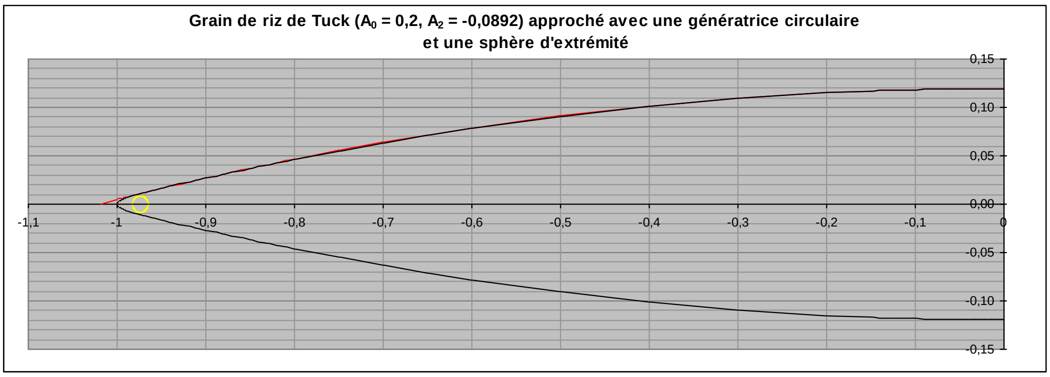
qui les relie arbore un diamètre infinitésimal. Cependant, comme pour les autres corps de Tuck , seule la Traînée totale (somme de celle des deux corps élémentaires) est donnée par l'auteur.

Cette regrettable limite provient des mathématiques ayant conduit à la détermination de la Traînée de cette famille de corps. Malheureusement, les interactions d'un des corps élémentaires sur l'autre et vice-versa étant très fortes, il nous est impossible de connaître mathématiquement la Traînée individuelle que développe chacun de ces corps élémentaires (à supposer que l'isthme très fin qui les relie n'ait aucune influence sur l'écoulement donc sur les forces de Traînée) ; nous nous y essayerons quand-même plus bas, de façon approximative…

Revenons à présent à un corps intermédiaire, non présenté ci-dessus, que nous avons nommé *Grain de riz de Tuck* :

Cx linéaire du Corps *en grain de riz* de Tuck en déplacement axial :

Cette dénomination (*grain de riz*) nous a été inspirée par le fait que la génératrice de ce corps est très proche d'un arc de cercle et qu'il existe des perles de cette forme désignées comme *perles grain de riz* :



L'arc de cercle évoqué à l'instant est dessiné en rouge ci-dessus derrière la génératrice noire supérieure. On doit admettre qu'il est à peine visible.

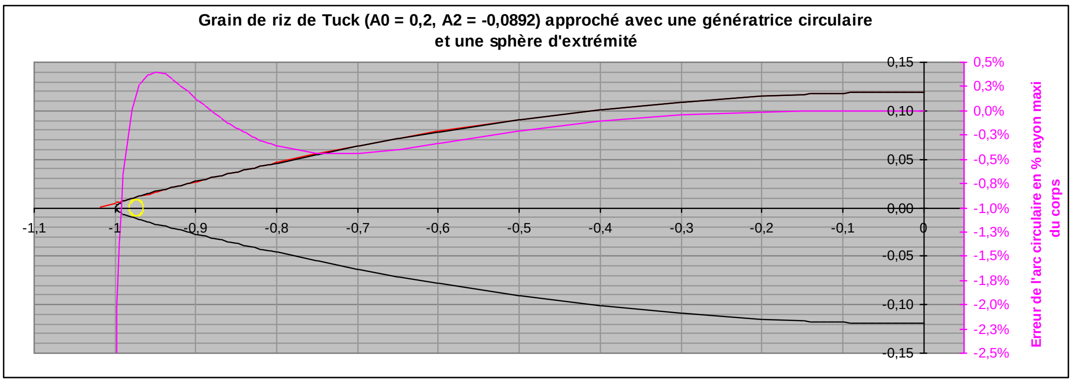
Comme on le voit, nous avons préféré, dans nos réglages, prolonger l'arc de cercle rouge jusque devant le corps : cet arc de cercle s'écarte donc de fait de la génératrice du corps dans le dernier % de la longueur de celui-ci ; cependant, cet écart nous paraît mieux respecter la faisabilité d'un tel corps de Tuck en grain de riz ; expliquons nous :

L'arrondi que dessine la pointe du corps est évidemment une obligation de tous corps existant <u>physiquement</u> ; pour comparaison avec cet arrondi, nous avons dessiné, un peut à l'écart de cette pointe, le cercle jaune qui pourrait générer la calotte sphérique osculatrice de la pointe du corps. Ce cercle jaune a comme diamètre **7,2 %** du diamètre maximal du corps en grain de riz, c.-à-d. que si ce corps arbore un diamètre maximal de **1 mm** (ce qui lui fera **~10 mm** de longueur, longueur déjà forte en régime de

Stokes [126]), la sphère terminale que ce cercle jaune formera par révolution aura **0,07 mm** de diamètre : à notre sens peu d'aiguille sont aussi affutées. De ces considérations, on peut déduire que la forme de notre corps en grain de riz de Tuck (pour $\mathbf{A_0 = 0,2}$ **et** $\mathbf{A_2 = –0,0892}$) est assez réaliste et que, même réalisée sur la base de notre définition de l'arc de cercle rouge, elle ne pourra sortir de l'atelier qu'avec une pointe physique de quelques centièmes de millimètres de diamètre, pointe physique que dessine justement très bien le corps de Tuck en grain de riz.

Une réflexion générale sur l'effet de l'émoussement des pointes de corps parfaitement aigues en régime de Stokes pourraient d'ailleurs être menée, mais ni notre corps de Tuck en grain de riz ni la réalisation pratique que nous en imaginons n'ont des pointes parfaitement aigues…

Voici (ci-dessous en fuchsia) la courbe représentant l'erreur de notre génératrice en arc de cercle rouge par rapport à le génératrice théorique noire de Tuck, cette erreur étant exprimée en **%** du rayon maximal du corps théorique (courbe à lire sur l'axe fuchsia de droite) :



À l'équateur du corps (abscisse nulle), l'erreur est nulle. Plus vers son pôle, elle tend vers les **+0,4 %** avant de prendre de fortes valeurs à la pointe (où cette génératrice rouge ne saurait être respectée au moment de la fabrication du corps, nous l'avons assez dit).

Ces mises en garde préliminaires effectuées, nous avons le plaisir d'écrire que le $\mathbf{C_x}$ linéaire de ce corps en grain de riz de Tuck à génératrice en arc circulaire (pour $\mathbf{A_0 = 0,2}$ **et** $\mathbf{A_2 = –0,0892}$), en référence à sa longueur totale $\mathbf{L = 2\ell}$, vaut, comme précisé plus haut, $\mathbf{4\,\pi\,A_0}$, soit :

$$\boxed{\mathbf{C_{x\mathrm{Lin}\,L} = 2,513}}$$

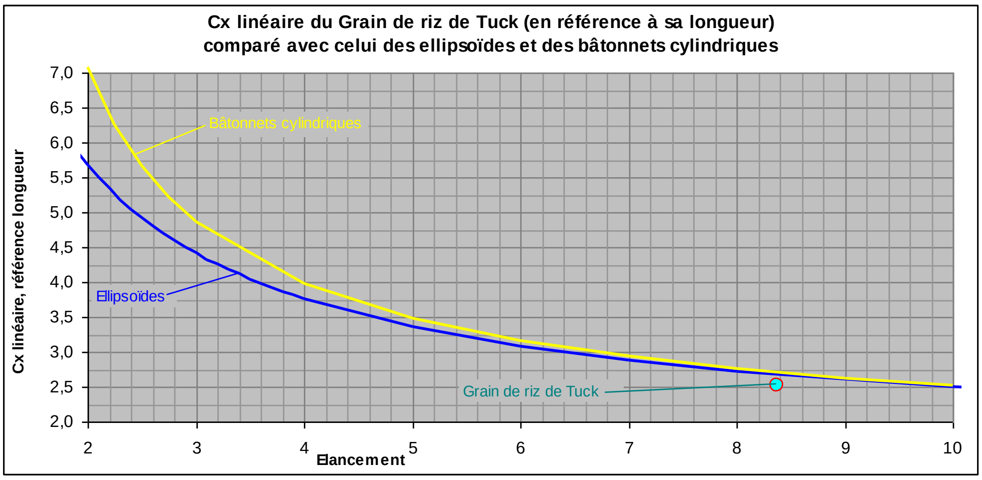
…qui est le $\mathbf{C_x}$ linéaire, en référence à sa longueur, du *Corps de Tuck en grain de riz* (à génératrice en arc de cercle et d'élancement *physique* **8,3688** [127]).

[126] …ce qui imposera un fluide très visqueux pour qu'un tel corps se déplace en régime de Stokes, sauf à ce que la densité de ce corps soit très proche de celle du fluide…

[127] Par *élancement physique* nous signifions l'élancement mathématique du Corps de Tuck en grain de riz mesuré entre ses pointes arrondies. On doit le calculer en divisant la demi-longueur du corps (**1**)par

Le rayon de l'arc circulaire qui forme cette génératrice vaut **2,213 fois** la longueur du corps en grain de riz et l'angle au centre de l'arc circulaire est **27,256°** [128].

Nous pouvons comparer ce $\mathbf{C_x}$ linéaire avec ceux des ellipsoïdes et des bâtonnets cylindriques :



Le $\mathbf{C_x}$ linéaire des bâtonnets est ici donné par le libellé :

$$\mathbf{C_{xLin}} = \frac{\mathbf{2\pi}}{\mathbf{Ln(2\lambda) - 0{,}5}}$$

On doit conclure de cette comparaison que la forme en pointes de notre grain de riz est légèrement moins traînante que les extrémités plus plates des ellipsoïdes et des bâtonnets cylindriques.

Il faut d'ailleurs rappeler que la méthode de Cox attribue à ce corps à génératrice circulaire un $\mathbf{C_x}$ linéaire (en référence longueur) du même ordre bien qu'un peu plus faible, cette méthode de Cox étant grevée par le faible élancement (**8,3688**) du corps…

Cependant, ce graphe de comparaison des $\mathbf{C_x}$ linéaire des corps, outre son rôle d'avertissement contre certaines valeurs irréalistes, n'aide guère dans la réflexion à propos du corps de moindre Traînée en régime de Stokes.

Pour faciliter cette dernière réflexion, il convient de définir plus précisément ce qu'est le corps de moindre Traînée. Nous le ferons plus bas…

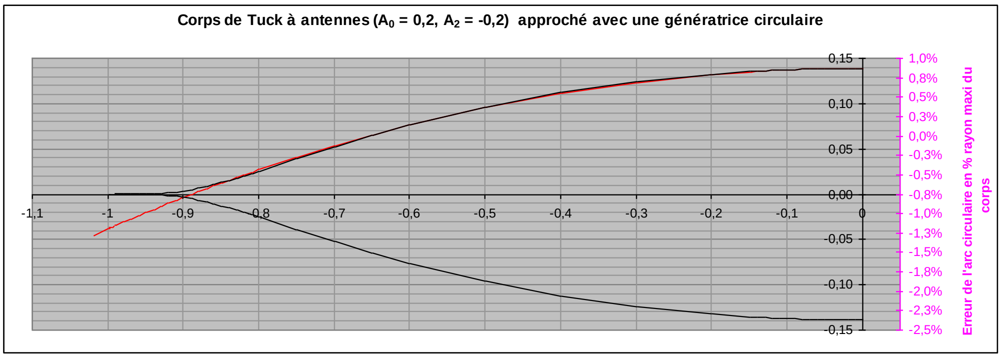
Cx linéaire du Corps à antennes de Tuck en déplacement axial :

Comme le corps de Tuck en grain de riz, le corps de Tuck à antennes possède une génératrice assez proche de l'arc circulaire (un peu moins proche, cependant) :

---

son rayon maximal qui se trouve à son abscisse nulle (**0,1195**). Le $\mathbf{C_x}$ linéaire en référence à la longueur mathématique de l'arc circulaire (en rouge) serait plus proche de **2,45**.

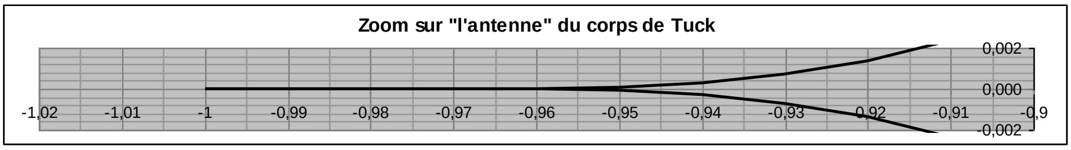
[128] Ces informations sont d'ailleurs redondantes car il n'existe qu'un corps à génératrice circulaire de chaque élancement.



Il est malheureusement prolongé par deux antennes (une à chaque bout) dont il nous est difficile de connaître l'influence sur la Traînée.

Il nous semble cependant que l'influence de la partie des antennes dont le diamètre est infinitésimal doit être faible.

Voici d'ailleurs un zoom sur une des régions à antenne :



Le rayon de l'antenne à l'abscisse **- 0,94** vaut **0,22 %** du rayon maximal du corps. Si ce rayon maximal valait **1 mm**, cette antenne aurait donc un diamètre de **4 microns**.

À l'abscisse **- 0,95**, son diamètre serait de **1,7 microns**.

Nous considérerons donc pragmatiquement qu'à l'extérieur de la plage d'abscisses **-0,94 ; 0,94**, les antennes n'ont pas d'existence physique et n'influent pas sur l'écoulement du fluide…

À cette condition, la longueur physique du corps est **L= 2*0,94**.

Note sur la contribution à la Traînée des « antennes » de corps principaux :

Dans son texte, Tuck écrit :

« […] la nouvelle solution est obtenue en attachant aux extrémités du […] corps des pointes d'épaisseur relative nulle (et donc de trainée présumée nulle) […]. »

Tuck admet donc que des pointes de faibles diamètres (par rapport à leur longueur) ne doivent pas significativement influer sur sa Traînée.

Ce sont ces *pointes* que nous avons, quant à nous, appelées *antennes*.

Si l'on considère les antennes du corps de Tuck à antennes comme des cylindres isolés (c.-à-d. loin de tout autre corps), leur élancement moyen de **~10^{10}** leur alloue à chacune une Longueur Équivalente de Traînée de **0,0136**. Cette Longueur Équivalente de Traînée est à comparer à la Longueur Équivalente de Traînée de **2*2,513** du corps complet (telle que calculée par Tuck) : Chaque antenne considérée comme un cylindre isolé représente donc **0,27 %** de la Longueur Équivalente de Traînée du corps complet. Mais la contribution de ces antennes à la Traînée du corps est forcément beaucoup plus faible puisque leur écoulement est très influencé par l'écoulement du corps principal : C'est un phénomène que l'on rencontrera plus bas lorsque l'on observera la contribution à la Traînée d'une sphère principale d'une sphère secondaire beaucoup plus petite placée en son contact).

Pour être complet, il faudrait encore compter avec le fait que les antennes, par leur présence, diminuent légèrement la Traînée du corps principal qui les porte. Cette diminution est faible, mais elle existe, comme semble le montrer l'exemple des corps composites formés par des sphères de diamètres très différents (corps étudiés dans le texte de Cooley et O'Neill que nous exploitons plus bas). La Traînée (très limitée) de chaque antenne est donc, dans une certaine mesure, compensée par la diminution que cette antenne impose à la Traînée du corps principal…

Nous reviendrons d'ailleurs plus bas, et avec plus de détails, sur ce problème de la Traînée des antennes.

Le $\mathbf{C_x}$ linéaire de ce corps de Tuck (avec antennes) est le même que celui du corps précédent (à savoir $\mathbf{4\,\pi\,A_0}$, soit $\mathbf{C_{xLin\,2\ell} = 2{,}513}$).

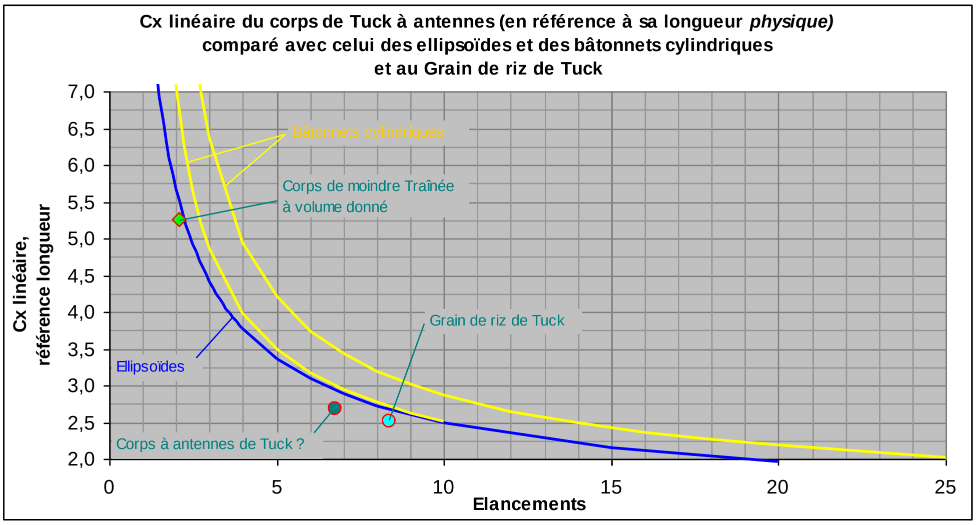
En référence à sa longueur physique de **2*0,94**, le $\mathbf{C_x}$ linéaire vaut **2,513/0,94**, soit $\mathbf{C_{xLin\,L} = 2{,}6737}$.

Dans notre étude des corps de Tuck, c'est ce dernier $\mathbf{C_x}$ linéaire que nous prendrons en compte, tout en admettant, à titre de simplification, que la génératrice de ce corps *à antennes* est circulaire.

Cette dernière simplification étant assez osée, nous ferons souvent suivre les représentations de ce corps à antennes sur nos graphes d'un point d'interrogation…

Dans cette version *sans les parties infinitésimales de ses antennes*, l'élancement (que nous nommerons *élancement physique*), vaut **6,7642**.

Voici la confrontation de ce $\mathbf{C_x}$ linéaire avec celui d'autres corps :



Sur ce graphe apparaît le $\mathbf{C_x}$ linéaire (en référence à sa longueur) du corps de moindre Traînée à volume donnée : nous y reviendrons plus bas…

Le $\mathbf{C_x}$ linéaire des bâtonnets cylindriques est ici calculé par l'équation de Cox :

$$\mathbf{C_{xLin\,L} = \frac{2\pi}{Ln(2\lambda) - 0{,}807}}$$

(courbe haute dont notre exploitation des travaux d'Ui nous a convaincu qu'elle était à quelques **%** de la réalité aux forts élancements)

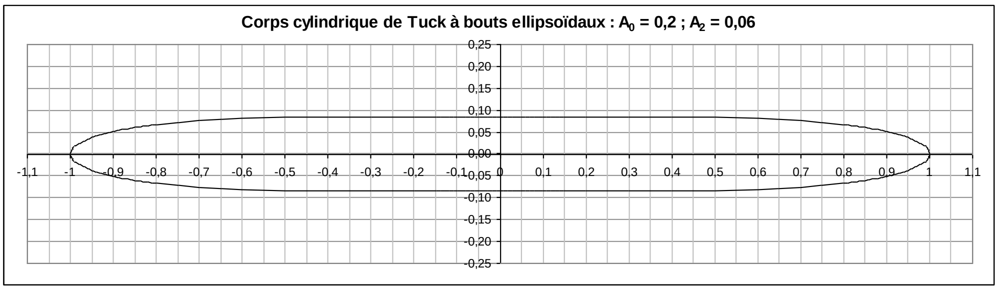
…et par l'équation :

$$\mathbf{C_x}\text{Lin L} = \frac{\mathbf{2\pi}}{\mathbf{Ln(2\lambda) - 0,5}}$$

(courbe basse que nous croyons disqualifiée par les même travaux d'Ui mais qui, comme on le voit, représente correctement les aiguilles ellipsoïdales à partir de l'élancement **10**)

<u>Corps de Tuck à bouts quasi-ellipsoïdaux en déplacement axial :</u>

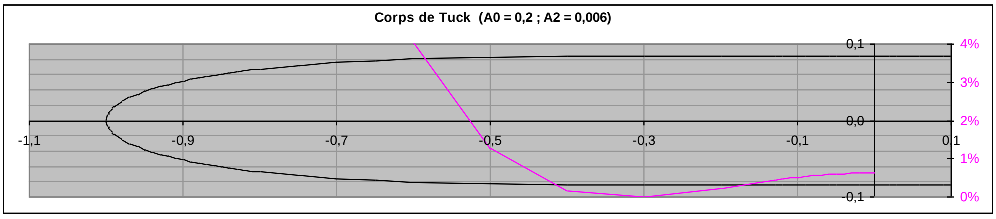
Ce corps d'élancement **11,91** a déjà été présenté plus haut (et a déjà été analysé selon la méthode de Cox) :



Il est donné, comme indiqué dans le titre du graphe, par le couple de paramètres (**A_0 = 0,2 ; A_2 = 0,06**).

Ainsi qu'on peut le remarquer sur le même graphe, ce couple de paramètres dessine au milieu du corps une longue portion quasi cylindrique.

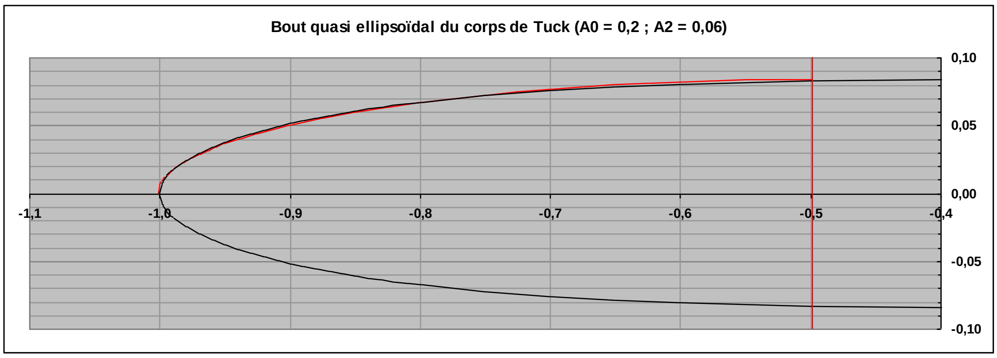
Non disons *quasi-cylindrique* car l'erreur pour cent sur le rayon [129] entre les abscisses **-0,5** et **0,5** n'atteint **1,26 %** qu'aux abscisses **-0,5** et **0,5** (comme le montre la courbe fuchsia ci-dessous, à lire sur l'axe fuchsia de droite).



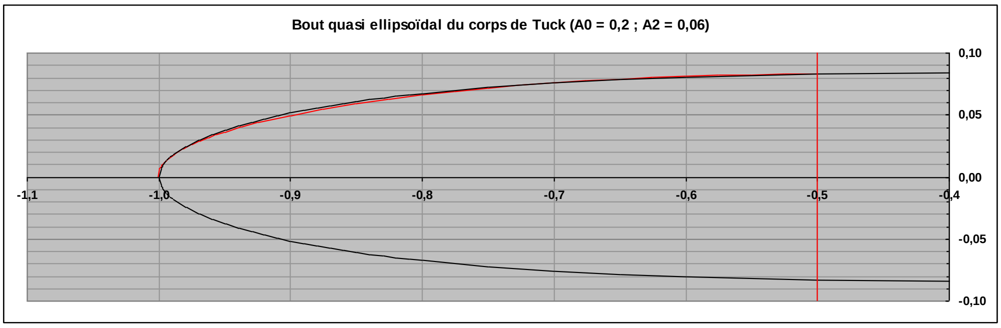
Et encore cette diminution de **1,26 %** peut-elle être prise comme l'amorce des bouts quasi-ellipsoïdaux.

Quant à la proximité de la forme de ces bouts avec des demi-ellipsoïdes de révolution, nous pouvons en faire juge le lecteur en dessinant l'ellipse rouge, avec son petit axe (vertical) ci-dessous :

[129] Nous voulons signifier par là **(R_{max} –$R_{(x)}$)/R_{max}** , exprimé en **%**.



Comme il apparaît sur ce graphe, nous avons donné à cette ellipse rouge le rayon du corps en son milieu. Mais une adaptation de ce rayon au rayon du corps à l'abscisse **–0,5** produit le résultat suivant :



Dans ce dernier cas, l'erreur maximale sur le diamètre, qui se produit aux alentours de l'abscisse **–0,9**, est de **2,3 %** du diamètre maximal du corps, c.-à-d. que si ce dernier est **1 mm**, l'erreur est de **2,3** centièmes de millimètre, ce qui est raisonnable.

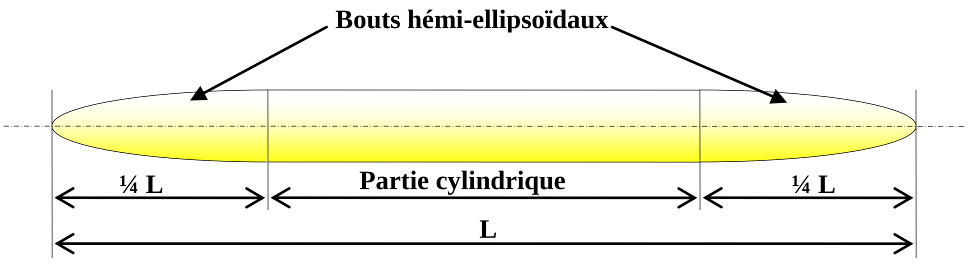
Dans les deux cas donc, les bouts du corps sont assez peu différents de deux demi-ellipsoïdes…

C'est ce qui nous autorise à assimiler ce corps de Tuck à un cylindre à extrémité hémi-ellipsoïdales (hémi-ellipsoïdes dont les demi grands axes valent chacun le quart de la longueur du corps).

Les calculs de Tuck attribuent à ce corps d'élancement **11,91**, le $\mathbf{C_x}$ linéaire, en référence à sa longueur :

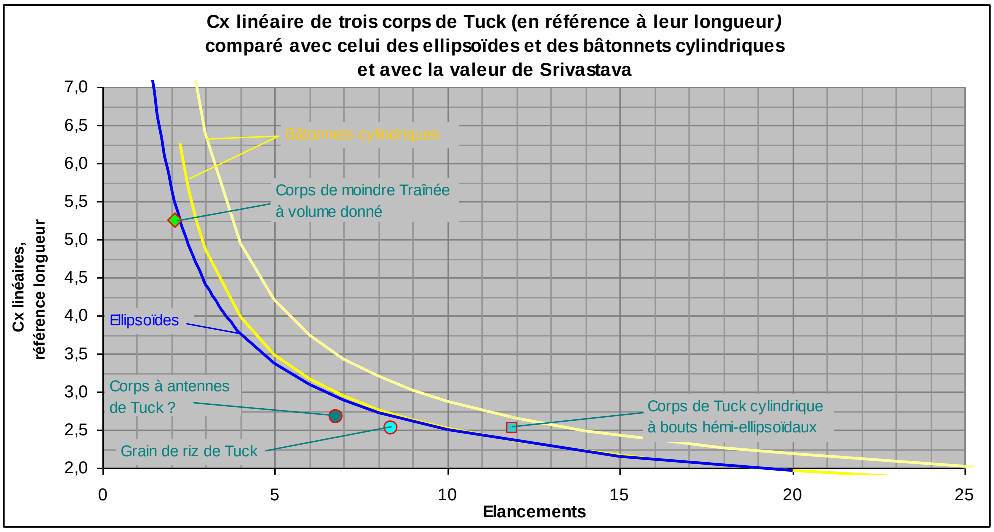
$$\boxed{\mathbf{C_{x\text{Lin}\,L} = 2{,}513}}$$

…qui est le $\mathbf{C_x}$ linéaire, en référence à sa longueur, de ce corps de Tuck d'élancement **11,91** qui doit pouvoir être assimilé, à notre sens, à un corps cylindrique à deux bouts hémi-ellipsoïdaux dont les demi grands axes mesurent chacun le quart de la longueur du corps :



Nous avons vu plus haut, que la méthode de Cox attribue un **C_x** linéaire de **2,4962** à ce corps, ce qui est très près (à moins de **0,7 %**) de la valeur trouvée par Tuck…

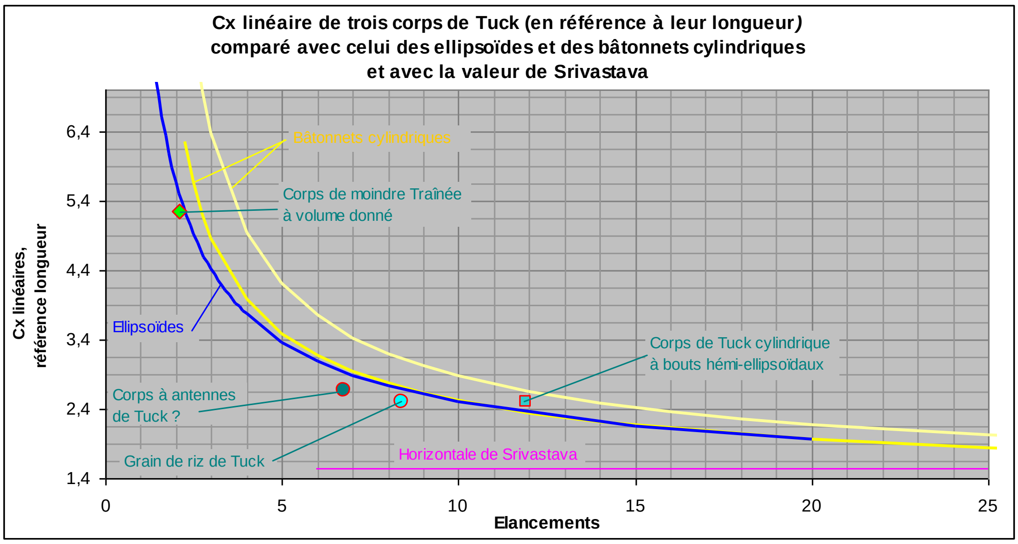
Sur un graphe des **C_x** linéaires (en référence à la longueur des corps), ce corps cylindrique à bouts hémi-ellipsoïdaux (ou assimilé) se place (par définition) à la même hauteur que le *grain de riz de Tuck* (**2,513**), mais à une abscisse plus forte (**11,91**) puisque le diamètre de ce corps est un peu plus faible à longueur égale (et donc son élancement plus fort) :



On note qu'il se trouve un peu au dessus de la courbe bleue des ellipsoïdes mais entre les deux courbes jaunes des bâtonnets cylindriques (qui souffrent sûrement de leurs faces avant et arrière très abruptes, même si cela ne se fait pas sentir sur l'une des courbes).

Cette valeur **2,513** du **C_x** linéaire est assez loin de celle calculée par de tout autres moyens par Srivastava, puisque celui-ci donne la Traînée de notre corps cylindrique à extrémités hémi-ellipsoïdales comme valant celle de la seule ellipsoïde reconstituée à partir des deux hémi-ellipsoïdes, c.-à-d. que la Traînée de notre corps vaut celle d'un ellipsoïde d'élancement **11,91 / 2**, soit **5,96** (voir notre schéma de ce corps).

Le **C_x** linéaire de cet ellipsoïde reconstitué est **3,1** mais si la Traînée de cet ellipsoïde doit être celle du corps de Tuck complet, il convient de diviser ces **3,1** par deux puisque nous référençons ci-dessous le **C_x** linéaire du corps de Tuck en référence à sa longueur. ce $\mathbf{C_x}$ linéaire est représenté sur le graphe ci-dessous par l'horizontale fuchsia :



En effet, bien que ce résultat de **3,1** soit à dessiner à l'élancement de notre corps cylindrique à extrémités hémi-ellipsoïdales (soit **11,91**), le texte de Srivastava n'accorde aucune importance à la longueur de la partie cylindrique. Le $\mathbf{C_x}$ linéaire de **3,1** est donc celui de tous les corps présentant ce type d'extrémités hémi-ellipsoïdales (d'élancement **11,91 / 2**), <u>quelle que soit la longueur de leur partie cylindrique</u> : c'est pourquoi nous avons représenté le résultat de Srivastava par une horizontale puisque ce $\mathbf{C_x}$ linéaire de **3,1** vaut pour tous les élancements de ces corps à partie cylindrique centrale pourvu qu'ils arborent des extrémités hémi-ellipsoïdales d'un demi-élancement de **11,91 / 2**.

Ce résultat de Srivastava est donc très curieux et nous ne savons quelle importance lui donner. Le même auteur écrit dans son texte, à propos d'autres valeurs de Traînée (dont la Traînée transverse du même corps) :

« Ces résultats [de traînée] sont les mêmes que ceux de l'ellipsoïde allongé [reconstitué avec les deux demi-ellipsoïdes] ; cela peut être dû au fait que [la partie cylindrique centrale] est à génératrice droite, ce qui pourrait faire qu'elle ne contribue par à la force de Traînée. »

Cette hypothèse mériterait plus de réflexion et par des personnes plus compétentes que nous. Néanmoins le fait qu'une partie importante de la surface d'un corps (plus de la moitié) soumis à un frottement visqueux n'en ressente aucune Traînée ne nous paraît pas réaliste.

En tous cas, nous ne sommes guère incité à donner beaucoup d'importance aux résultats de Srivastava car cet auteur montre, en continuant à les justifier, qu'il n'est pas Mécanicien des Fluides (même si c'est le cas de beaucoup des mathématiciens qui ont calculé la Traînée de corps en régime de Stokes) ; Srivastava écrit en effet :

« Ces mêmes résultats justifient aussi la forme allongée des torpilles sous-marines que lâchent les sous-marins vers des navires ennemis : on exige pour ces torpilles un minimum de Traînée afin qu'elles atteignent rapidement leur cible. »

Ces propos sont courageux (il est courageux de tenter de justifier ses calculs) mais sans valeur scientifique : nous avons assez écrit sur les corps de moindre Traînée pour savoir que les torpilles ne sont en rien de tels corps de moindre Traînée (voir à ce sujet notre texte AÉRODYNAMIQUE DES CORPS D'EIFFEL) : le grand élancement et la forme générale cylindrique des torpilles sont nécessités par le fait qu'elles doivent être lancées pneumatiquement dans une direction précise et à travers des ouvertures de faibles dimensions pratiquées dans la coque des sous-marins.

D'autre part, il n'y a guère de comparaisons à faire entre la Mécanique des Fluides des hauts Reynolds (où les efforts de Traînée ont une grande composante inertielle) et celle des très bas Reynolds qui nous occupe dans le présent texte…

D'ailleurs, contrairement à ce que suppute Srivastava, la force de Traînée visqueuse sur la partie cylindrique centrale des torpilles est très importante aux hauts Reynolds où croisent ces torpilles…

Il est, de plus, important de rappeler au lecteur que la plupart des $\mathbf{C_x}$ linéaire que nous avons donnés dans ce texte sont les fruits de calculs mathématiques sinon exact, du moins d'une grande précision. Il n'est donc pas possible que, s'agissant du corps à partie centrale cylindrique et à extrémités hémi-ellipsoïdales (ou assimilées), et le $\mathbf{C_x}$ linéaire de Tuck et celui annoncé par Srivastava soient tous deux exacts : l'un seul est exact.

Et à notre sens, la représentation du $\mathbf{C_x}$ linéaire de Tuck sur nos graphes est beaucoup plus réaliste.

De plus, le fait que la longueur de la partie cylindrique ne compte pas dans le calcul de Srivastava nous paraît impossible à légitimer puisque lorsque cette partie est longue, la logique veut que la Traînée de ce corps tende vers celle du cylindre assez long en mouvement axial que nous avons étudié plus haut et qui dépend de son élancement (ce que l'on voit sur notre dernier graphe)…

Étude des limites de la proposition de E. O. Tuck :

En présentant plus haut les travaux mathématiques de Tuck, nous avons constaté que pour la valeur **0,2** du paramètre $\mathbf{A_0}$, le choix de la valeur **0** pour le paramètre $\mathbf{A_2}$ faisait dessiner une ellipse à l'équation :

$$\mathbf{R(x)} = 2\sqrt{1-x^2}\ \mathbf{Exp}\left[-\frac{\dfrac{1+A_0}{2}+2A_2\left(\dfrac{3}{2}x^2-\dfrac{1}{2}\right)}{A_0+A_2\left(\dfrac{3}{2}x^2-\dfrac{1}{2}\right)}\right]$$

En effet, pour ce couple de paramètres (**0,2** ; **0**), l'équation devient :

$$\mathbf{R(x)} = 2\sqrt{1-x^2}\ \mathbf{Exp}\left[-\frac{0{,}6}{0{,}2}\right] = 2\sqrt{1-x^2}\ \mathbf{Exp}[-3] = 0{,}0996\ \sqrt{1-x^2}$$

D'une façon plus générale, lorsque $\mathbf{A_2}$ est nul, toutes les valeurs de $\mathbf{A_0}$ dessinent les ellipsoïdes d'équation :

$$\mathbf{R(x)} = 2\sqrt{1-x^2}\ \mathbf{Exp}\left(-\frac{\frac{1+A_0}{2}}{A_0}\right)$$

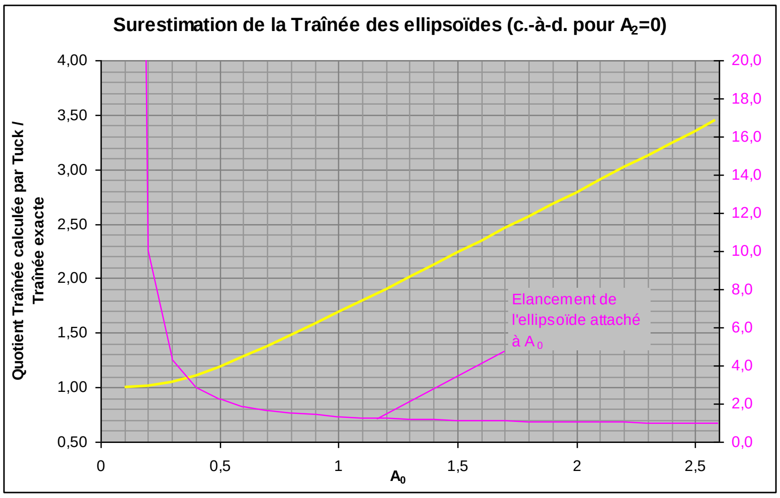
Pour la valeur particulière $\mathbf{A_0 \approx 2{,}59}$, cet ellipsoïde est même le cercle de rayon unitaire :

$$\mathbf{R(x)} = \sqrt{1-x^2}$$

Cependant, avec ce dernier couple de paramètres (**2,59** ; **0**), nous sommes très loin du domaine de validité du texte de Tuck. Celui-ci annonce en effet, dans son sommaire, qu'il ne traite que de corps élancés.

Au demeurant, avec ce couple de paramètres (**2,59** ; **0**) le $\mathbf{C_x}$ linéaire du corps (une sphère), calculé tel que précédemment, à savoir $\mathbf{4\,\pi\,A_0}$, est **3,45** fois trop fort puisqu'il vaut $\mathbf{10{,}36\,\pi}$.

La courbe jaune ci-dessous dessine le quotient de la Traînée calculée par la fonction simple de Tuck sur la Traînée réelle des ellipsoïdes :



Pour les valeurs de $\mathbf{A_0}$ inférieures à **0,2**, c.-à-d. dans le domaine où Tuck se place, l'erreur sur le calcul des ellipsoïdes reste bien très faible (nous la trouvons inférieure à **1 %**).

Mais pour $\mathbf{A_0 = 0{,}3}$, l'erreur atteint déjà **4,74 %** et pour $\mathbf{A_0 = 0{,}4}$ elle monte à **11,18 %**.

Quant à la valeur $\mathbf{A_0 = 2{,}59}$ qui dessine un corps sphérique, elle se monte bien à près de **3,5**, comme nous l'avons vu.

En fuchsia ci-dessus nous avons porté l'élancement de l'ellipsoïde dessiné par la valeur de $\mathbf{A_0}$ (et pour $\mathbf{A_2 = 0}$) : il est notable que, si pour $\mathbf{A_0 = 0{,}2}$ l'élancement du corps est ≈ **10**, pour **A_0 = 0,3** l'élancement est à peine supérieur à **4** et l'on ne respecte donc plus la *condition de grand élancement* imposé par Tuck…

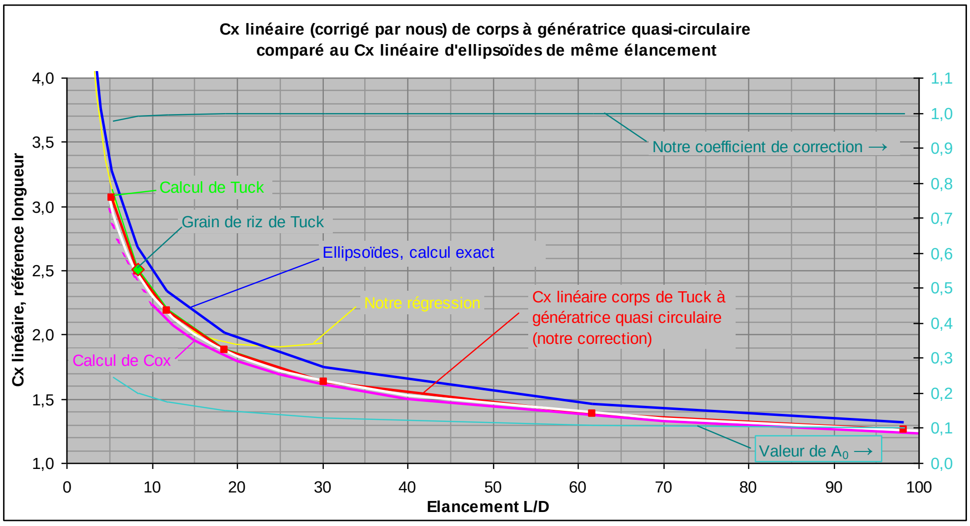
Ces constats d'erreurs valent pour l'ellipsoïde (dont nous possédons une valeur analytique exacte), mais il nous est malheureusement difficile de l'étendre à d'autres corps, à valeur de **A_0** donnée : c'est bien dommage car, au fond, pour **A_0 = 0,3**, par exemple, connaître le **C_x** linéaire d'un corps donné avec **4,74 %** d'erreur pourrait constituer un progrès…

Cependant, E. O. Tuck écrit dans son texte :

« de telle sorte que, pour une valeur donnée de **A_0** et pour une longueur fixée du corps, tous les corps générés par [l'équation générale [130]] ont la même traînée que l'ellipsoïde de révolution [que dessine cette équation générale pour certaines valeurs des paramètres]. »

Fort de cette vérité (qui n'est peut-être que relative), nous avons effectué des essais de corrections de la Traînée donnée par Tuck pour chaque valeur de **A_0** en considérant que tous les corps donnés par cette valeur de **A_0** aurons la même Traînée (corrigée) que l'ellipsoïde, même s'il ne sont pas des ellipsoïdes.

Nous dégageons alors, pour un certain jeu de couple de paramètres [**A_0** et **A_2**], des valeurs assez réalistes de la Traînée de corps en quasi grain de riz (c.-à-d. à génératrice quasi-circulaire) ; le **C_x** linéaire de ces corps (en référence à leur longueur) est comparé ci-dessous (marques carrées rouges reliée par la courbe rouge) à celui des ellipsoïdes (en bleu dense, également en référence à leur longueur prise égale à celle du corps), ceci jusqu'à des élancements tendant vers **100** :



La silhouette de ces corps n'est jamais aussi (presque) parfaitement à génératrice circulaire que nous avons pu l'apprécier plus haut pour le corps en grain de riz défini par le couple de paramètres (**A_0 = 0,2** ; **A_2 = -0,089**), mais nous nous sommes appuyé, dans cette recherche particulière, sur le fait qu'en régime de Stokes la forme des corps est de moindre importance…

[130] Encore cette équation générale a-t-elle un nombre possiblement très grands de coefficient **A_0**, **A_1**, **A_2**, **A_3**…**A_n**, mais dans la présente étude nous en restons aux deux seuls coefficients **A_0** et **A_2**.

En haut de ce graphe apparaissent en bleu glauque la valeur de notre coefficient de correction (assez proche de **1** pour ces corps et donc sans doute inutile) et en bleu plus clair la valeur de $\mathbf{A_0}$ (ces deux dernières courbes étant à lire sur l'axe de droite) : il est visible que nous avons choisi principalement, pour dessiner ces corps en grain de riz, des $\mathbf{A_0 \leq 0,2}$, valeurs de ce paramètre qui garantissent des grands élancements…

En vert sous la courbe rouge apparaît à peine aux petits élancements le $\mathbf{C_x}$ linéaire calculé d'après Tuck (sans notre correction, donc) : la proximité de cette courbe verte avec la rouge, ainsi que la valeur de notre coefficient de correction tend à prouver que ladite correction est inutile.

En jaune est bien visible la régression que nous proposerons plus bas (dans la partie de notre texte consacrée aux corps de moindre Traînée) pour les corps en grain de riz d'élancement modéré (régression qui, on le voit, décroche de la courbe rouge à l'élancement **15**).

Sur le même graphe apparaît en fuchsia la courbe du $\mathbf{C_x}$ linéaire (référence L également) des corps à génératrice circulaire tels que calculés selon la méthode de Cox, à savoir selon le libellé :

$$\mathbf{C_{x\text{Lin, réf L.}}} = \frac{\mathbf{2\pi}}{\mathbf{Ln(2\lambda) - 0,18675}}$$

…λ étant bien-sûr l'élancement du corps [131].

Il est plaisant que cette courbe fuchsia de Cox épouse assez bien la forme de la courbe rouge (due à Tuck), surtout pour les forts élancements.

Cependant, nous avons cru bon, en observation des résultats trouvé par la méthode de Tuck, de rehausser cette courbe fuchsia pour qu'elle recouvre au mieux la courbe rouge qui synthétise ces résultats. Cette rehausse s'obtient en choisissant une coefficient C_1 de l'équation de Cox ci-dessus non plus de **–0,18675** mais de **–0,26**, ce qui dessine ci-dessus la courbe blanche dont l'équation est :

$$\boxed{\mathbf{C_{x\text{Lin, réf L.}}} = \frac{\mathbf{2\pi}}{\mathbf{Ln(2\lambda) - 0,26}}}$$

…équation où λ est l'élancement du corps qui constitue notre proposition de $\mathbf{C_x}$ linéaire (référence longueur) pour les corps à génératrice circulaire d'élancements supérieurs à **5** en déplacements axiaux,.

Pour mémoire, les choix des paramètres $\mathbf{A_0}$ et $\mathbf{A_2}$ qui nous ont permis de dessiner ces corps en quasi-grain de riz sont les suivants :

Valeur de $\mathbf{A_0}$: **0,100 ; 0,110 ; 0,130 ; 0,150 ; 0,175 ; 0,200 ; 0,250**
Valeur de $\mathbf{A_2}$: **-0,0133 ; -0,0180 ; -0,030 ; -0,0407 ; -0,0570 ; -0,0933 ; -0,1907**

[131] On se souvient que, suite à notre calcul de l'intégrale de Cox, nous avons opté pour le coefficient C_1 moyen de **–0,18675**.

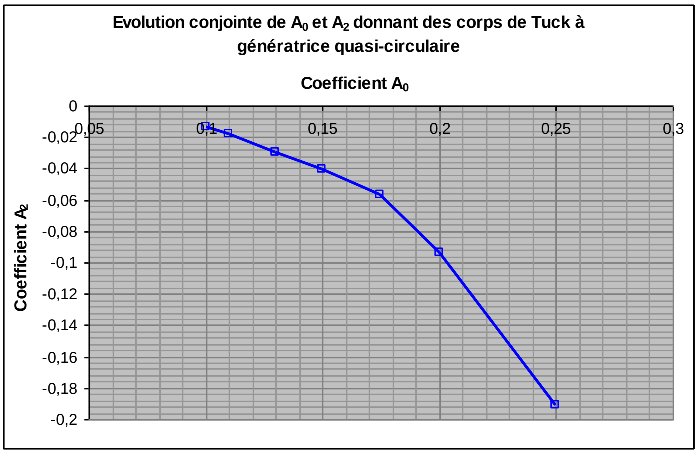
Ce qui donne comme élancement au corps :

Élancement : **98,31 ; 61,68 ; 30,27 ; 18,57 ; 11,87 ; 8,31 ; 5,31**

…et comme $\mathbf{C_X}$ linéaire référence longueur :

1,257 ; 1,382 ; 1,634 ; 1,885 ; 2,199 ; 2,513 ; 3,142

Voici d'ailleurs pour mémoire l'évolution $\mathbf{A_2 = f(A_0)}$ telle que nous l'avons réglée (« à vue » pour que la génératrice des corps soient la plus proche de l'arc circulaire) :



Mettant à profit un succès obtenu par hasard lors de notre étude des corps d'Eiffel vus par Tuck (étude que nous exposerons plus bas), nous avons cherché à corréler les valeurs du paramètre $\mathbf{A_2}$ avec celle de $\mathbf{A_0}$. Une régression parabolique nous a été proposé par notre tableur. C'est :

$$\mathbf{A_2 = -7{,}3555\ A_0^2 + 1{,}4238\ A_0 - 0{,}0856}$$

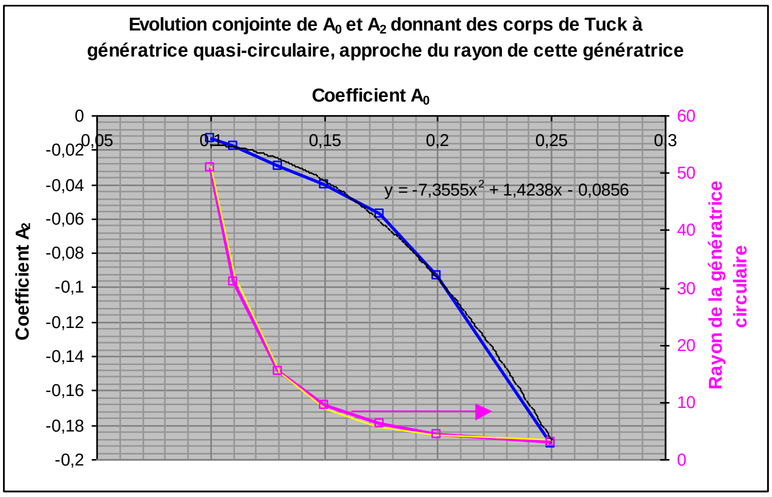
Cette corrélation placé dans l'équation de Tuck à deux paramètres dessine des corps à génératrice assez proche de l'arc circulaire entre les élancements **6** et **40** [132] (les faibles élancements devant sans doute être exclus comme ne respectant pas la condition de fort élancement posée par Tuck).

Un corrélation approche également le rayon relatif de la génératrice circulaire de tous ces corps ; c'est :

$$\mathbf{Rayon/L = 0{,}00016423\ A_0^{-5{,}164} + 1{,}537}$$

…**L** étant la longueur du corps. Cette corrélation apparaît en jaune ci-dessous sur la courbe fuchsia du rayon (les deux à lire sur l'échelle de droite) alors que la corrélation $\mathbf{A_2 = f(A_0)}$ apparaît en noir avec son équation :

[132] Nous aurions aimé trouvé une explication analytique à ce phénomène très utile…



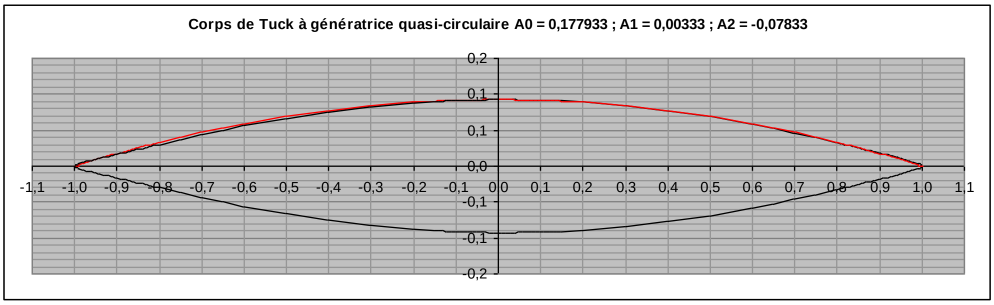
Ceci étant, le rayon de la génératrice est lié géométriquement à l'élancement **λ**.

Ce panorama des corps en quasi-grain de riz, réalisé pour l'essentiel dans le domaine da validité des calculs de Tuck, est donc intéressant et réaliste et il tend à accréditer l'idée que les formes pointues sont génératrices d'une moindre Traînée que les corps dont les zones de points d'arrêt sont plus plates [133].

Pour des valeurs de $\mathbf{A_0}$ plus forte que **0,2** (à gauche de notre graphe des $\mathbf{C_x}$ linéaires), c.-à-d. en dehors du domaine de validité préconisé par Tuck, les $\mathbf{C_x}$ linéaires des corps dessinés par l'équation du même Tuck apparaissent même assez réalistes, même s'ils sont sans doute un peu trop fort [134].

Afin d'en terminer avec ces corps à génératrice circulaire (jusqu'à plus ample informé) signalons deux autres corps « de rencontre » de Tuck à génératrice circulaire :

Le premier, dessiné par l'équation de Tuck à trois paramètres [$\mathbf{A_0}$ **= 0,177933**, $\mathbf{A_1}$ **= 0,00333** et $\mathbf{A_2}$ **= –0,07833**], équation que nous étudierons à l'instant, offre des formes assez proches de la génératrice circulaire (en rouge), ceci quoiqu'il ne soit pas tout à fait symétrique :

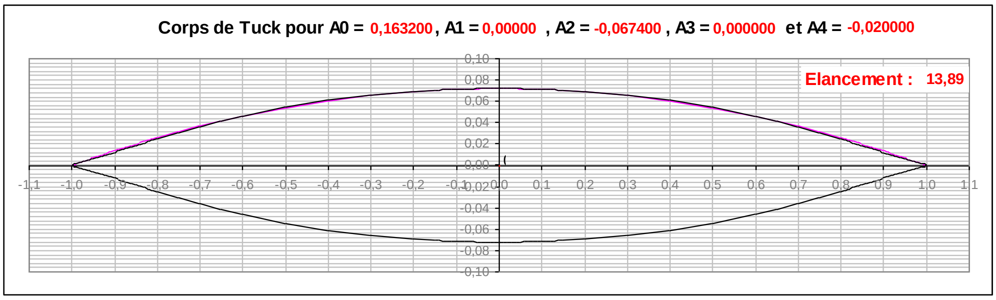


[133] Nous pensons aux deux points d'arrêt amont et aval.
[134] En fait seules des mesures précises en bassin de décantation permettraient d'en juger.

Le C_x linéaire (référence longueur) que prédit Tuck à ce corps d'élancement **10,81** est **2,236** [135] alors que notre régression encadrée ci-dessus (dessinant la courbe blanche) le monterait à **2,233** : c'est un très beau résultat .

Ce corps de Tuck à trois paramètres tend donc à confirmer notre dernière régression encadrée ci-dessus…

Le deuxième corps « de rencontre » est dessiné par l'équation de Tuck à quatre paramètres (la valeur de ces paramètres étant indiquée dans le titre du graphe) :



Le C_x linéaire, en référence longueur, de ce corps d'élancement **13,89** est **2,051**. Il est satisfaisant de constater que ce C_x linéaire est conforme à celui que donne notre régression :

$$\mathbf{C_{xLin,\ réf\ L.}} = \frac{2\pi}{\mathrm{Ln}(2\lambda) - 0{,}26}$$

…régression qui dessine la courbe blanche dans ce graphe et qui, dans le cas présent donne le C_x linéaire de **2,050**.

Corps de Tuck à trois paramètres :

Comme suggéré à l'instant, nous avons été plus loin dans l'exploitation des travaux de Tuck. Ces travaux sont plus généraux que le laisse penser l'équation à deux paramètres (déjà présentée) puisque cette équation peut comporter une infinité de paramètres : si nous avons déjà dessiné des corps aux formes quasi-géométriques avec deux paramètres A_0 et A_2 il est fort probable qu'avec un nombre de paramètre supérieur, on pourra dessiner d'autre corps intéressants.

Commençons par présenter l'équation de Tuck lorsqu'elle comporte trois paramètres A_0, A_1 et A_2 :

$$R(x) = 2\sqrt{1-x^2}\ \mathrm{Exp}\left[-\frac{\dfrac{1+A_0}{2} + \dfrac{3}{2}A_1 x + 2A_2\left(\dfrac{3}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}\right)}{A_0 + A_1 x + A_2\left(\dfrac{3}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}\right)}\right]$$

[135] Quel que soit le nombre de paramètres de l'équation de Tuck, le C_x linéaire des corps est toujours **$4\pi A_0$**.

(attention au signe moins qui préside à la fraction présente dans l'exponentielle)

L'observation de cette équation à trois paramètres y montre la présence d'un **x** (à la puissance **1**) au numérateur et au dénominateur. Ce qui signifie que, contrairement à l'équation de Tuck à deux paramètres , cette nouvelle équation ne dessinera pas des corps symétriques.

C'est une bonne nouvelle car cela risque d'élargir l'éventail des corps dessinés par cette équation.

Une poursuite de l'observation de cette équation de Tuck à trois paramètres donne à penser que pour certaines valeurs de **x**, certains paramètres deviennent inopérant. Expliquons-nous :

Pour **x = 0** dans cette équation, par exemple, toutes les valeurs du paramètre $\mathbf{A_1}$ donneront la même ordonnée : Cela signifie que si l'on fait varier (par curseur, sur notre tableur, par exemple) la valeur de $\mathbf{A_1}$, la génératrice du corps passera donc toujours par le point [**0** ; **R**(**0**)], l'abscisse **R**(**0**) dépendant des paramètres $\mathbf{A_0}$ et $\mathbf{A_2}$ préalablement fixés, mais nullement de $\mathbf{A_1}$.

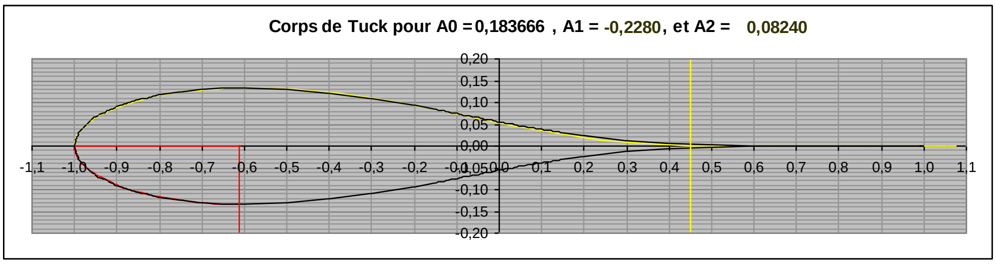
De même il existe aux abscisses **-0,57734** et **0,57734** [136] des points qui restent invariants lors des modifications de $\mathbf{A_2}$: cela signifie que si l'on fait varier $\mathbf{A_2}$, la silhouette du corps de Tuck se tordra de sorte qu'à ces deux abscisses les ordonnées restent constantes (quoique fixées par le choix préalable de $\mathbf{A_0}$ et $\mathbf{A_1}$).

Nous reviendrons plus bas sur ces points invariants, à propos de l'équation de Tuck à cinq paramètres.

Pour l'heure, voici l'un des premier corps que nous avons dessiné avec l'équation de Tuck à trois paramètres :

Corps lacrymal de Tuck à trois paramètres :

Les valeurs $\mathbf{A_0}$ **= 0,18366**, $\mathbf{A_1}$ **= – 0,228** et $\mathbf{A_2}$ **= 0,082400** dessinent le corps de révolution *lacrymiforme* suivant :



[136] Ce sont les racines de l'équation **(3/2)x²-1/2 = 0**.

Nous avons nommé ces corps *lacrymaux* pour ne pas les nommer *Corps en goutte d'eau* puisque, comme on le sait les gouttes d'eau sont quasiment toujours de forme sphérique…

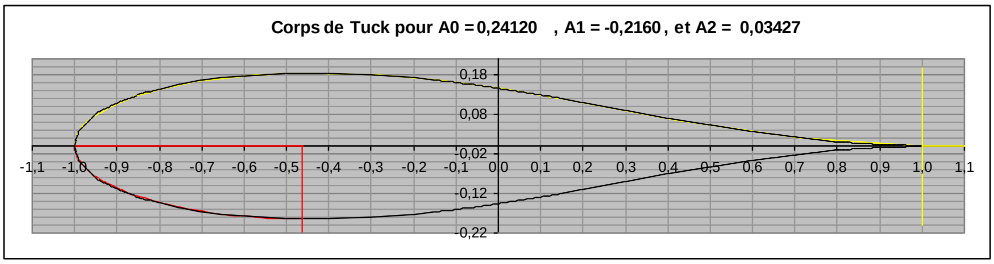
La silhouette de ce corps est ici comparée à l'ellipse (en rouge dans les ordonnées négatives de gauche) et à la silhouette d'un corps type (en jaune) que nous utiliserons plus bas.

Ainsi qu'on le voit, son diamètre se résout à presque rien à l'abscisse **~0,45** (il y présente un diamètre de moins d'**1 %** du diamètre maximal).

L'élancement pris en compte par Tuck (cet élancement courant de l'abscisse **–1** à l'abscisse **+1**) est de **7,48**, mais si l'on considère que la longueur *physique* du corps est **1,45** (de l'abscisse **– 1** à l'abscisse **+0,45**), l'élancement physique devient **5,43** (c'est l'élancement de notre corps type qui apparaît en jaune derrière la génératrice supérieure noire du corps).

De même ; le $\mathbf{C_x}$ linéaire (référence longueur) calculé par Tuck est **2,308**. Mais si on réfère ce $\mathbf{C_x}$ linéaire à la longueur *physique* du corps, on obtient le $\mathbf{C_x}$ linéaire **3,18** (réf. longueur), qui est le $\mathbf{C_x}$ linéaire de ce corps lacrymal (en référence à sa longueur physique). Nous utiliserons plus bas cette valeur dans notre réflexion présentant l'évolution du $\mathbf{C_x}$ linéaire d'un corps lacrymiforme en présence (à une distance plus ou moins grande) d'un corps jumeau.

Nous avons caressé le fol espoir de vérifier les calculs de Tuck ci-dessus lorsque nous avons fait dessiner à notre tableur le corps suivant, doté de la même forme lacrymale :



(les valeurs des trois paramètres $\mathbf{A_0}$, $\mathbf{A_1}$ et $\mathbf{A_2}$ sont données dans le titre du graphe)

Ainsi qu'on peut le noter, ce corps se développe entre les abscisses **–1** et **+1**.

De ce fait, son élancement est de **5,43** (puisqu'il honore la forme type rappelée en jaune) : cet élancement ne peut donc pas être considéré comme fort, ce qui est une des conditions imposée par Tuck pour que ses calculs de Traînée soient valides !

De fait le $\mathbf{C_x}$ linéaire de ce corps lacrymal type est donné par ces calculs de Tuck pour valoir **3,03** (en référence longueur), ce qui est un peu plus faible que les **3,18** annoncés à l'instant pour un corps de même silhouette se développant entre les abscisses **–1** et **0,45**.

Cette divergence pourrait être prise pour la conséquence de la transgression, lors de ce dernier calcul, de la condition qui impose aux corps un fort élancement mais nous y revenons ci-dessous.

Corps de Tuck à quatre paramètres :

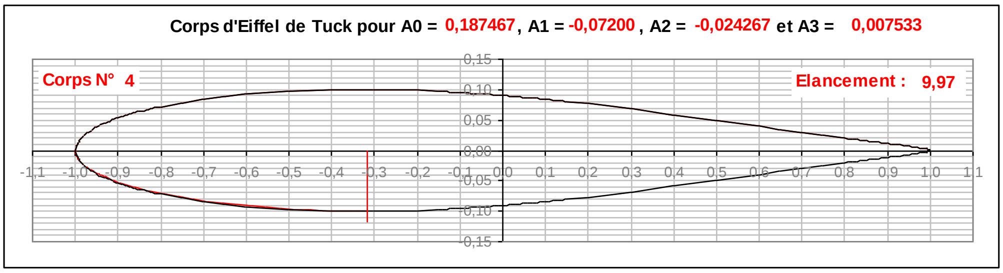
Aux paramètres $\mathbf{A_0}$, $\mathbf{A_1}$ et $\mathbf{A_2}$ s'ajoute à présent le paramètre $\mathbf{A_3}$. L'équation de Tuck en devient :

$$\mathbf{R(x)} = 2\sqrt{1-x^2}\ \mathbf{Exp}\left[-\frac{\frac{1+A_0}{2}+\frac{3}{2}A_1x+2A_2\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}\right)+\frac{7}{3}A_3\left(\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x\right)}{A_0+A_1x+A_2\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}\right)+A_3\left(\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x\right)}\right]$$

(attention au signe moins qui préside à la fraction présente dans l'exponentielle)

Les quatre paramètres de cette équation permettent le dessin de nombreux corps. Dans la pratique, cependant, seuls de rares corps seront intéressants puisque proches de corps précédemment connus.

N'en prenons pour exemple que le corps suivant, que nous avons dénommé Corps d'Eiffel de Tuck N°4 :



Cette dénomination *Corps d'Eiffel* est une référence historique à l'invention par Gustave Eiffel des corps de moindre traînée dans sa soufflerie d'Auteuil [137]. Bien-sûr, ces corps ne sont réellement de moindre Traînée qu'aux forts Reynolds (plus précisément en *Couche Limite pleinement turbulente*) et ils ne le seront pas dans le régime de Stokes qui nous intéresse. [138]

La forme de ce *Corps d'Eiffel de Tuck N°4* est très proche de celle préconisée par Eiffel pour les hauts Reynolds ; en particulier son côté gauche (que nous nommerons parfois côté *avant*) est très proche d'un ellipsoïde de révolution (tracé rouge sous-jacent dont le segment vertical également rouge marque le petit axe).

Ledit *petit axe* de l'ellipsoïde est placé ici à l'épaisseur maximale du profil du corps qui est de **33,30 %**, ce qui est une des règles possibles pour les corps d'Eiffel.

C'est en nous livrant au difficile exercice du réglage des quatre paramètres de l'équation de Tuck que nous avons réussi à faire dessiner à cette équation le corps d'Eiffel N°4.

---

[137] Voir à ce sujet notre texte Aérodynamique des corps d'Eiffel.

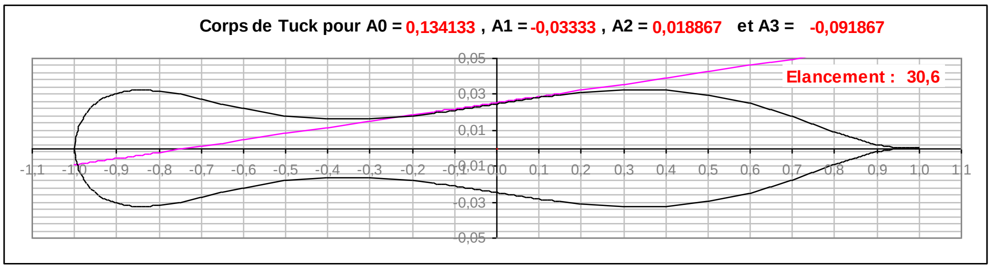
[138] De plus conviendrait-il de préciser s'il s'agit de corps de moindre Traînée à section constant ou à volume constant (nous consacrons un chapitre à ces corps dans le présent texte).

Il y faut beaucoup de calme et de persévérance car, si le curseur imposant la valeur de A_0 agit principalement sur l'élancement du corps (principalement mais non uniquement [139]), les trois autres curseurs imposant les valeurs de A_1, A_2 et A_3 tordent la silhouette du corps de multiples façons :

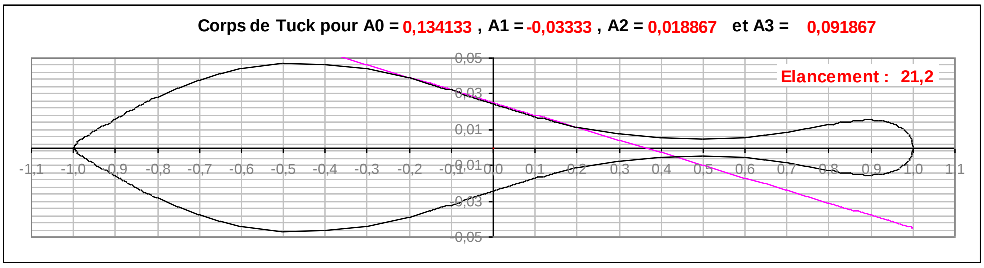
Ainsi le paramètre A_1 (qui pondère, dans l'équation de Tuck, des **x** de degré impair et, à ce titre, agit disymétriquement des deux côtés de l'axe des **y**) bascule le gros du volume du corps depuis les abscisses négatives jusqu'aux abscisses positives (de la gauche vers la droite, donc) ou vice-versa, sa valeur nulle dessinant des corps symétriques (amphidromiques)… Lorsque **A3** est nul, toutes autres choses égales par ailleurs, le paramètre **A1** dessine un corps symétrique de celui que dessine **–A1** ; cela peut être inféré de la forme-même de l'équation de Tuck. Mais cela n'est plus tout à fait vrai lorsque **A3** n'est plus nul.

Le paramètre A_2 (qui pondère des **x** au carré) agit symétriquement et rend les deux pointes du corps plus globuleuses (on pourrait dire aussi « plus tuberculeuses ».

Le paramètre A_3 (qui pondère des **x** de puissances impaires) agit disymétriquement et principalement sur la pente du corps aux abscisses faibles. Il transforme ainsi ce corps, à la silhouette d'*ornithorynque* :



…en celui-ci (de la même famille de canards mammifères) :



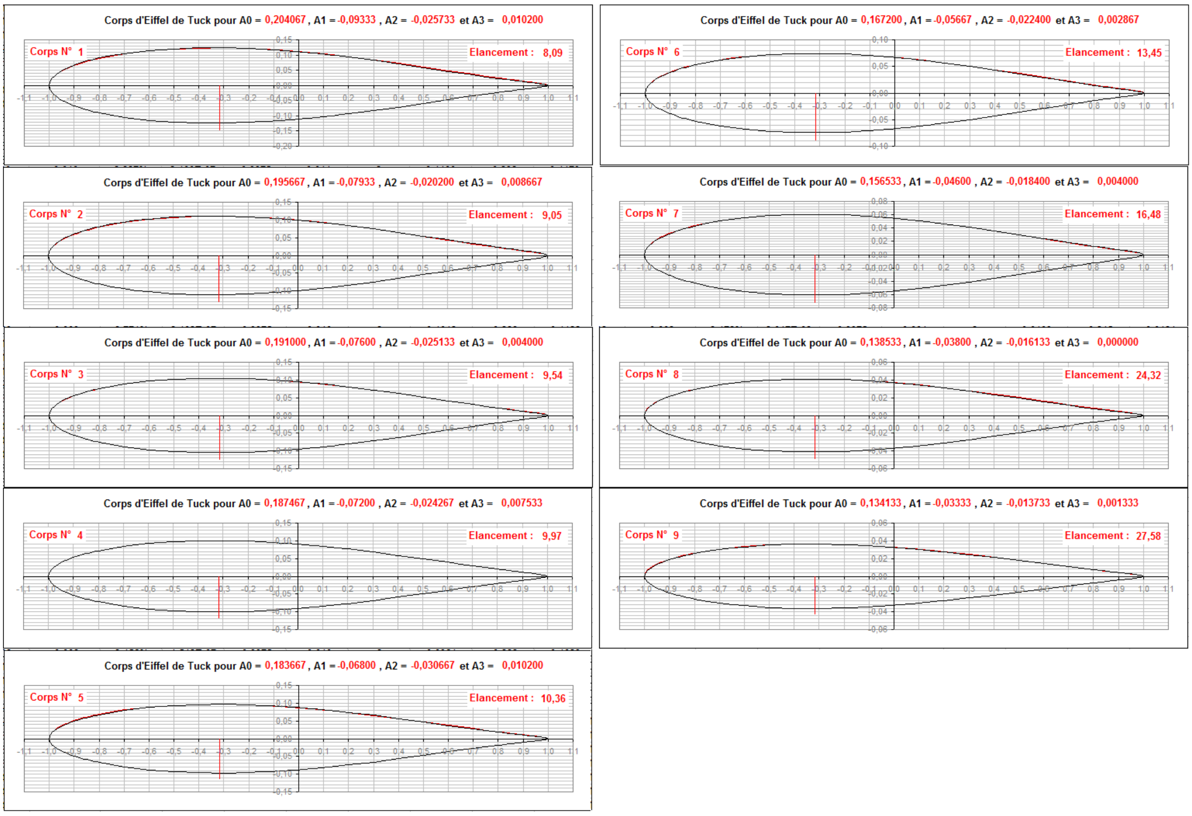
(remarquer la pente différente de la droite fuchsia et remarquer aussi que l'élancement du corps s'est trouvé modifié) (constater, à la lecture des nombres rouges du titre, que seul le signe de A_3 a été modifié)

Nous verrons plus bas que ces différents constats de l'action des paramètres A_0, A_1, A_2 et A_3 peuvent s'expliquer (ou être mémorisés plus facilement) par l'existence, au long de la génératrice des corps de Tuck, d'un certain nombre de points qui demeurent invariants lors des variations d'un seul paramètre (leur abscisse et leur

[139] La Traînée du corps étant proportionnelle au seul paramètre A_0, si A_0 réglait à lui seul l'élancement, tous les corps de même élancement aurait le même C_x linéaire quelque soit leur forme, ce qui est impossible.

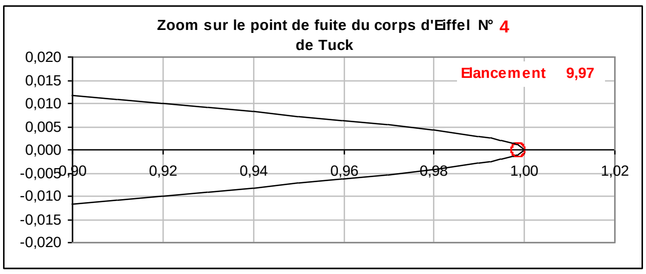
ordonnée sont invariantes pour ce paramètre, même si cette ordonnée dépend des autres paramètres).

Mais revenons aux résultats pratiques de nos manipulations de curseurs, en particulier aux corps dit d'Eiffel : il nous a été possible de dresser un panorama de l'évolution du $\mathbf{C_x}$ linéaire de tels corps d'Eiffel selon leur élancement, tous les corps dessinés par chaque quarté de paramètres respectant au mieux la forme du corps d'Eiffel de Tuck :



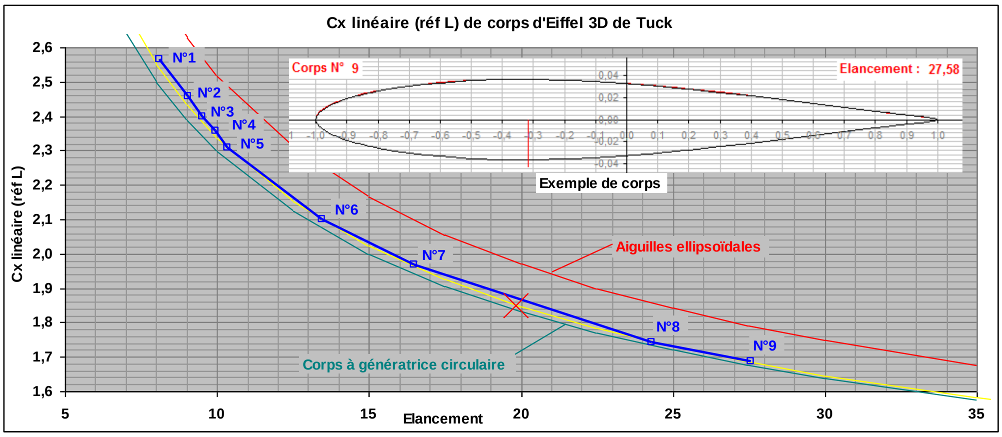
La forme type, que nous avons tenté de respecter au mieux apparaît ci-dessus en rouge derrière la génératrice supérieure de chaque corps. Cette forme type est la génératrice du corps N° 4 qui a été prise comme modèle (pour ce corps N° 4 cette courbe rouge n'apparaît pas puisqu'elle est parfaitement cachée par la génératrice du corps).

La forme de la pointe *de fuite* du corps mérite d'être représentée ; la voici (toujours en noir) en comparaison avec le cercle rouge de rayon **0,0015**, soit **1,50 %** du rayon maximal de ce corps N°4 :



Cette forme en *corps d'Eiffel* nous paraît une forme matériellement possible et réalisable.

Le $\mathbf{C_x}$ linéaire (référence longueur) [140] des neuf corps d'Eiffel de Tuck présentés ci-dessus dessine la courbe bleu dense suivante :



Les numéro des corps sont indiqué sur le graphe ; les courbes du $\mathbf{C_x}$ linéaire des aiguilles ellipsoïdales et des corps à génératrice circulaire y figurent également (nous verrons plus loin que ces derniers corps sont probablement les corps de moindre Traînée à élancement donné).

La régularité de la courbe bleu dense est satisfaisante ainsi que le type de libellé de la régression jaune que nous avons fait courir entre les cinq marques les plus à droite (car les travaux de Tuck ne sont valables que pour les forts élancements) :

$$\mathbf{C_{xLin}}\,_{\text{Réf L}} = \frac{\mathbf{6{,}132}}{\mathbf{Ln(2\lambda) - 0{,}37}}$$

…équation où $\boldsymbol{\lambda}$ est l'élancement du corps donnant le $\mathbf{C_x}$ linéaire (en référence longueur) des corps d'Eiffel de Tuck de forme très proche de la forme N° 4 déterminée par le quarté de paramètres $\mathbf{A_0}$, $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$ et $\mathbf{A_3}$: [**0,1874666 ; –0,07200 ; -0,0242666** et **0,0075333**].

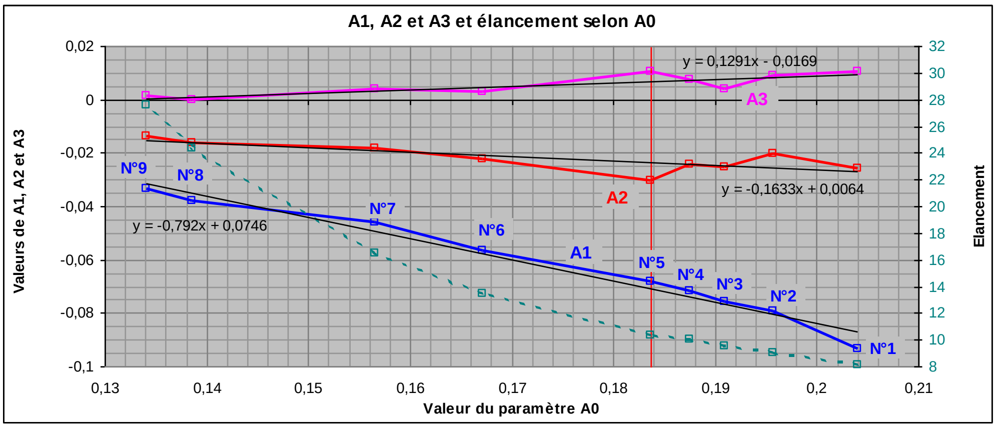
Cette régression jaune diverge de la courbe bleue pour les petits élancements (inférieurs à **10**) : nous savons que pour ces faibles élancements les travaux de Tuck ne sont plus valides, mais cela ne signifie pas que la courbe jaune indique le $\mathbf{C_x}$ linéaire véritable pour ces faibles élancements : à cet égard, la courbe du $\mathbf{C_x}$ linéaire des aiguilles ellipsoïdales (ou plutôt leur coefficient de correction **k**) doit nous revenir en mémoire : le libellé simplifié exprimant la Traînée des aiguilles ellipsoïdales (de même construction que celui de notre dernière régression jaune) dessine la courbe bleu clair trop haute par rapport à la courbe dessinée par le libellé exact des ellipsoïdes. Il se

[140] Le $\mathbf{C_x}$ linéaire des corps est toujours $\mathbf{4\,\pi\,A_0}$.

pourrait donc que notre régression jaune ci-dessus se trouve encore trop haute par rapport au véritable $\mathbf{C_x}$ linéaire des corps d'Eiffel de Tuck de faibles élancements…

Nonobstant cette incertitude (qui ne grève que la connaissance des $\mathbf{C_x}$ de corps d'élancement inférieur à **10**, à notre sens), nous avons pu aller plus loin.

Lorsque l'on dresse l'évolution des quatre paramètres de l'équation de Tuck ayant dessiné la courbe bleue ci-dessus, on obtient ce graphe (évolution des paramètres $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$ et $\mathbf{A_3}$ par rapport à $\mathbf{A_0}$) :



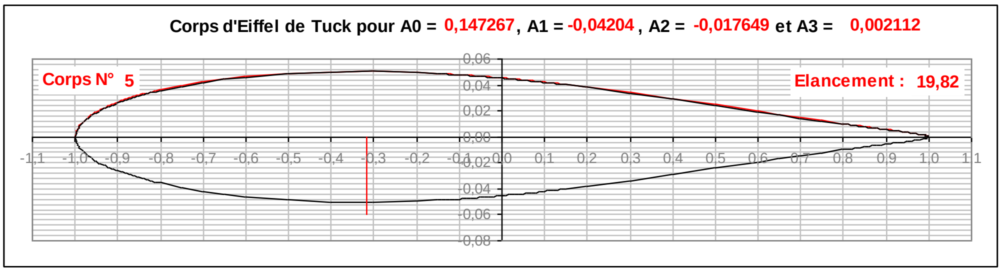
(l'élancement des corps selon la valeur de $\mathbf{A_0}$, à lire sur l'échelle de droite, apparaît aussi sur le graphe) (le numéro des corps est valable pour toutes les courbes à la même abscisse)

L'observation des courbes incite à leur trouver des régressions linéaires. L'équation de ces trois régressions linéaires est indiquée sur le graphe.

À titre d'essais, nous avons attribué aux trois paramètres $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$ et $\mathbf{A_3}$ de notre tableur une valeur correspondant à ces trois régressions linéaires en $\mathbf{A_0}$.

Et contre toute attente (la chance sourit souvent aux naïfs) les corps dessinés par ce dispositif (qui prend comme seule variable le paramètre $\mathbf{A_0}$) dessine des corps plutôt plus respectueux de la forme type du corps **N° 4** que les corps obtenus par nos long réglages de paramètres !!

N'en donnons pour preuve que ce corps d'élancement intermédiaire :



Nous avons alors la surprise de voir se dessiner, par simple action sur le curseur déterminant la valeur de $\mathbf{A_0}$, toute une série de corps dont le $\mathbf{C_x}$ linéaire (référence L) suit notre régression jaune (ainsi le corps ci-dessus figure apparaît bien sous la forme du grand X rouge sur la régression jaune, à l'abscisse **19,82**, sur notre graphe des $\mathbf{C_x}$ linéaire).

Ce dispositif automatisé dessine donc des corps de forme très respectueuse de la forme type entre les élancements **8** et **30** ($\mathbf{A_0}$ diminuant de **0,205** à **0,13**). À cet égard il faut toujours se souvenir qu'en régime de Stokes la forme des corps est réputée beaucoup moins importante qu'aux régimes des hauts Reynolds…

Cependant et comme c'est compréhensible, en-dessous de l'élancement **10**, le $\mathbf{C_x}$ linéaire des corps s'écarte de la régression jaune pour suivre la courbe bleue en en arrondissant les facettes ainsi qu'en corrigeant ses errements (ces errements correspondent aux zigzags des courbes de $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$ et $\mathbf{A_3}$ selon $\mathbf{A_0}$, spécialement à l'abscisse du corps N° 4) :

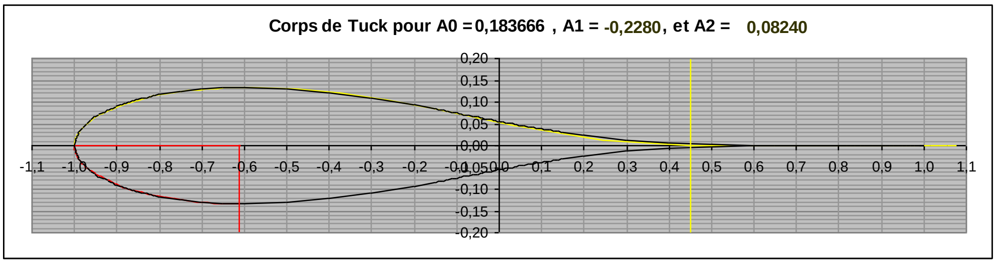
On en vient à penser que notre dispositif de dessin automatique des corps d'Eiffel de Tuck (et de calcul automatique de leur $\mathbf{C_x}$ linéaire) donne des résultats plus précis que nos propres recherches manuelles (et laborieuses), le zigzag d'un paramètre ayant donné lieu aux deux autres zigzags à titre de corrections grossières de la forme du corps.

La découverte de ce dispositif automatique est une merveilleuse nouvelle, même si le report des trois régressions linéaires (donnant $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$ et $\mathbf{A_3}$ selon $\mathbf{A_0}$) dans l'équation de Tuck ne nous a pas apporté de confirmation analytique de son fonctionnement.

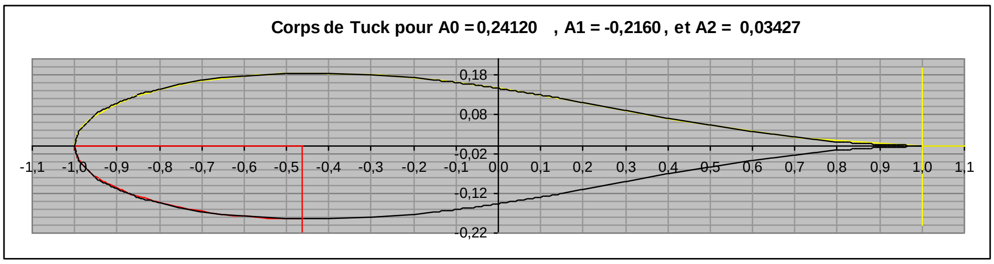
Quoiqu'il en soit, ces très pratiques simplifications nous donnent l'idée d'aller plus avant dans l'étude de l'équation de Tuck : la grande variabilité des formes que dessine cette équation nous a soufflé une idée très intéressante : celle de vérifier (et de multiples façons) si le calcul de Tuck est d'accord avec lui-même :

Auto-vérification des calculs de Tuck

Expliquons-nous : nous avons déjà vu plus haut que l'équation de Tuck à 3 paramètres dessine facilement (après réglage des paramètres $\mathbf{A_0}$, $\mathbf{A_1}$ et $\mathbf{A_2}$) des corps de forme lacrymale, comme celui représenté ci-dessous, ces corps ne se développant pas sur toute la plage d'abscisses **–1** à **+1** :



Mais la même équation de Tuck dessine aussi des corps homothétique à la même forme se développant entre les abscisse **–1** et **+1** :



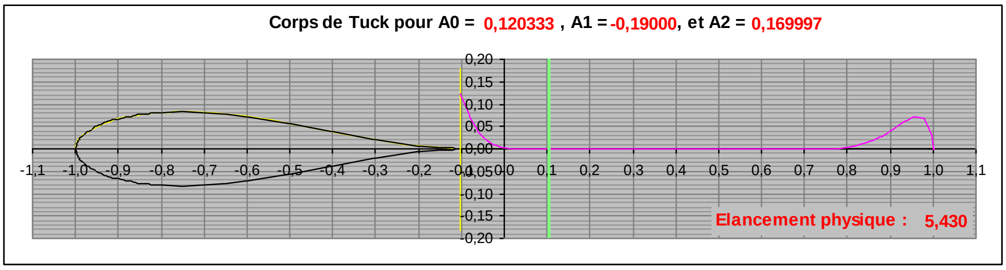
Nous appellerons *intégraux* ces corps qui sont dessinés entre les abscisses **–1** et **+1**.

Nous appellerons non-intégraux les corps qui sont dessinés par l'équation de Tuck entre l'abscisse **–1** et une abscisse inférieure à **+1**, c.-à-d. les corps qui possèdent une antenne de diamètre infinitésimal immédiatement à leur gauche.

Si les calculs de Tuck sont corrects, le $\mathbf{C_x}$ linéaire des corps *non-intégraux* (par exemple le $\mathbf{C_x}$ linéaire en référence à leur diamètre) sera le même que le $\mathbf{C_x}$ linéaire des corps *intégraux* de la même forme lacrymale (en référence diamètre également) !

Bien-sûr, il convient que l'antenne qui prolonge à leur droite les corps *non-intégraux* n'introduise pas de Traînée supplémentaire. Nous avons déjà parlé plus haut de ce problème de la Traînée des antennes de diamètres infinitésimaux, mais nous y revenons à présent avec plus de détails.

Nous sommes parvenu à faire dessiner à notre tableur, à partir de l'équation de Tuck à 3 paramètres, un assez grand nombre de corps de révolution à antenne dont la *partie physique* (ainsi appelons-nous la partie de ces corps qui n'est pas l'antenne, donc qui arbore un diamètre non infinitésimal) est homothétique à une forme lacrymale type ; cette forme lacrymale type, d'un élancement **5,43**, est définie une fois pour toute par le couple de paramètres [$\mathbf{A_0 = 0{,}153}$; $\mathbf{A_2 = 0{,}3037333}$] dans l'équation de Tuck à deux paramètres [141]) ; voici l'un de ces corps lacrymaux :



Sur ce graphe, on peut observer que la génératrice noire supérieure du corps est très proche de la génératrice du corps lacrymal type (représentée en jaune derrière la génératrice noire)…

Sur le même graphe, nous avons dessiné en fuchsia la forme de l'antenne qui prolonge le corps lacrymal sur sa droite, les ordonnées de cette courbe fuchsia valant **100 fois** les ordonnées (ou rayons) de l'antenne. Autant dire que nous avons grossi (uniquement en diamètre) cette antenne…

[141] C'est l'équation de Tuck à 3 paramètres mais avec un paramètre $\mathbf{A_1}$ nul !

Et que remarque-t-on alors sur ce graphe ? Que l'antenne porte à son extrémité droite un *tubercule* qui, on le devine, reprend une forme lacrymale (d'un élancement beaucoup plus fort, cependant, c.-à-d. de diamètres beaucoup plus faibles).

On remarque aussi que, immédiatement à la droite du corps lacrymal, l'antenne n'a pas (encore) un diamètre nul. Dans nos calculs, nous considèrerons cependant que cette queue fuchsia du corps (de diamètres très faibles puisqu'ici ils sont multipliés par **100**) ne produit pas d'effet sur la Traînée du corps complet.

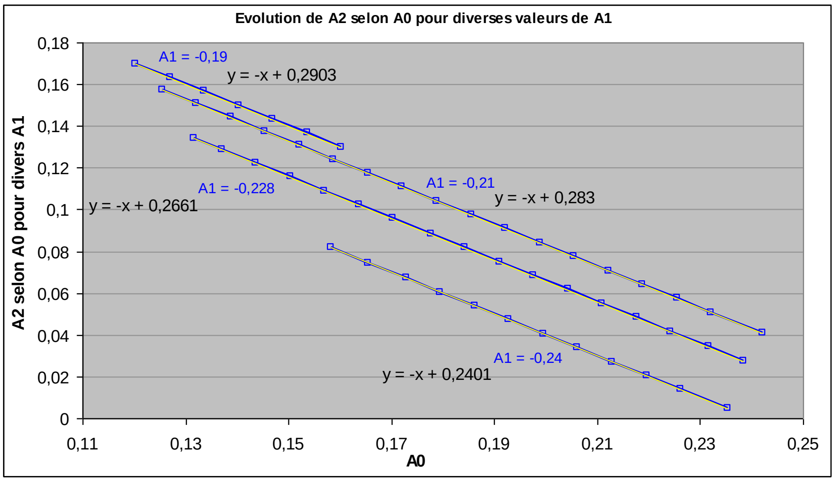
Sur ce même graphe, la verticale jaune représente ce que nous considérons comme étant la fin du corps lacrymal d'élancement **5,43**.

Toujours sur le même graphe, nous avons porté une verticale verte épaisse : la distance de cette verticale à l'axe vertical représente la **différence %** entre notre calcul du $\mathbf{C_x}$ linéaire (réf. **D**) du corps lacrymal dessiné et le $\mathbf{C_x}$ linéaire (forcément en référence **D** également) du corps lacrymal intégral (c.-à-d. courant de l'abscisse **–1** à l'abscisse **+1**) tel que déjà montré plus haut [142] : sur le graphe du corps lacrymal non-intégral, cette verticale verte est à une abscisse un peu supérieure à **0,1**, ce qui signifie que nous trouvons le $\mathbf{C_x}$ linéaire de ce corps non-intégral **10 %** plus grand que le $\mathbf{C_x}$ linéaire du corps intégral (ces deux $\mathbf{C_x}$ en référence **D**, celui-ci étant exprimé directement par les calculs de Tuck puisque le diamètre physique du corps est égal à son diamètre analytique).

Ce dispositif nous permet de comparer d'un seul coup d'œil le $\mathbf{C_x}$ linéaire d'un corps lacrymal non intégral avec le $\mathbf{C_x}$ linéaire du corps lacrymal intégral de référence [143].

Cette comparaison s'est d'ailleurs faite plus simple lorsque nous avons réussi (avec l'aide du hasard) à automatiser le dessin des corps lacrymaux non intégraux (c.-à-d. automatiser le réglage des trois paramètres de l'équation de Tuck dessinant des corps suffisamment homothétique avec notre corps lacrymal type d'élancement **5,43**.

En effet, en dessinant l'évolution du paramètres $\mathbf{A_2}$ selon $\mathbf{A_0}$ (pour quatre valeurs de $\mathbf{A_1}$ choisies préalablement), nous avons obtenu ceci :



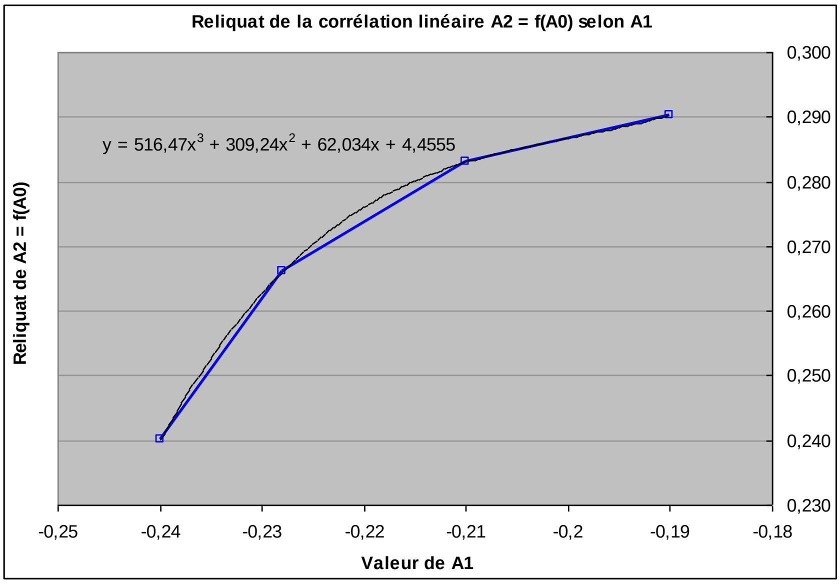
[142] On peut d'ailleurs noté que la verticale jaune indiquant la fin de ce corps est calée à l'abscisse **+1**.

[143] Nous ne savons pas si le $\mathbf{C_x}$ linéaire de ce corps lacrymal intégral (à savoir **16,522**, en référence diamètre) est le bon, mais dans cette recherche, il nous sert juste de référence pour observer les variations du $\mathbf{C_x}$ linéaire des corps lacrymaux non-intégraux.

(en bleu sont dessinées les quatre évolutions et en jaune apparaît quatre régression linéaire dont l'équation est indiquée)

Nous constatons donc que, pour chaque choix préalable de $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$ suit une évolution $\mathbf{f(A_0)}$ linéaire.

De plus, les reliquats (ou ordonnées à l'abscisse nulle) de ces quatre équations linéaires (indiquées sur le graphe) peut être dessinée, en prenant $\mathbf{A_1}$ en abscisses comme ceci :



Ces quatre points peuvent être reliés par une équation cubique (indiqué sur le graphe).

Ces points de départ [144] nous ont suffit pour automatiser la feuille de calcul de notre tableau de sorte qu'après choix préalable d'une valeur de $\mathbf{A_1}$, une action sur le curseur imposant $\mathbf{A_0}$ déclenche le dessin d'un corps lacrymal homothétique à la forme type d'élancement **5,43**.

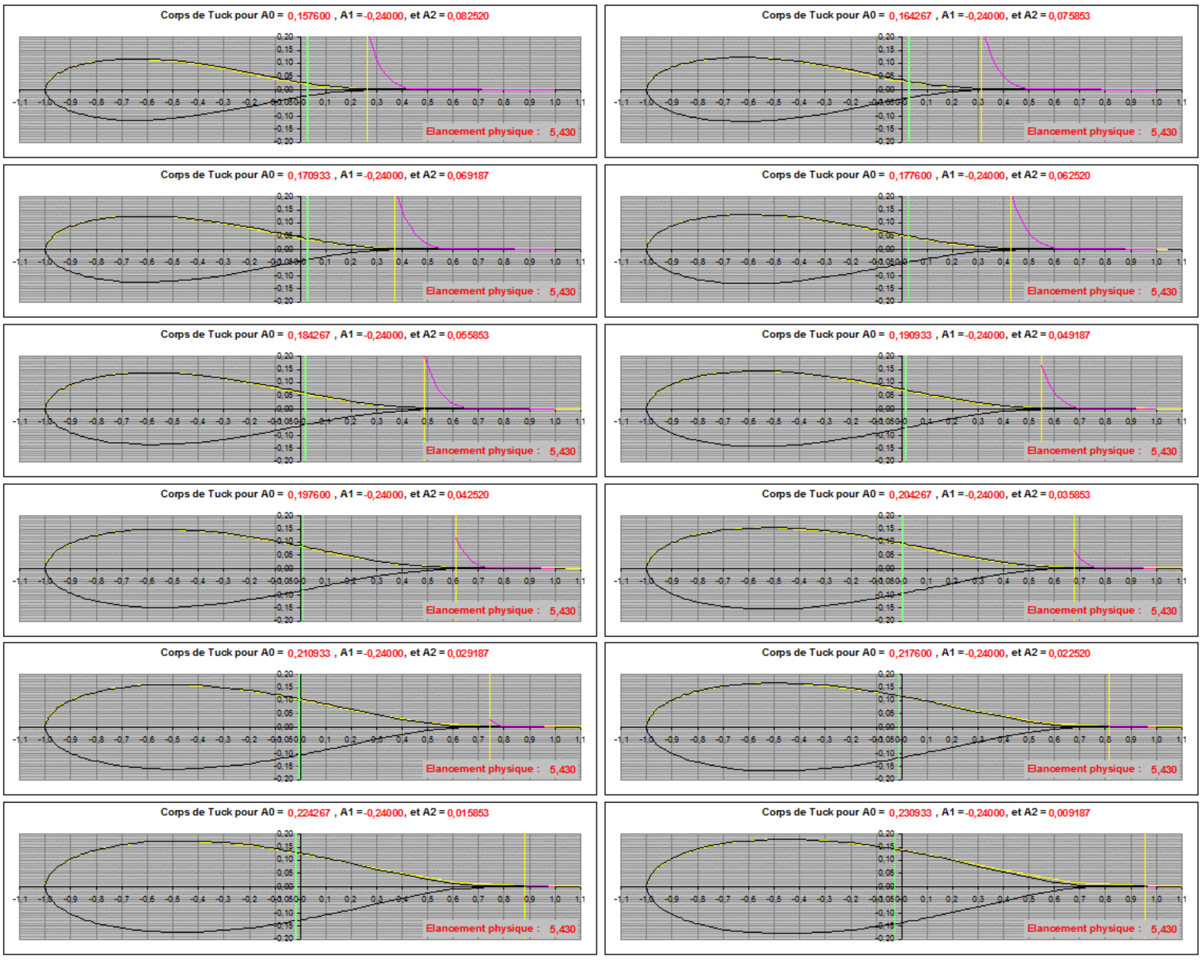
Une action prolongée sur le même curseur produit croissance ou décroissance de cette forme lacrymale, du moins à l'intérieur d'une certaine plage de $\mathbf{A_0}$ (car l'équation est mise en difficultés par certaines valeurs).

On peut alors en capter une animation, par exemple celle-ci, effectuée pour $\mathbf{A_1 = -0,23}$, valeur qui a été interpolée automatiquement entre les deux valeurs **–0,228** et **–0,24** prises en compte manuellement :

http://perso.numericable.fr/gomars2/aero/anim_cx_lin_ref_d_corps_lacry_non_integr_a1_moins0,23.gif

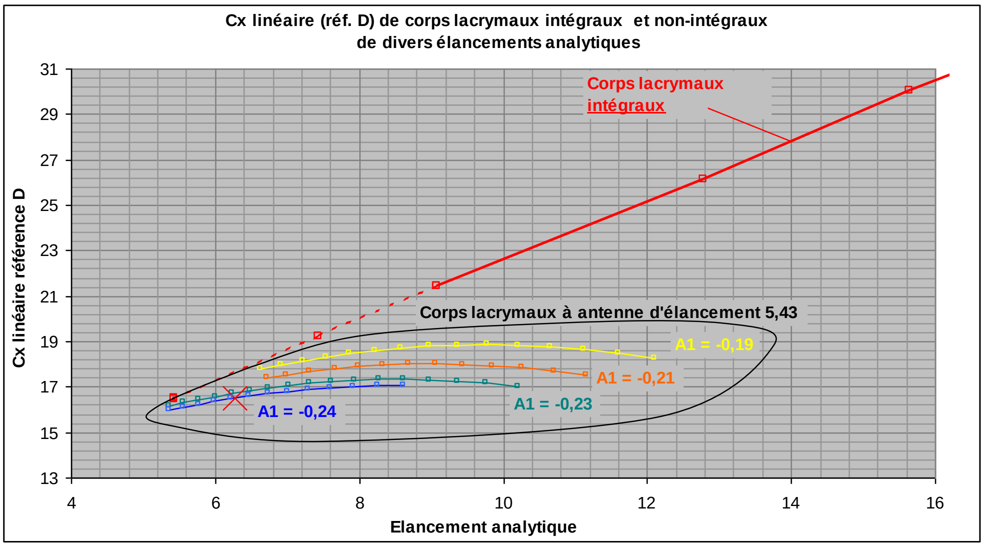
…ou en composer un panorama d'images (regroupant ci-dessous des corps dessinés pour la valeur $\mathbf{A_1 = -0,24}$), panorama dont on pourra retrancher les images où la forme type jaune se fait trop apparente :

[144] Nous avons pris pour définir $\mathbf{A_2}$ l'équation : $\mathbf{-A_0 + 516,465A_1^3 + 309,24A_1^2 + 62,0333A_1 + 4,4555}$



On peut apprécier sur ce panorama que la représentation des diamètres fuchsia (diamètres multipliés par **100** !) ne laisse apparaître aucun tubercule près de l'abscisse **+1**. C'est-à-dire que la Traînée du corps n'est légèrement augmentée que par la présence d'une queue fuchsia de longueur variable mais de diamètres très probablement négligeables lesquels s'amenuisent d'ailleurs à mesure que $\mathbf{A_0}$ croît.

Une autre façon de représenter cette confrontation des calculs de Tuck avec eux-mêmes est de produire ce graphe :



La courbe rouge en trait plein représente le C_x linéaire (référence diamétrale) de corps lacrymaux intégraux homothétiques à notre forme type mais de divers élancements.

Nous avons prolongé cette courbe par une courbe tiretée rouge qu'on doit considérer comme une extrapolation risquée.

Dans la patate noire repérée par la mention **« Corps lacrymaux à antenne d'élancement 5,43 »** apparaissent quatre courbes correspondant aux dessins possibles de corps lacrymaux type d'élancement **5,43** pour quatre valeur imposée de $\mathbf{A_1}$. Ces courbes (qui représentent également le C_x linéaire référence **D** de ces corps) prennent pour abscisses l'élancement analytique (l'élancement physique de tous ces corps est **5,43**). [145]

L'élancement physique des corps non intégraux ne nous sert ici qu'à placer en abscisse les C_x linéaires (référence D) qui sont déterminés automatiquement par notre tableau selon les prescriptions de Tuck (soit $\mathbf{4\,\pi\,A_0}$).

À gauche de ces quatre courbes, l'élancement analytique est trop faible : il ne respecte donc pas la condition de fort élancement posée par Tuck : on peut donc s'attendre à ce que ces C_x linéaires soit entachés d'erreur.

Plus à droite, par contre, la plus forte valeur de l'élancement analytique pourrait bien ramener à presque rien l'erreur commise par les calculs de Tuck.

À notre sens, c'est la courbe la plus basse (pour $\mathbf{A_1 = -0{,}24}$), dessinant le C_x linéaire de corps exempts de tubercule, qui dévoile la bonne valeur du C_x linéaire du corps lacrymal type (d'élancement **5,43**), ceci probablement en son point de tangence horizontale (à l'élancement analytique ~ **9**) : le C_x linéaire (réf. D) en ce point est **17,05**.

Les autres courbes, qui ont des ordonnées plus fortes (même si elles sont de même ordre), représentent le C_x linéaire de corps affligés de gros tubercule (comme la courbe $\mathbf{A_1 = -0{,}19}$ ou la courbe orange $\mathbf{A_1 = -0{,}21}$ sauf vers l'élancement analytique **11** où le tubercule extrême est assez petit) ; le C_x linéaire **17,5** de cette dernière courbe orange à l'élancement **11** pourrait être une valeur assez bonne.

---

[145] Quant aux corps intégraux, leur élancement physique est leur élancement analytique…

La courbe $\mathbf{A_1 = -0,23}$, quant à elle, dessine le $\mathbf{C_x}$ linéaire de corps dénués, comme la courbe $\mathbf{A_1 = -0,24}$, de tubercule…

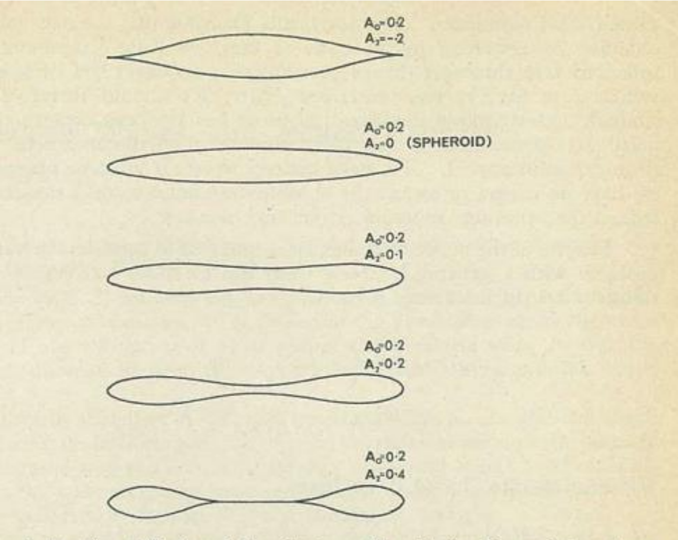
La raison pour laquelle la courbe bleu glauque ($\mathbf{A_1 = -0,23}$) redescend pour les élancements supérieurs à **8,5** ne nous est pas apparu. La seule observation que nous puissions faire à ce propos est que, pour ces élancements analytiques plus fort, la longueur de l'antenne se fait aussi plus importante (puisque l'élancement physique du corps reste de **5,43**), même si les diamètres de cette antennes demeurent extrêmement faibles et donc probablement sans action sur la Traînée…

Il semble cependant qu'on puisse dire que les calculs de Tuck sont *assez en accord* avec eux-mêmes, pourvu que l'élancement analytique des corps étudiés soit assez fort (nous dirions supérieurs à **9** ou **10**) : il n'y a guère que **5 %** d'écart entre le $\mathbf{C_x}$ du corps intégral de **5,43** d'élancement ($\mathbf{C_x}$ dont on sait qu'il est grevé par le manque d'élancement analytique) et la culmination de la courbe dessinée pour $\mathbf{A_1 = -0,23}$ (autour de l'élancement **9**).

Ce même dernier graphe laisse donc à penser que le $\mathbf{C_x}$ linéaire du corps lacrymal type d'élancement **5,43** est assez proche de **17,34** (en référence diamétrale).

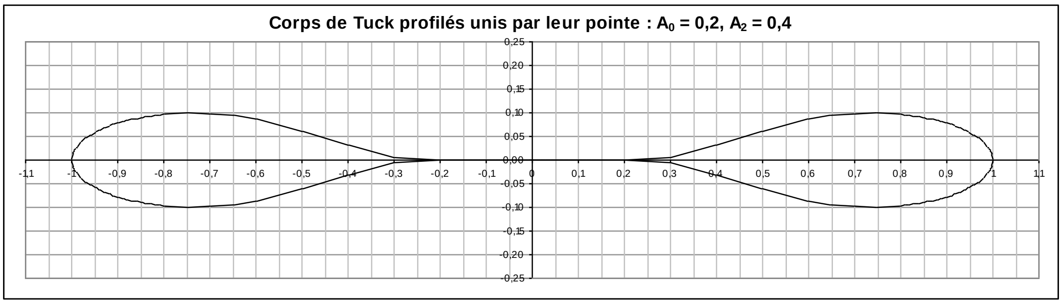
Pour conclure sur ce sujet de la confrontation des calculs de Tuck avec eux-mêmes, il convient de rappeler que ces conclusions sont tributaire de notre supposition que l'antenne de diamètres infinitésimaux qui prolonge les corps n'est génératrice que d'une Traînée négligeable, même si, pour étayer cette supposition, nous nous sommes attaché dans nos dernières investigations à observer plus en détails les modifications de Traînée qu'occasionne la présence de cette antenne plus ou moins longue (associée ou non à un tubercule plus ou moins formé).

De même, nous n'avons pas de certitude que l'élancement analytique des corps fasse force de loi dans la condition de fort élancement imposée par Tuck. Nous sommes néanmoins fortement incité à le penser en observant certains corps que Tuck propose en exemples par dans son texte, en particulier le corps qu'il dénomme « os à ronger pour chien, extrême », corps le plus bas sur son dessin ci-dessous :



—A Family of Bodies of Revolution, All with the Same Stokes Drag.

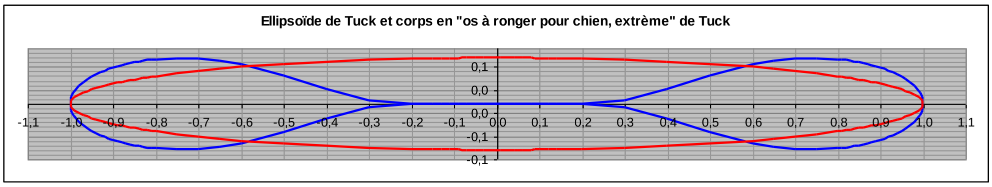
Ce corps est défini par le triplé $\mathbf{A_0 = 0,2}$**,** $\mathbf{A_1 = 0}$ et $\mathbf{A_2 = 0,4}$; le voici représenté ci-dessous à plus grande échelle :



L'élancement *physique* de chacun des corps jumeaux qu'on peut voir dans ce corps unique n'est que de **3,75** (alors que l'élancement analytique du corps unique est **10,1**).

Si cet élancement **3,75** ne peut nullement être considéré, en Mécanique des Fluides des hauts Reynolds, comme grand (les formes du corps près des abscisses **–1** et **+1** étant de surcroit fort obtuses), on peut toutefois admettre que l'élancement analytique **10,1** peut minimiser mathématiquement certains termes du calcul de Tuck dès lors que cet élancement analytique apparaît aux dénominateurs de ces termes…

Remarquons au passage ce fait fort instructif que le $\mathbf{C_x}$ linéaire de ce corps *en os à ronger* (**25,4** en référence diamétrale, schéma en bleu ci-dessous) soit à peu près le même que celui de l'ellipsoïde (en rouge ci-dessous) formé par le triplé $\mathbf{A_0 = 0,2}$**,** $\mathbf{A_1 = 0}$ et $\mathbf{A_2 = 0}$ (**26,46**), cet ellipsoïde ayant à peu près le même élancement analytique (**10,53** au lieu de **10,1**) :



L'observation de ces deux corps laisse penser que l'os à ronger, bien qu'il présente moins de surface mouillée, paye en Traînée la forme plus obtuse de ses extrémités et la présence de deux surfaces *internes* (des abscisses **-0,7** à **-0,35** et **0,35** à **0,7**), surfaces sur lesquelles peut agir la pression [146], quoique ces deux parties *internes* aient une forme assez proche de la forme de moindre Traînée (que nous étudierons à l'instant).

[146] Il faut ici se souvenir que la distribution des pressions ne peut développer que de faibles forces axiales sur des surfaces quasi-cylindriques comme celles qui forment la partie centrale de l'ellipsoïde…

Corps de Tuck à cinq paramètres :

Aux paramètres A_0, A_1 A_2 et A_3 s'ajoute à présent le paramètre A_4. L'équation de Tuck en devient :

$$R(x) = 2\sqrt{1-x^2} *$$

$$\mathrm{Exp}\left[-\frac{\frac{1+A_0}{2}+\frac{3}{2}A_1x+2A_2\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}\right)+\frac{7}{3}A_3\left(\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x\right)+\frac{31}{12}A_4\left(\frac{35}{8}x^4-\frac{15}{4}x^2+\frac{3}{8}\right)}{A_0+A_1x+A_2\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}\right)+A_3\left(\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x\right)+A_4\left(\frac{35}{8}x^4-\frac{15}{4}x^2+\frac{3}{8}\right)}\right]$$

(attention au signe moins qui préside à la fraction présente dans l'exponentielle)

Comme on peut le constater, le nouveau paramètre A_4 arbore un indice pair, ce qui signifie qu'il va commander un polynôme en **x** de degré pair qui produira des effets symétriques (autour de l'axe des **y**) sur la silhouette des corps de Tuck.

Mais analysons tout de suite l'existence de points invariants existant sur la silhouette des corps de Tuck :

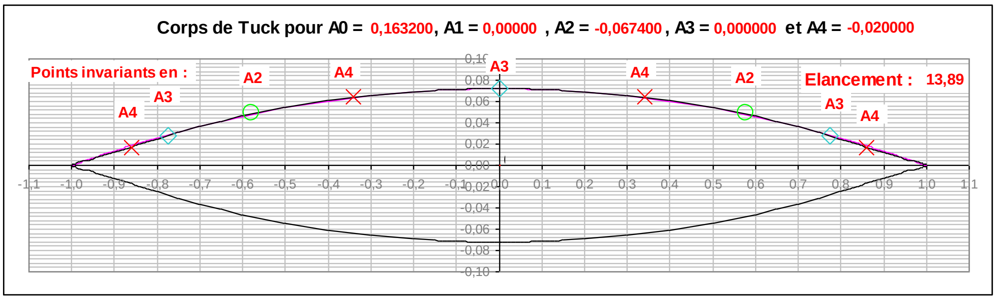
À la lecture de l'équation de Tuck ci-dessus, en effet, on peut facilement comprendre que pour l'abscisse **x = 0**, par exemple, l'influence du paramètre A_1 est annihilée : à cet abscisse (mais à cette abscisse seulement), le rayon **R(x)** du corps sera toujours indépendant de A_1.

Cela signifie que si l'on fait varier, par curseur, par exemple, la valeur de A_1, la génératrice dessinée par l'équation de Tuck va se tordre de façon complexe mais en passant toujours par le point fixe [**0** ; **R(0)**] (nous disons « fixe » car ce point est invariant en A_1 et nous ne faisons varier ici que ce paramètre).

De la même façon, le polynôme que commandent les deux paramètres A_2 de l'équation de Tuck est annulé par ses deux racines : **+0,5773** et **–0,5773**.

Et le même raisonnement peut être tenu pour les polynômes commandés par A_3 et A_4.

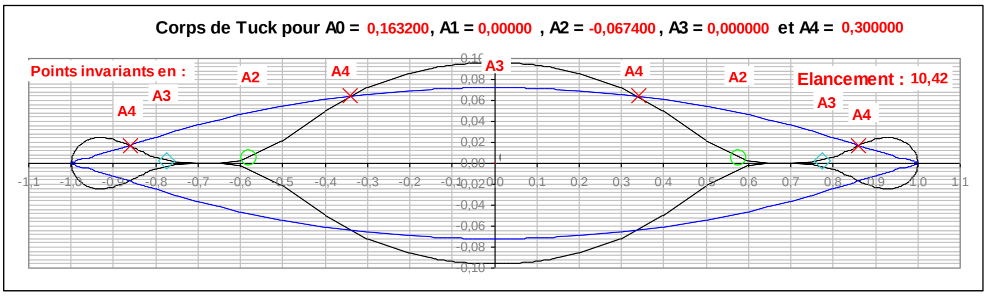
On peut alors signaler par des marques particulières ces différents points invariants (ici au long de la génératrice d'un corps à génératrice quasi-circulaire déjà montré) :



Ci-dessus, par exemple, les 4 grands X rouges indiquent les points invariants en $\mathbf{A_4}$, les trois losanges bleu clair indiquent les points invariants en $\mathbf{A_3}$ et les deux cercles verts indiquent le point invariant en $\mathbf{A_2}$.

Sous le losange $\mathbf{A_3}$ à l'absence nulle, réside d'ailleurs également le point invariant en $\mathbf{A_1}$, nécessairement à la même ordonnée (on peut donc dire que ce point de la génératrice est invariant en $\mathbf{A_1}$ et en $\mathbf{A_3}$).

Voici un exemple de l'invariance en $\mathbf{A_4}$ des quatre grands X rouges : par rapport au corps précédent (reproduit ci-dessous en bleu), on n'a fait varier le paramètre $\mathbf{A_4}$ que de **0,2** à **0,3**, les autres paramètres étant restés identiques :



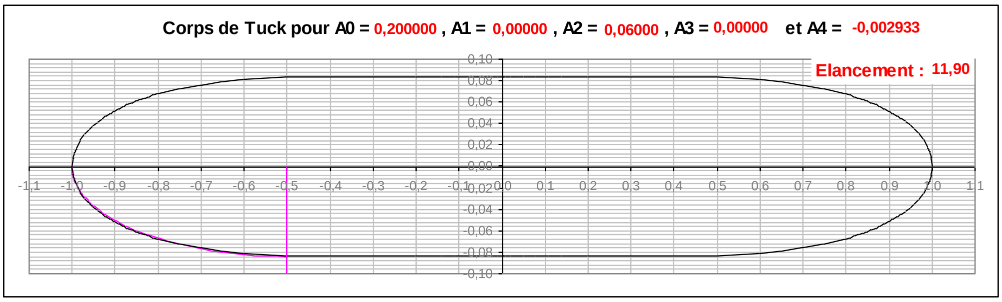
On note alors que la génératrice du corps s'est nettement tordue (symétriquement puisque $\mathbf{A_4}$ commande des polynômes de degrés pairs) mais sans quitter les quatre X rouges.

Il est également important de noter que les autres points invariants (point d'abscisse nulle, losange bleu clair et cercle vert, qui ne sont invariant qu'en $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$ et $\mathbf{A_3}$, mais pas en $\mathbf{A_4}$), se sont largement déplacés en ordonnée.

Au passage, on gagne aussi à prendre conscience que, comme dans les travaux de Tuck la Traînée des corps ne dépends que de $\mathbf{A_0}$, la Traînée de ces deux corps forts différents est constante (et donc leur $\mathbf{C_x}$ linéaire en référence longueur, cette longueur étant la même dans les deux cas)…

Corps ellipsoïdo-cylindriques de Tuck en déplacements axiaux :

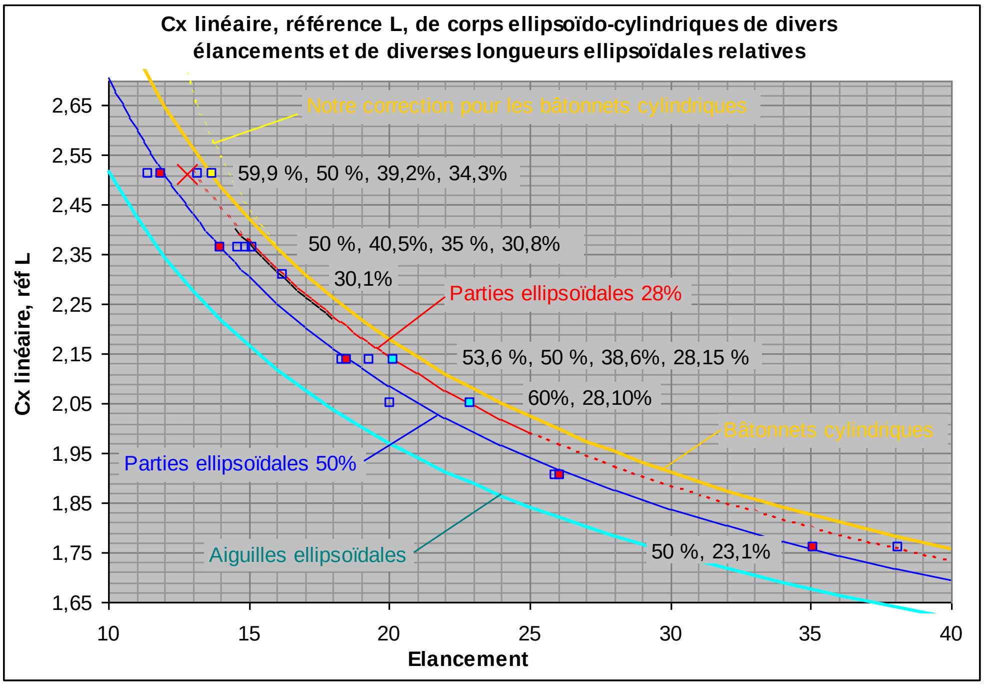
Parmi les corps que dessine l'équation de Tuck à 5 paramètres, on relève une famille de corps que nous qualifions d'ellipsoïdo-cylindriques parce qu'ils montrent une partie quasi cylindrique centrale doté de deux *ogives* ellipsoïdales à ses deux extrémités :



Sur le graphe ci-dessus nous avons dessiné en fuchsia une demi-ellipse afin que chacun puisse juger à quel point les deux *ogives* sont proches d'hémi-ellipsoïdes de révolution (les petites erreurs de rayons qu'on peut noter sont, à notre sens, de peu d'influence sur la Traînée du corps [147]).

Il n'est pas trop difficile, en manipulant les différents curseurs imposant les valeurs des paramètres $\mathbf{A_0}$ à $\mathbf{A_4}$, de faire ainsi naître toute une famille de corps quasi-ellipsoïdo-cylindriques dont les parties quasi-ellipsoïdales (c.-à-d. non quasi-cylindrique) sont de différents longueurs relatives (cette longueur relative pouvant être estimée à **50 %** pour le corps ci-dessus [148]).

Il vient alors l'idée de représenter le $\mathbf{C_x}$ linéaire (ici en référence longueur) de tous ces corps :



Chaque corps possédant une longueur relative des parties ellipsoïdales différente, nous avons (le plus souvent) indiqué cette longueur relative.

Les cinq corps qui arborent **50 %** de parties ellipsoïdales sont représentés par des marques carrées à cœur rouge.

Nous avons pu relier à très peu près ces marques par la courbe bleu dense dont nous donnerons le libellé plus bas.

En jaune la courbe reflétant le comportement des bâtonnets cylindriques, dans le libellé de Cox, à savoir :

$$\mathbf{C_{x\text{Lin L}}} = \frac{\mathbf{2\pi}}{\mathbf{Ln(2\lambda) - 0{,}807}}$$

[147] …comme doivent être de peu d'influence sur la Traîné les très faibles erreurs existant sur le rayon de la partie dite *cylindrique*, à savoir au maximum **1,075 %**.
[148] Il s'agit bien ici d'une estimation *à vue*…

En bleu clair apparaît la courbe reflétant le comportement des aiguilles ellipsoïdales dont le libellé est :

$$\mathbf{C_{x\text{Lin L}}} = \frac{2\pi}{\mathbf{Ln(2\lambda) - 0,5}}$$

On note que tous nos corps ellipsoïdo-cylindriques apparaissent entre ces deux dernières courbes, ce qui est normal puisque l'ellipsoïde et le bâtonnet peuvent être considérés comme des corps ellipsoïdo-cylindriques à respectivement **0** et **100 %** de parties ellipsoïdales.

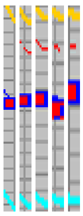
Cependant, la marque jaune en haut, qui symbolise un corps de **34,3 %** de parties ellipsoïdales se trouve trop à l'étroit dans la limite de la courbe jaune : on peut en déduire que, pour ces élancement moins forts, cette courbe de Cox devrait se trouver plus haute), peut être à l'emplacement de notre courbe tiretée jaune (dessinée par nous à la main) ! Ceci du moins si les calculs de Tuck sont avérés (et nous pensons qu'ils le sont pour de tels élancements)…

Ce bon accord général de la courbe de Cox avec nos marques de corps ellipsoïdaux-cylindriques est un nouvel élément de preuve mathématique laissant à penser que la courbe de Cox est la meilleure pour représenter la Traînée des bâtonnets même si elle est cependant à corriger pour les élancements inférieurs à **16** [149] !

S'agissant de cet élément de preuve, il faut rappeler que l'autre libellé souvent utilisé pour les bâtonnets (celui avec le reliquat **–0,5**) dessine ici fort bien la courbe des aiguilles ellipsoïdales (en bleu clair sur notre graphe) : à notre sens, ce libellé se trouve donc disqualifié pour représenter les bâtonnets.

Mais une autre conclusion peut-être tirée de notre graphe : c'est qu'il accrédite notre intuition, intuition que nous avons déjà mise en application précédemment, qu'il y a continuité dans l'évolution de la Traînée d'un corps ellipsoïdo-cylindrique en fonction de la longueur relative de ses partie ellipsoïdales : c'est ce que nous avons appelé plus haut la *composition proportionnelle des Traînées de parties élémentaires.*

On peut même, à l'aide d'un simple double-décimètre ou comme ci-dessous par usage d'un logiciel de traitement d'images, vérifier que le $\mathbf{C_x}$ linéaire d'un corps ellipsoïdo-cylindrique à **50 %** de parties ellipsoïdales (marques carrées à cœur rouge sur notre graphe) est bien la moyenne arithmétique des $\mathbf{C_x}$ linéaires du bâtonnet de Cox et de l'aiguille ellipsoïdale de même élancement :

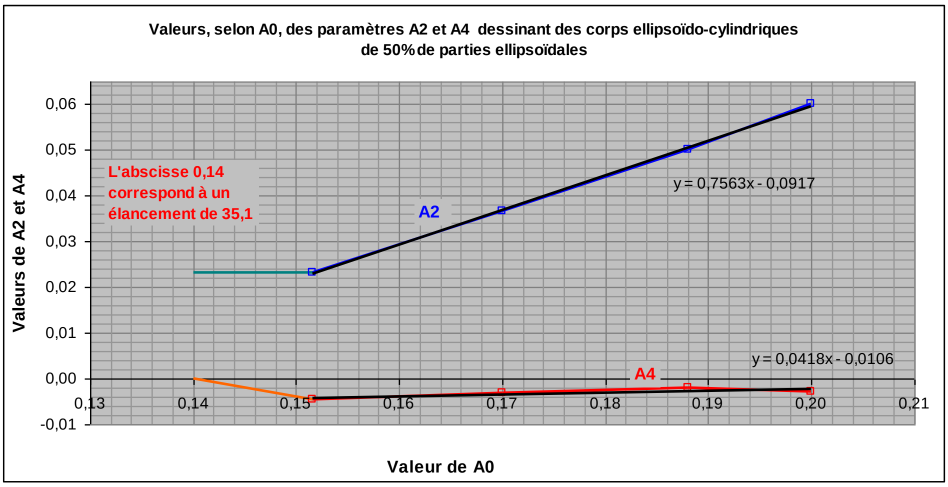


[149] Ce qui est une limite très haute. On aurait pu s'attendre à ce que la courbe jaune soit mise en défaut à partir de l'élancement **10** ; il serait également possible que pour ces faibles élancement la démarche de Tuck ait une précision dégradée…

(le lecteur devine que cette image regroupe cinq rectangles verticaux où les cinq marques rouges de notre graphe sont mises en situation entre les courbes bleu clair et jaune ; les cinq derniers rectangles ont été plus ou moins allongés pour que les traces des courbes bleu clair et jaune soient placées à la même hauteur)

Cette comparaison de la position des cinq marques à cœur rouge les place à peu près à la moyenne entre les courbes bleu clair et jaune, même si nous aurions préféré que cette comparaison fonctionne mieux avec la courbe jaune tiretée de notre correction du $\mathbf{C_x}$ linéaire du bâtonnet de Cox…

Si l'on s'intéresse à l'évolution, selon $\mathbf{A_0}$, des paramètres $\mathbf{A_2}$ et $\mathbf{A_4}$ qui dessinent les cinq marques à cœur rouge de notre graphe, on trouve que cette évolution forme deux courbes quasi-linéaires (du moins pour quatre de ces marques) :



(l'équation des deux régressions linéaires est indiquée sur le graphe)

Voici d'ailleurs pour mémoire les valeurs des cinq paramètres et l'élancement et le $\mathbf{C_x}$ linéaire qu'ils dessinent :

A0	0,20000	0,18800	0,170	0,152	0,140
A1	0,00000	0,00000	0,000	0,000	0,000
A2	0,06000	0,05000	0,037	0,023	0,023
A3	0,00000	0,00000	0,000	0,000	0,000
A4	-0,00293	-0,00200	-0,003	-0,005	0,000
Élancement	11,904	13,987	18,511	26,076	35,100
Cx lin Réf.L	2,513	2,362	2,136	1,905	1,759

On peut alors songer à automatiser le dessin de tels corps ellipsoïdo-cylindrique à **50 %** de parties ellipsoïdales. Après quelques réglages, nous constatons qu'il est possible d'imposer à notre tableur les valeurs suivantes de $\mathbf{A_2}$ et $\mathbf{A_4}$:

$$\mathbf{A_2 = 0{,}75\ A_0 - 0{,}092}$$

$$\mathbf{A_4 = 0{,}042\ A_0 - 0{,}015}$$

Par simple action sur un curseur, notre tableur dessine alors une série de corps assez proches de la forme ellipsoïdo-cylindrique désirée dont le $\mathbf{C_x}$ honore alors les marques carrées à cœur rouge en suivant assez bien (selon l'élancement du corps) la courbe bleu dense en trait fin de notre graphe, du moins entre les élancements **10** et **26**, ce qui peut constituer un premier résultat pratique (digne d'être vérifié en bassin de décantation)…

La formulation dessinant cette courbe bleu dense en trait fin, à savoir le C_x linéaire (en référence longueur) des corps ellipsoïdo-cylindriques dont les parties elliptiques mesurent à elles deux **50 %** de la longueur est :

$$\boxed{C_{xLin\ Réf.L} = \frac{2\pi}{Ln(2\lambda) + 0{,}39\ L_{PartiesEll} - 0{,}87}}$$

… $L_{PartiesEll}$ valant ici **0,50**.

Dans ce libellé, nous avons laissé à ce dernier paramètre sa valeur littérale parce que nous pensons que, pour des valeurs de $L_{PartiesEll}$ différentes de **50 %** ledit libellé reste encore valable : on peut en juger sur le graphe par la courbe rouge en trait fin qui est dessiné par le même libellé en prenant $L_{PartiesEll}$ **= 28,10 %**, cette courbe rouge passant très joliment par les deux marques carrées à cœur bleu dont le pourcentage de parties ellipsoïdale est indiqué sur le graphe.

De fait, ce libellé est raisonnablement proche de celui que nous avions trouvé plus haut en imposant *manuellement* ces formes ellipsoïdo-cylindriques dans l'intégrale de Cox, même si c'est dans le libellé tiré des travaux de Tuck que nous mettons le plus de confiance…

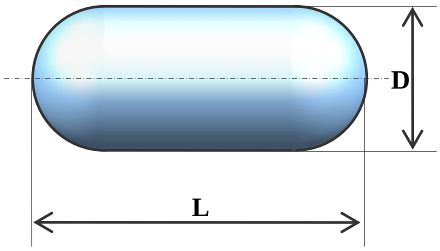
Sur notre graphe, le tronçon de courbe noire en trait fin représente (entre les abscisses **14,5** et **18**), quant à lui, le comportement des corps à **30,1 %** de parties ellipsoïdales, toujours selon notre libellé ci-dessus.

Le petit défaut de ce même libellé est que pour la valeur unitaire de $L_{PartiesEll}$, il ne reprend pas très précisément le dénominateur dévolu aux ellipsoïdes (à savoir **Ln(2λ) –0,5**) et que pour la valeur nulle de $L_{PartiesEll}$, il ne reprend pas non plus très précisément le dénominateur dévolu aux bâtonnets de Cox (à savoir **Ln(2λ) –0,807**, même si dans les deux cas il n'en est pas loin…

Malgré cela, en l'absence d'autres renseignements, on pourra peut être se risquer à utiliser ce libellé pour des corps totalisant une longueur totale de partie elliptique quelconque, ledit libellé procurant alors à tout le moins un ordre de grandeur au C_x linéaire des corps.

Cas des corps hémisphéro-cylindriques :

À l'extrême, on pourra même oser appliquer ce même libellé au cas particulier des corps dont la partie cylindrique centrale est dotée de deux ogives hémisphériques :



En prenant toujours **λ** = **L/D**, la longueur relatives des parties elliptiques (ici sphériques) est alors **1/λ**.

Ce qui transforme le libellé précédent en :

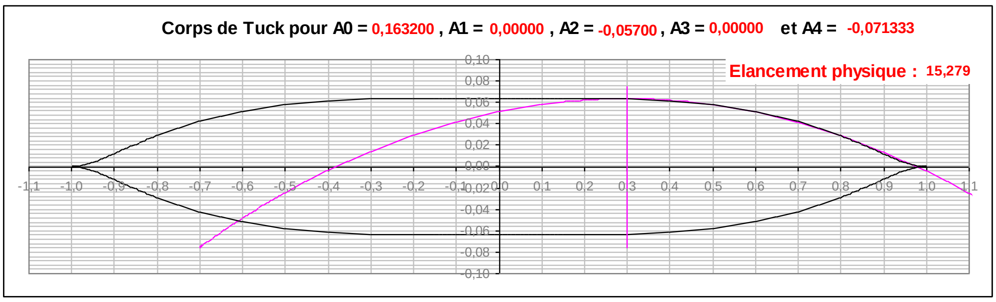
$$\mathbf{C_{xLin\ Réf.L}} = \frac{2\pi}{\mathrm{Ln}(2\lambda) + \dfrac{0{,}39}{\lambda} - 0{,}87}$$

L'analyse de ce libellé montre que, pour les forts élancements, le *carénage* apporté par les deux ogives hémisphériques (du moins si l'on considère qu'il se fait sentir par le terme en **0,39** du dénominateur) est très peu efficient (**2 %** de diminution du **C_x** linéaire pour l'élancement **10** et **0,07 %** pour l'élancement **20**).

Nous utiliserons ce libellé (assez osé) dans notre exploitation des travaux de Bartuschat et coll. sur les corps hémisphéro-cylindriques de faibles élancements.

Corps à génératrice recto-circulaire de Tuck :

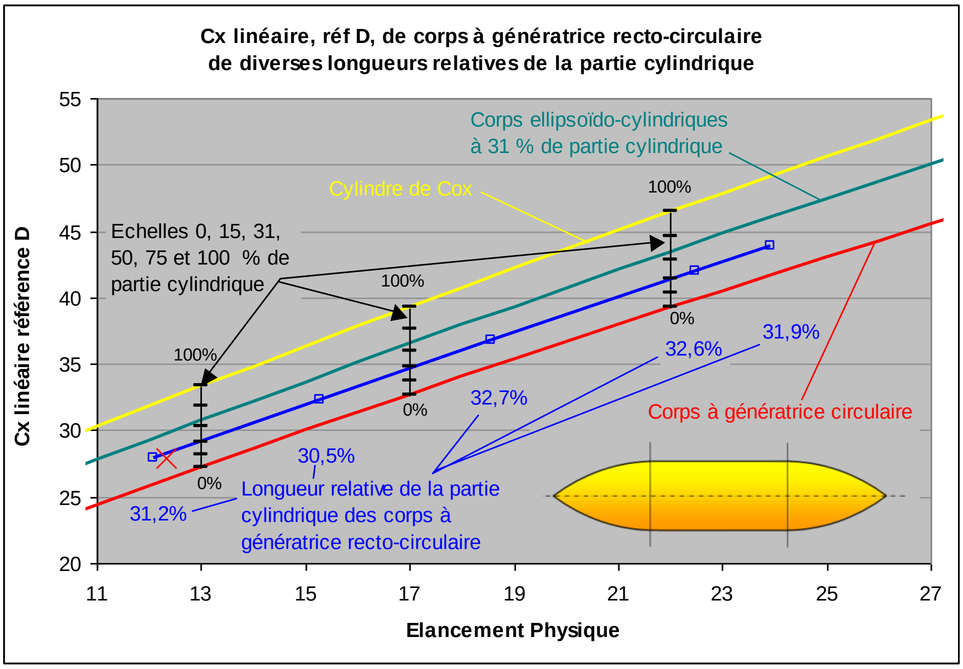
Par corps à génératrice *recto-circulaire* nous voulons signifier des corps comportant une partie cylindrique centrale et des *ogives* symétriques plus ou moins longues dont la génératrice peut être assimilable à un arc de cercle :



Comme on le voit cependant, l'équation de Tuck à cinq paramètres dessine, aux deux extrémité des ces corps, une génératrice légèrement différente de l'arc de cercle fuchsia, mais nous pensons que de légères différences dans les formes ne doivent pas influer sensiblement sur la Traînée…

Les corps à génératrice quasi recto-circulaire que dessinent les cinq paramètres de l'équation de Tuck nous sont de même souvent apparu dotés de courtes antennes (comme ci-dessus) ; pour cette raison, nous annoncerons ici leur $\mathbf{C_x}$ linéaire en référence à leur diamètre [150].

Sur le graphe ci-dessous, nous avons porté en bleu dense le $\mathbf{C_x}$ linéaire (réf. D) de cinq corps à génératrice recto-circulaire de Tuck dont la longueur relative des parties à génératrice circulaires tournent autour de **69 %** (ce qui donne **~31 %** de partie cylindrique) [151]:



Sur ce graphe, c'est la longueur relative de la partie centrale, cylindrique, qui a été indiquée en **%** et en bleu sous chaque marque carrée bleue.

Pour comparaison, nous avons fait figurer en jaune le $\mathbf{C_x}$ linéaire des bâtonnets cylindrique de Cox ainsi qu'en rouge le $\mathbf{C_x}$ linéaire des corps à génératrice circulaire (sans aucune partie cylindrique), ces deux courbes forcément établies en référence diamétrale.

De même apparaît en bleu glauque le $\mathbf{C_x}$ linéaire de corps ellipsoïdo-cylindriques à **31 %** de partie cylindrique, donc **69 %** de parties ellipsoïdales ($\mathbf{C_x}$ linéaire selon le libellé encadré par nous à l'instant [152]).

Nous avons également fait dessiner à notre tableur pour trois élancements physiques trois échelles de longueurs relatives de la partie cylindrique (en noir), ces échelles étant graduées de la sorte : **0, 15, 31, 50, 75** et **100 %**.

[150] C'est le produit du $\mathbf{C_x}$ linéaire du corps en référence à sa longueur analytique (laquelle vaut **2**) par son élancement analytique, ces deux valeurs étant données directement par notre tableau.

[151] Il semble d'ailleurs que l'équation de Tuck à cinq paramètres tende à produire ces corps à génératrice recto-circulaire avec une longueur relative de partie quasi cylindrique de l'ordre de **30 %**.

[152] …libellé multiplié par l'élancement afin qu'il donne le $\mathbf{C_x}$ linéaire en référence diamétrale…

Les comparaisons que l'on peut alors effectuer sont tout à fait favorables aux calculs de Tuck, de même qu'elles paraissent (encore) légitimer notre intuition qu'il est possible d'effectuer une *composition proportionnelle des Traînées de parties élémentaires caractéristiques*, pourvu qu'on base cette composition sur des corps arborant l'élancement complet du corps considéré : par exemple, pour déterminer la Traînée d'un corps d'élancement **13** à génératrice recto-circulaire de **50 %** de partie cylindrique, on prendra la moyenne des Traînée d'un bâtonnet cylindrique d'élancement **13** et d'un corps à génératrice circulaire également d'élancement **13**.

On peut également remarquer sur ce dernier graphe, que les ogives à arc circulaire (courbe bleu dense), sans doute par leur vertu de moindre Traînée, créent un **C_x** linéaire **5** ou **6 %** inférieur à celui des ogives ellipsoïdales (courbe bleu glauque) ceci bien-sûr à partie cylindrique de longueur relative égale ou comparable…

Nous avons trouvé une façon satisfaisante de dessiner automatiquement, à partir de l'équation de Tuck à cinq paramètres, des corps à génératrice recto-circulaire de **33 %** de partie cylindrique ; il suffit que **A_2** et **A_4** respectent les deux équations suivantes :

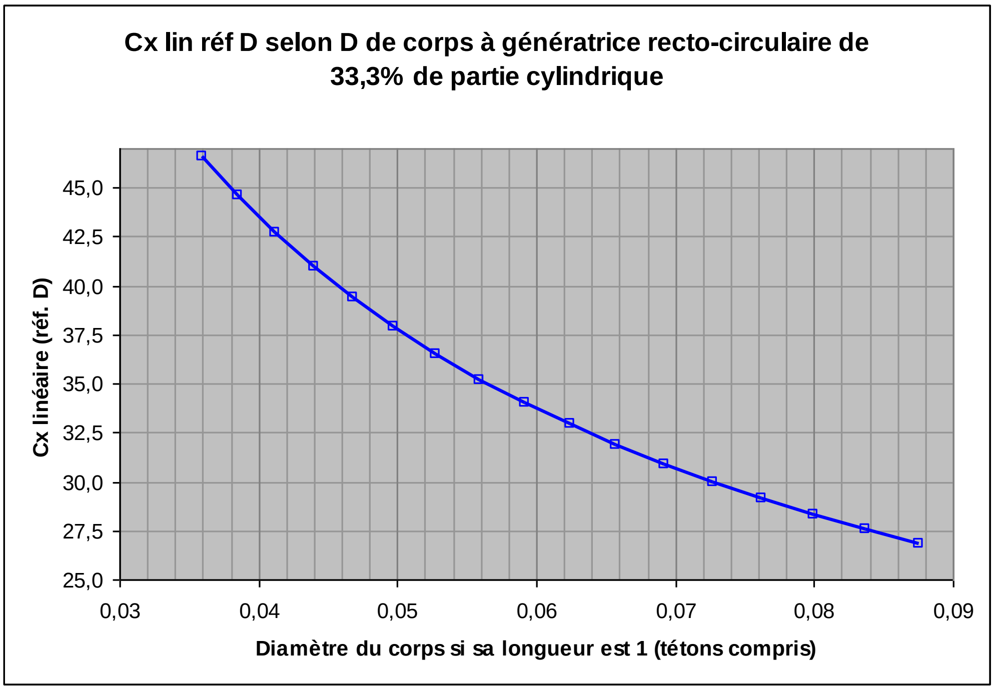
$$\mathbf{A_2 = 0{,}13\ A_0 - 0{,}0725}$$
$$\mathbf{A_4 = -0{,}8\ A_0 + 0{,}06}$$

…les paramètres **A_1** et **A_3** étant maintenus nuls (pour assurer la symétrie des corps).

Les corps ainsi formés comportent à leurs extrémités des petits tétons (prolongés par des antennes) qui ne doivent guère influer sur la Traînée mais qui compliquent un peu la détermination de l'élancement physique (à fins de représentation selon ce critère)…

Si par contre on représente l'évolution du **C_x** linéaire (référence D toujours) en prenant comme abscisse le même diamètre **D** du corps, ce critère déterminant de façon univoque l'élancement du corps [153], on obtient ce graphe :

[153] Nous étudions en effet des corps dont les ogives sont à génératrice circulaire. Or pour un diamètre et une longueur relative **n** de partie cylindrique il n'y a qu'un seul corps dont les ogives (de longueur relative totale **1-n**) possède une génératrice circulaire…



Cette façon de prendre le diamètre en abscisse est un peu particulière, mais c'est la seule façon que nous avons trouvé pour ne pas avoir à exclure *à l'œil* la longueur des tétons lorsqu'il y en a[154] : ce qui nous importe ici est surtout de vérifier la régularité de la courbe du $\mathbf{C_x}$ linéaire de ces corps dessinés automatiquement.

Corps de Tuck à sept paramètres :

Nous passons directement aux corps de Tuck formés par l'équation à **7** paramètres. Ce septième paramètre est $\mathbf{A_6}$ [155]et il est pair, ce qui implique qu'il modifiera les corps symétriquement (par rapport à l'axe vertical passant à l'abscisse nulle), ce qui constitue un choix délibéré (les corps non-symétriques obtenus à partir des paramètres impairs $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_3}$, $\mathbf{A_5}$ non nuls étant souvent de formes trop *biscornues*).

Pour écrire l'équation de Tuck à **7** paramètres, il suffit de partir de l'équation de Tuck à cinq paramètres et d'ajouter dans l'exponentielle :

→ au dénominateur :

$$+\ \frac{177}{60}\mathbf{A}_6\left(\frac{231}{16}\mathbf{x}^6-\frac{315}{16}\mathbf{x}^4+\frac{105}{16}\mathbf{x}^2-\frac{5}{16}\right)$$

→ et au numérateur :

[154] À droite de la courbe, chaque téton mesure au maximum **2,5 %** de la longueur du corps ; mais la longueur des tétons est nuls à la gauche de la courbe…

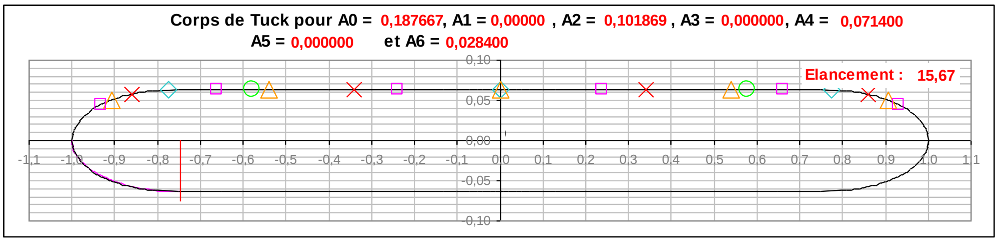
[155] …puisque le premier paramètre est $\mathbf{A_0}$.

$$+\ A_6\left(\frac{231}{16}x^6-\frac{315}{16}x^4+\frac{105}{16}x^2-\frac{5}{16}\right)$$

L'introduction de ces nouveaux polynômes de Legendre crée, bien-sûr, de nouveaux points invariants en $\mathbf{A_6}$ (ce sont les six marques carrées sur le graphe ci-dessous).

Corps à génératrice recto-circulaire de Tuck à 7 paramètres :

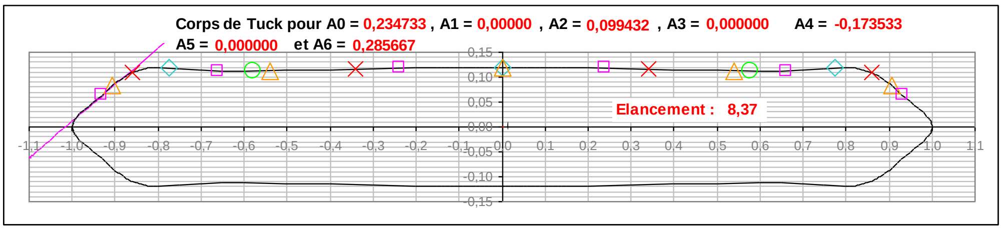
Nous rencontrons ce corps ellipsoïdo-cylindrique à **25 %** de parties ellipsoïdales et d'élancement **15,67** :



Tuck annonce son Cx linéaire (référence L) à **2,358**.

Or le $\mathbf{C_x}$ linéaire que l'on peut calculer en utilisant le libellé trouvé par nous plus haut d'après d'autres corps ellipsoïdo-cylindriques (à **5** paramètres) promet à ce corps un $\mathbf{C_x}$ linéaire de **2,35**, ce qui n'est différent que de **0,33 %**.

Corps cono-cylindrique de Tuck à 7 paramètres :



Son élancement de **8,37** est un peu faible eu égard aux prescriptions de « grands élancement » de Tuck, mais nous n'avons pas réussi à en dessiner de plus élancé.

Ses formes, de même, sont assez imparfaites.

Nous notons tout de même que le $\mathbf{C_x}$ linéaire de **2,95** pronostiqué par Tuck est très proche de celui déterminé par le libellé que nous avons proposons plus haut pour de tels corps cono-cylindriques (**2,907)**, ce qui fait **1,4 %** d'erreur.

Nous avons pensé un instant que l'introduction de nouveaux paramètres dans l'équation de Tuck donnerait des formes plus géométriques à ce corps ; hélas le passage de ladite équation à **9** paramètres (en ne formalisant que les paramètres pairs) n'a pas donné des résultats à la hauteur de nos espérances (voir ci-dessous)…

La question se pose d'ailleurs de savoir si l'ajout d'un grand nombre de paramètres à l'équation de Tuck conduira obligatoirement au dessin des formes quasi géométriques les plus recherchées (de la même façon que la décomposition de cette forme est possible en série de Fourrier)…

Les polynômes de Legendre qui écrivent numérateur et dénominateur de l'exponentielle dans l'équation de Tuck (voir par exemple cette équation pour **5** paramètres) sont réputés capables, lorsqu'ils sont sommés, de dessiner n'importe quelle forme, mais ici ils sont sommés au numérateur comme au dénominateur et nous ne savons si leur quotient, mis à l'exponentielle puis multiplié par l'équation classique de l'ellipse), garde cette capacité.

Il apparaîtra cependant évident qu'en multipliant le nombre de paramètres à cette équation de Tuck, nous avons dessiné des formes de plus en plus nombreuses (d'ailleurs sans que le dessin des formes données en exemples par Tuck à partir de seulement deux paramètres nous en soit interdit puisque, même dans une équation de Tuck à **11** paramètres, il est possible de prendre pour nul les **9** dernier paramètres, ce qui ramène à l'équation à **3** paramètres)…

Note sur la difficulté d'assimiler un corps de Tuck à un corps géométriquement parfait :

Dans toutes nos exploitations des calculs de Tuck, nous aurons été confronté à la difficulté d'assimiler le plus objectivement possible des *corps de rencontre* (dessinés par l'équation de Tuck), comme par exemple ce dernier, à des corps purement géométriques.

Nous nous sommes déjà exprimé sur la présence, aux extrémités des corps de Tuck, d'une ou deux antennes (dont nous pensons que leur diamètre infinitésimal ne doit pas influer significativement sur la Traînée).

La même attitude peut être tenue, à notre sens, au sujet des courts tétons qui prolongent le corps cité à l'instant et les corps de sa famille (les tétons étant les volumes de révolution qui prolongent le corps *physique* lui-même jusqu'aux abscisses **–1** et **+1**), même si cette attitude serait probablement plus facile à justifier pour certaines formes de corps que pour d'autres.

Quant aux défauts de forme de la génératrice des corps de Tuck (par rapport à des génératrice purement géométriques), le lecteur pourra voir que nous les avons toujours moyennés de sorte que le rayon de la génératrice de Tuck soit en moyenne aussi souvent plus fort que moins fort que celui de notre génératrice géométrique de référence. C'est un réflexe naturel, mais ce n'est peut-être pas un bon principe : si la Traînée d'un corps est fonction de sa surface mouillée, par exemple, les erreurs commises sur les plus forts rayons influeront beaucoup plus sur la Traînée que les même erreurs (absolues) sur les plus petits rayons du corps.

Plus précisément, il est possible qu'on puisse tirer des lois de l'écoulement de Stokes une règle mathématique qui permettrait une minimisation rationnelle et automatique des erreurs de rayon, cette minimisation visant bien-sûr à la minimisation de l'erreur entre le C_x linéaire calculé d'après la méthode inverse de Tuck et le C_x linéaire vrai du corps (à supposer qu'il soit calculable par une méthode directe).

À titre d'exemple (bien-sûr trop naïf), nous pensons à une minimisation de la moyenne quadratique des erreurs plutôt que la minimisation de la moyenne arithmétique que nous avons-nous-même utilisée *à vue*).

Corps cono-cylindrique de Tuck à 9 paramètres :

On obtient l'équation de Tuck à **9** paramètres en ajoutant dans l'exponentielle de l'équation à **7** paramètres :

→ au dénominateur :

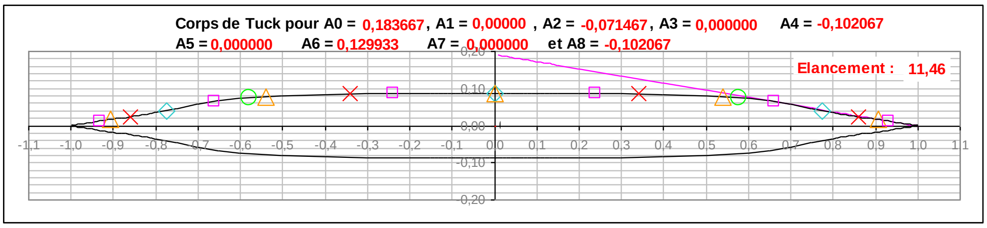
$$+\ \frac{901}{280}A_8\left(\frac{6435}{128}x^8-\frac{3003}{32}x^6+\frac{3465}{64}x^4-\frac{315}{32}x^2+\frac{35}{128}\right)$$

→ et au numérateur :

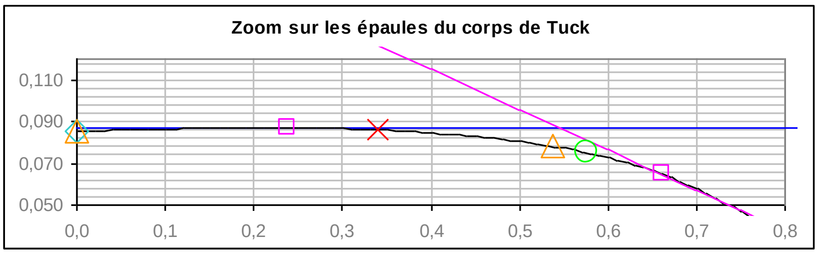
$$+\ A_8\left(\frac{6435}{128}x^8-\frac{3003}{32}x^6+\frac{3465}{64}x^4-\frac{315}{32}x^2+\frac{35}{128}\right)$$

Le lecteur avisé aura compris que, puisque nous nous intéressons plus précisément aux corps symétriques, nous n'avons pas pris en compte, dans les équations de Tuck à **7** et **9** paramètres, les paramètres d'indice impairs que sont $\mathbf{A_5}$ et $\mathbf{A_7}$

Parmi les corps formés par l'équation de Tuck à **9** paramètres, nous rencontrons ce corps à pointes (ou ogives) assez strictement coniques (comme l'indique la droite fuchsia :



La partie centrale est assez précisément cylindrique ; par contre, les raccordements entre les parties coniques et la partie centrale cylindrique (raccordement que l'on pourrait appeler *les épaules*) constitue un arrondi que le zoom suivant montre mieux :



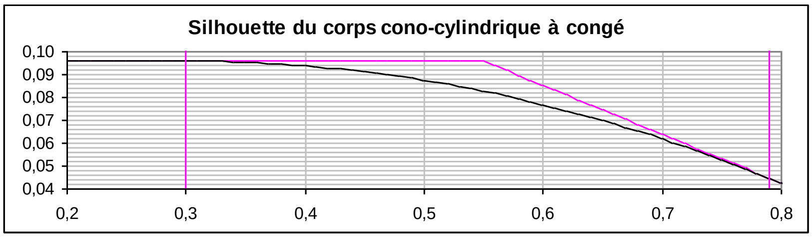
L'élancement de ce corps est **11,46** et son $\mathbf{C_x}$ linéaire (en référence longueur) vaut (d'après Tuck) **2,308**.

Comme ce corps est très proche d'un corps cono-cylindrique (à l'arrondi des épaules près), nous avons songé à appliquer notre libellé trouvé plus haut selon la méthode de Cox ; ce libellé, si l'on admet une longueur des parties coniques de **45 %** [156], promet un $\mathbf{C_x}$ linéaire de **2,26** (soit **~ 2 %** de moins).

Ces deux $\mathbf{C_x}$ linéaires (celui de Tuck et celui calculé d'après Cox) sont donc bien du même ordre [157]. En l'occurrence, cependant, c'est plutôt aux calculs de Tuck que nous ferions confiance.

Nous avons eu l'idée de vérifier, d'après la méthode de Cox, si l'arrondi des épaules de ce corps pouvait expliquer la différence entre les deux $\mathbf{C_x}$ linéaires.

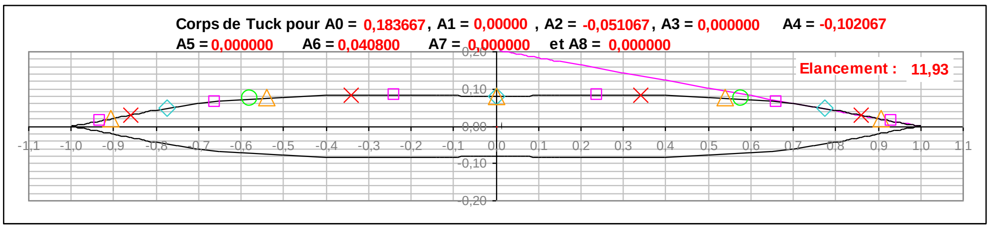
Il s'avère, du moins si l'on accorde du crédit à la méthode de Cox, qu'un arrondi en arc de cercle tel que celui que l'on voit ci-dessous :

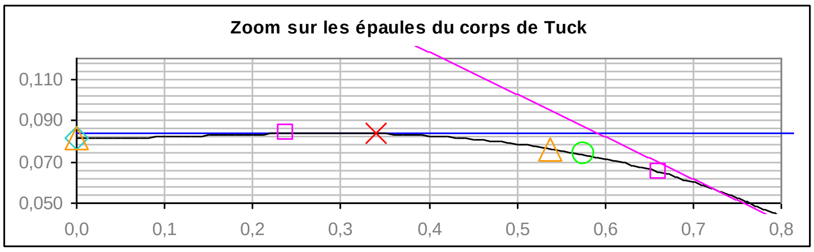


…ne fait que diminuer le $\mathbf{C_x}$ linéaire calculé par l'intégrale de Cox de **0,95 %**.

Cette variation est faible et nous rappelle, si besoin était, qu'en régime de Stokes, la forme des corps agit assez peu sur la Traînée… [158]

Un autre corps biconique à arrondi nous a paru également assez bien formé :





---

[156] On peut estimer ce pourcentage aussi bien sur le premier graphe du corps que sur le zoom, par exemple, sur le zoom, au point de concours de la tangente fuchsia avec la génératrice bleue.

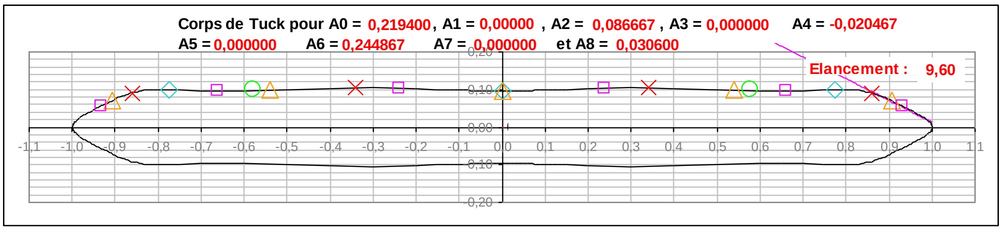
[157] Cette erreur aurait été ramené à **0,10 %** si l'on avait pris **40 %** de parties coniques ou montée à **10 %** pour **70 %** de parties coniques.

[158] La valeur de ce constat est celle que l'on accordera à notre exploitation des calculs de Cox, cette exploitation consistant, rappelons-le, à imposer *manuellement* la silhouette des corps à l'intégrale de Cox.…

Son élancement est **11,93** et Tuck lui assigne un C_x linéaire (référence longueur) de **2,308** [159], soit encore **1,9 %** de plus que ce que lui attribuerait notre libellé tiré de Cox avec un pourcentage de partie conique toujours pris à **41 %**.

Dès lors que l'on accorde plus de crédit à la méthode de Tuck qu'à celle de Cox, ces deux derniers exemples de corps quasi biconiques laissent à penser que le libellé que nous avons tiré de la méthode de Cox donne des C_x linéaires de l'ordre de **1 %** trop faibles [160], au moins dans les pourcentages de conicité envisagés à l'instant.

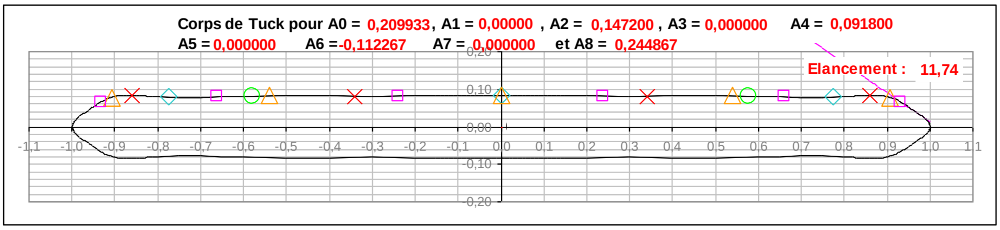
L'équation de Tuck à **9** paramètres améliore légèrement le dessin du corps que nous avons déjà rencontré à l'instant (mais tracé par **7** paramètres). Surtout son élancement a été accru à **9,60** :



Tuck lui assigne un C_x linéaire de **2,757**, alors que notre libellé tiré de Cox lui attribue **2,734** (avec une longueur de parties coniques estimée à **15 %**).

Au long de la partie quasi-cylindrique de ce corps, les irrégularités sur le diamètre atteignent cependant **8 %**.

L'équation de Tuck à **9** paramètres (tous les paramètres d'indice impair étant maintenus nuls), dessine encore ce corps d'élancement **11,74** dont les irrégularités de la partie quasi-cylindrique atteignent malheureusement **8,2 %** :



Sa particularité est d'arborer des parties coniques très courtes (de l'ordre de **13 %**).

Il est donné par Tuck pour avoir un C_x linéaire (référence longueur) de **2,638**. Notre libellé, tiré des travaux de Cox, lui attribue un C_x linéaire plus faible de **4 %** (si on le base sur ces **13 %** de parties coniques)…

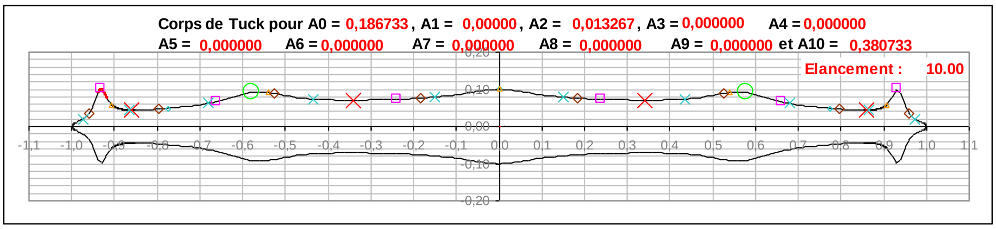
[159] C'est le même que celui du corps précédent puisque le paramètre A_0 est le même…

[160] **1 %** trop faibles pour des corps rigoureusement cono-cylindrique, l'arrondi des épaules entraînant une diminution de l'ordre de **1 %**.

Corps de Tuck à 11 paramètres à trompettes :

Nous concentrant sur des corps symétriques, nous avons poursuivi la complexification de l'équation de Tuck en ajoutant à celle de **9** paramètres un **11**ème paramètres [161].

Nous avons pu obtenir des corps comme celui-ci :



Comme beaucoup des paramètres sont maintenus nuls, l'équation de ce corps est (légèrement) simplifié [162] :

$$\mathbf{R(x)} = 2\sqrt{1-x^2}\ *$$

$$\mathrm{Exp}\left[-\frac{\dfrac{1+A_0}{2}+2A_2\left(\dfrac{3}{2}x^2-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{8641}{2520}A_{10}\left(\dfrac{46189}{256}x^{10}-\dfrac{109395}{256}x^8+\dfrac{45045}{128}x^6-\dfrac{15015}{128}x^4+\dfrac{3465}{256}x^2-\dfrac{63}{256}\right)}{A_0+A_2\left(\dfrac{3}{2}x^2-\dfrac{1}{2}\right)+A_{10}\left(\dfrac{46189}{256}x^{10}-\dfrac{109395}{256}x^8+\dfrac{45045}{128}x^6-\dfrac{15015}{128}x^4+\dfrac{3465}{256}x^2-\dfrac{63}{256}\right)}\right]$$

Mais au vu de la silhouette du corps dessiné par cette équation, une question se pose : les formes très aigües (en pavillons de trompettes bouchées) dessinées par notre tableur aux abscisses **-0,95** et **0,95** ne résultent-elles pas d'un manque de précision de nos calculs ?

En effet, il n'est pas rare, dans les manipulations de l'équation de Tuck, que le dénominateur du quotient présent dans l'exponentielle soit annulé (ou peu s'en faut).

S'il est annulé à partir d'une valeur positive, on peut estimer que le rayon qui en découle est infini : il est alors assez facile d'exclure ce cas comme « non-physique » (et d'ailleurs non admis par les mathématiques).

Si le même dénominateur est annulé à partir de valeur négative, l'exponentielle garde alors une valeur finie. Le problème mathématique demeure mais, pour les valeurs n'annulant pas tout à fait le dénominateur, le rayon admet une valeur finie : on peut alors considérer que l'équation de Tuck dessine, même à cette abscisse où le dénominateur est « presque » nul, un corps encore « physique ».

Mais la chose se complique lorsque l'on réalise que l'annulation de dénominateur peut se produire à une abscisse qui n'est pas prise en compte par notre tableau (plus précisément entre deux abscisses prises en compte par ce tableau).

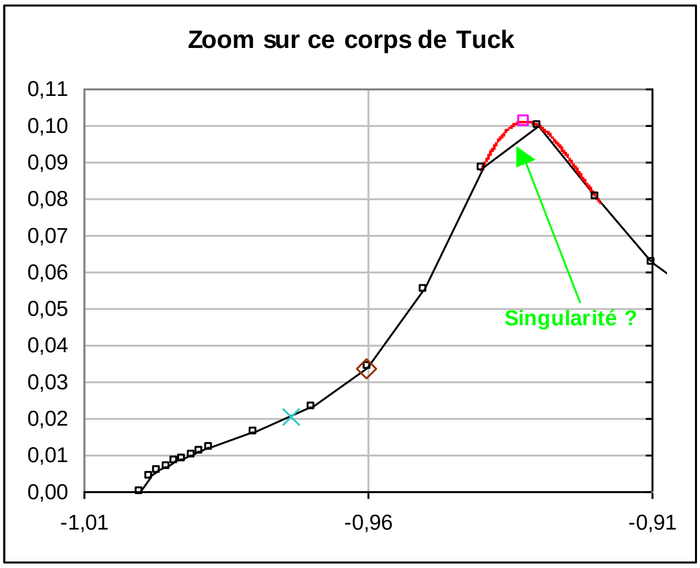
La silhouette du corps que dessine notre tableur paraît alors régulière mais, localement, il est possible qu'une partie de la courbe qui forme cette silhouette pallie une singularité de la courbe réelle [163].

---

[161] Les derniers paramètres d'indice impair étant pris comme nul.

[162] Le libellé de cette équation de Tuck simplifiée donne implicitement les deux termes en $\mathbf{A_{10}}$.

On peut chercher une occurrence de ce risque dans les parties *aigües* du corps ci-dessus, représenté à plus grande échelle ci-dessous :



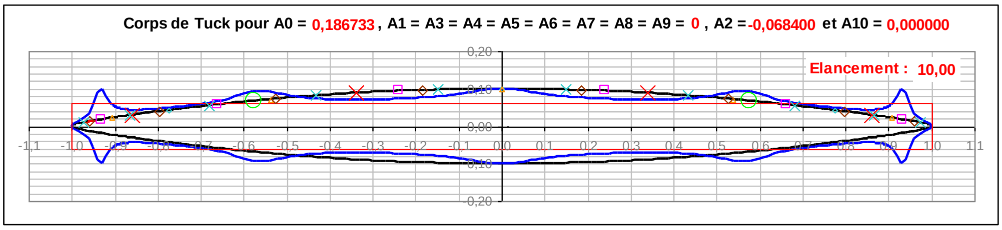
La flèche verte attire l'attention sur un segment de courbe noire qui pourrait pallier une partie asymptotique.

Dans les faits, un calcul beaucoup plus précis dessine la courbe rouge qui lève tout soupçon sur la nature continue de la silhouette mathématique du corps…

Néanmoins, la question mathématique que nous venons d'énoncer se posera toujours dans l'exploitation de l'équation de Tuck et elle devra toujours être gardée à l'esprit.

Le corps d'élancement **10** présenté ci-dessus en bleu suscite un $\mathbf{C_x}$ linéaire (référence longueur) de **2,347**.

Il suscite d'ailleurs le même $\mathbf{C_x}$ linéaire que le corps beaucoup plus simple mais de même élancement dessiné également ci-dessous en noir :



(comme on le lit dans le titre du le graphe, ce corps noir est formé par les valeurs $\mathbf{A_0 = 0{,}186733}$, $\mathbf{A_2 = -0{,}0684}$, les autres paramètres étant nuls)

Sur la foi des travaux de Tuck, <u>ces corps bleu et noir, de silhouettes très différentes, ont donc le même $\mathbf{C_x}$ linéaire</u> (puisque leur paramètre $\mathbf{A_0}$ est le même, soit $\mathbf{A_0 = 0{,}186733}$).

[163] Se souvenir ici que « pallier un défaut » signifie, étymologiquement, « le recouvrir d'un manteau » (pallium) : notre courbe recouvre donc de son manteau une partie asymptotique de la vraie silhouette.

Que ces deux corps présentent des caractéristiques de Traînée identiques a de quoi surprendre, surtout du fait que le corps dessiné en noir possède une silhouette assez proche de celle des corps à génératrice circulaire dont nous avons dit plus haut qu'ils pouvaient briguer l'honneur d'être ceux de moindre Traînée, à élancement donné.

Bien-sûr ce corps en noir n'est pas tout à fait à génératrice circulaire (s'il l'était son $\mathbf{C_x}$ linéaire serait **2,16 %** plus faible, d'après notre libellé déjà montré).

La comparaison de ces deux corps avec le bâtonnet de même $\mathbf{C_x}$ linéaire, dont nous avons reproduit la silhouette en rouge, apporte peu de renseignements (le $\mathbf{C_x}$ linéaire de ce bâtonnet a été calculé par la formule de Cox – reliquat **-0,80685 –** qui nous est apparu comme très crédible lors de notre étude des corps cono-cylindriques et ellipsoïdo-cylindriques).

Ce constat est intriguant : comme les calculs de Tuck donnent facilement le $\mathbf{C_x}$ linéaire des corps, nous avons souvent porté notre attention à l'évolution de ce $\mathbf{C_x}$ linéaire pendant que nous agissions sur nos curseurs et donc que nous tordions la silhouette du corps dessiné par l'équation de Tuck : il nous avait semblé, à cette occasion, que les corps qui présentaient à l'écoulement des formes avant ou arrière plus abruptes compensaient la rudesse de ces formes par un diamètre plus faible, par exemple, en leur centre (pour conserver un $\mathbf{C_x}$ linéaire constant).

Bien-sûr, ces constats sont difficiles à faire, ne serait-ce que parce qu'en régime de Stokes il est difficile d'apprécier la rudesse des formes : À cet égard, il faut garder à l'esprit que le corps éminemment abrupte qu'est le disque en déplacement frontal développe une Traînée plus faible (à diamètre égal) que la sphère (corps souvent ressenti comme mieux profilé que le disque) :

$\mathbf{C_x}$ linéaire (réf. D) du disque : **8**
$\mathbf{C_x}$ linéaire (réf. D) de la sphère : $\mathbf{3\pi}$ (soit **9,425**)

Ce fait est d'ailleurs très bien illustré par la courbe donnant le $\mathbf{C_x}$ linéaire des ellipsoïdes selon leur élancement : le disque est, selon les critères de notre intuition quotidienne, le plus abrupt de ces corps, pourtant il présente une Traînée plus faible que tous les ellipsoïdes de plus fort élancement.

De là à conjecturer que les deux quasi-disques (ou *pavillons de trompettes bouchées*) qui ornent les deux extrémités de notre corps de Tuck bleu ont un effet de carénage sur le reste du corps, il n'y a qu'un pas, difficile cependant à franchir.

Nous avons eu la curiosité d'utiliser l'intégrale de Cox pour vérifier si ces extrémités en *pavillons de trompettes bouchées* induisaient un surcroît de Traînée ou non.

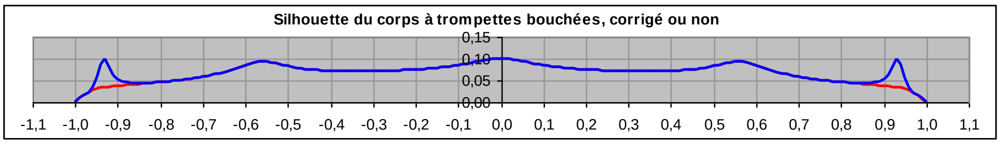
Dans un premier temps, nous avons porté l'équation de Tuck dessinant la silhouette du corps dans notre tableau afin de réaliser l'intégration graphique de l'intégrale de Cox.

Cette intégration graphique alloue au coefficient C_1 de Cox la valeur **-0,3945**, ce qui donne à ce corps d'élancement **10** un $\mathbf{C_x}$ linéaire (référence longueur) de **2,415**, soit simplement **3 %** au dessus du $\mathbf{C_x}$ linéaire calculé par Tuck (qui est **2,347**).

Cette proximité des $\mathbf{C_x}$ linéaires semble justifier les deux méthodes…

Le corps noir d'élancement **10** (sans trompettes ni annelures) montré ci-dessus est donné par la même méthode de Cox pour présenter un $\mathbf{C_x}$ linéaire (réf L) de **2,314**, soit **1,4 %** de différence avec le pronostic de Tuck pour le même corps [164].

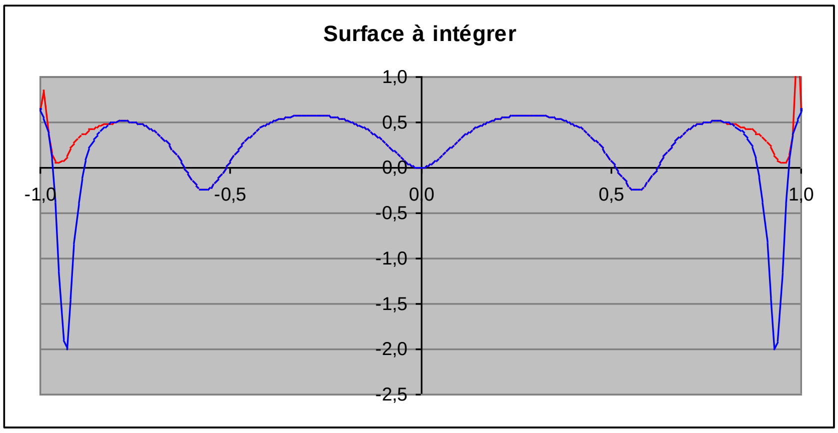
Dans un deuxième temps nous avons modifié manuellement la silhouette du corps en lui arasant ses pavillons de trompettes (corrections rouges, ci-dessous) :



Le $\mathbf{C_x}$ linéaire (réf. L) de cette nouvelle configuration du corps en devient, selon Cox, **2,365**, soit (simplement) **2,11 %** de moins que le $\mathbf{C_x}$ linéaire avec trompettes selon le même Cox !

L'intégrale de Cox (du moins telle que mise en œuvre par nous) semble donc indiquer que contrairement à ce que nous suggère notre intuition quotidienne (formée aux hauts Reynolds) les pavillons de trompettes du corps de Tuck ne suscitent pas une grande Traînée (**2,11 %**).

Mieux encore, il apparaît, lorsque l'on fait dessiner au tableur la surface à intégrer (dans l'intégrale de Cox) :



…que les pics négatifs bleus (qui sont dus à la présence des trompettes) sont rabotés par la suppression des pavillons de trompettes (courbes rouges), c'est ce qui fait passer le coefficient C_1 de Cox de **–0,3945** à **–0,3385** et diminue le $\mathbf{C_x}$ linéaire de **2,415** à **2,365**.

On note d'ailleurs que les autres ondulations, au long du corps de Tuck, tendent également à apporter des surfaces négatives ou faibles dans l'intégrale de Cox…

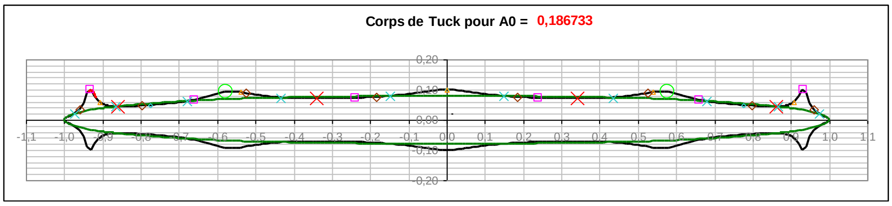
De fait, l'arasement, en plus des deux trompettes, des deux annelures centrées sur les abscisses – et **+0,56**) crée un $\mathbf{C_x}$ linéaire (déterminé par Cox) de **4,10** % inférieur à celui du corps avec toutes ses trompettes et annelures (soit **2%** de moins que le corps sans ses deux trompettes)…

[164] L'équation de Tuck de ce corps noir est entrée dans notre tableau et l'intégrale de Cox est effectuée graphiquement.

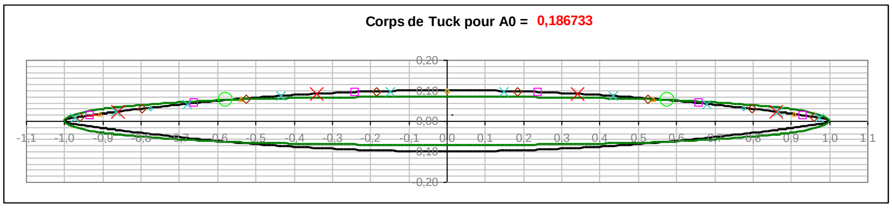
<u>Autre méthode pour déterminer l'influence des trompettes sur le C_x :</u>

En faisant évoluer la seule valeur du paramètre $\mathbf{A_{10}}$ de l'équation de Tuck, on arase les pavillons de trompettes et les annelures du corps de Tuck étudié à l'instant.

Ainsi, en faisant passer le paramètre $\mathbf{A_{10}}$ de **0,380733** à **0,030600**, on obtient le corps vert ci-dessous (comparé avec le corps à trompettes en noir) :



Cette modification de $\mathbf{A_{10}}$ change donc assez peu la forme *de fond* du corps [165] qui est proche de l'ellipsoïde. Cette forme verte est cependant de diamètre plus faible que la forme noire sans trompettes d'élancement **10** utilisée ci-dessus qui, elle, tenait plus d'un corps à génératrice circulaire :



La même forme verte à un élancement de **12,41**.

Il faut bien réaliser que si cette modification du paramètre $\mathbf{A_{10}}$ arase les trompettes et les trois autres annelures, le $\mathbf{C_x}$ linéaire de ce corps vert est toujours **2,347**, par définition (puisqu'on n'a pas modifié $\mathbf{A_0}$) : Comme la silhouette verte est très proche de la silhouette noire sans ses trompettes et annelures, <u>on ne peut qu'être conduit à penser que trompettes et annelures ne créent pas de Traînée en elles-mêmes</u>, ce qui est un constat fort étonnant…

Cependant, dans notre texte, nous avons toujours comparé des corps de même élancement ; la modification de l'élancement du corps consécutive à l'arasement des trompettes et autres annelures (par modification du paramètre $\mathbf{A_{10}}$) est donc gênante. On peut cependant la corriger facilement : si l'on admet, comme nous l'avons souvent constaté au cours du présent texte, qu'au moins localement le $\mathbf{C_x}$ linéaire d'un corps de silhouette donnée mais d'élancement variable admet une évolution du type :

$$\mathbf{C_{x}}_{\text{Lin Réf L}} = \frac{\mathbf{2\pi}}{\mathbf{Ln(2\lambda)+C}}$$

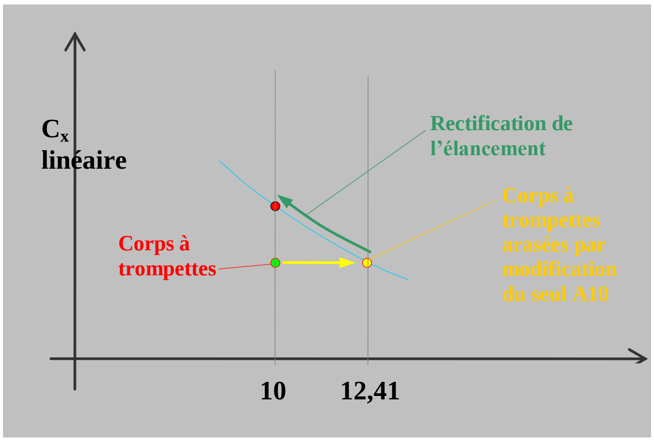
…la valeur du reliquat **C** étant liée à la silhouette du corps, on peut alors ramener facilement le $\mathbf{C_x}$ linéaire du corps vert à celui du corps de même silhouette mais d'élancement **10**.

Expliquons-nous mieux : On part de la marque circulaire noire à cœur rouge qui représente le $\mathbf{C_x}$ linéaire du corps à trompettes. On modifie le seul paramètre **A10**. Cette modification de $\mathbf{A_{10}}$ crée un corps d'élancement **12,41** de même $\mathbf{C_x}$ linéaire [166] (marque rouge à cœur jaune au bout de la flèche jaune horizontale ci-dessous). Mais ce nouveau corps est sur une courbe que l'on peut déterminer, au moins de façon approchée (courbe bleu clair).

---

[165] Par forme *de fond*, nous voulons dire la forme du corps après arasement de ses trompettes et annelures…

[166] Puisque le paramètre $\mathbf{A_0}$ n'a pas été modifié…



Connaissant cette courbe, on peut alors calculer le C_x linéaire du corps de même silhouette mais d'élancement **10** (ce qui revient à rectifier son élancement, flèche verte ci-dessus).

Dans le cas présent, l'équation :

$$\mathbf{C_{xLin\ Réf\ L} = 2{,}347 = \frac{2\pi}{Ln(2*12{,}41)+C}}$$

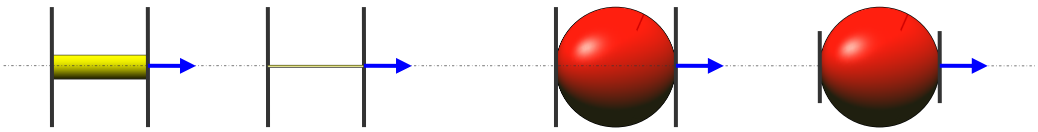
…conduit assez facilement à la valeur **–0,535** de **C**.

La connaissance de **C** permet alors de calculer le C_x linéaire du corps vert mais ramené à l'élancement **10** (à fins de comparaison avec le corps à trompettes dont il découle).
On trouve pour ce corps vert ramené à l'élancement **10** : $\mathbf{C_{xLin\ Réf\ L} = 2{,}553}$.

Ce C_x linéaire est **8,79 %** plus fort que le corps à trompette de même élancement dont il est issu par modification du seul paramètre $\mathbf{A_{10}}$ et remise à l'élancement **10**.
Le corps à trompettes présente donc une Traînée plus faible que ce corps vert presque ellipsoïdal de même élancement (il est presque ellipsoïdal mais présente un C_x linéaire nettement plus fort que celui du corps à génératrice circulaire de même élancement **10**, à savoir **2,30**).

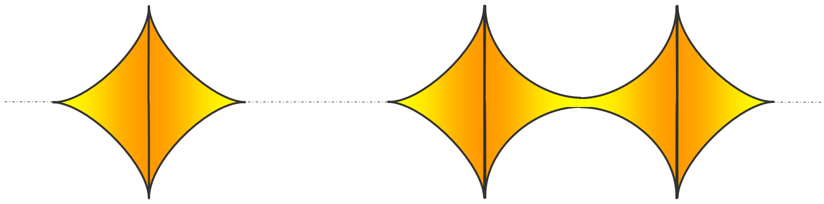
Ces différents constats montrent que le régime de Stokes est un domaine où notre intuition pétrie de hauts Reynolds a beaucoup de mal à s'exercer…

Pour faciliter cette même réflexion, on pourrait d'ailleurs s'appuyer sur des mesures pratiques de Traînée de corps tels que des *bobines*, ou sphère à disques précurseurs :



…corps dont on étudierait, évidemment, les mouvements axiaux (horizontaux sur ce schéma)…

Une autre idée vient à l'esprit : celle de mesurer la Traînée de corps de révolution à génératrice concave tels que ceux-ci, par exemple :



Note sur les limites de validité (en élancement) des travaux de Tuck :

Le $\mathbf{C_x}$ linéaire du précédent corps de Tuck est assez surprenant et instille en notre esprit des doutes quant à la bonne utilisation des travaux de Tuck, le premier doute concernant le sens que donne ce mathématicien au concept de *grands élancements*.

Nous appuyant sur les exemples mis en avant par Tuck dans son texte, nous avons toujours opté précédemment, dans notre exploitation de son texte, pour une définition *arithmétique* de l'élancement, à savoir le quotient **L/D**.

Sur cette base, pour que les travaux de Tuck soit valides, de donner à cet élancement une valeur suffisante : nous avons placé, dans notre exploitation, le seuil minimal de ces *grands élancement* à **10**, Tuck ayant lui-même opté pour un peu moins dans ses exemples.

Cependant un doute subsiste : en Mécanique des Fluides, une autre définition des grands élancements est utilisée : cette définition indique que pour que l'élancement puisse être considéré comme grand, la pente locale de la surface des corps doit être faible, c'est-à-dire, pour un corps de révolution, que le diamètre doit évoluer lentement en fonction de l'abscisse.

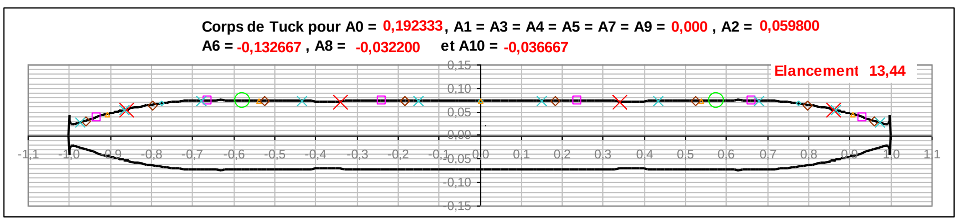
Cette condition de *pente locale faible* n'est nullement respectée dans la zone entourant le point d'arrêt de corps tels que les corps de moindre Traînée pour hauts Reynolds (fuselages subsonique ou dirigeables, par exemple) ; il a cependant été remarqué que ce non-respect de la condition de *pente locale faible* ne grève pas énormément les calculs du moment d'instabilité de tels corps (nous faisons référence ici aux calculs fondés sur le Théorie des Corps Élancés de Munk).

Dans le cas du régime de Stokes qui nous intéresse ici, il est de même possible (mais nullement certain) qu'un non-respect *local* de la condition de *pente locale faible* ne grève pas exagérément la précision des calculs de Tuck, nous pensons en particulier à la pente locale autour des points d'arrêts des corps de Tuck qui, à notre goût, est toujours trop forte, par exemple pour les corps cités en exemple par Tuck lui-même (les trois derniers corps et l'ellipsoïde en particulier -*spheroïd* en anglais, deuxième schéma- présentant bien-sûr des pentes infinies en leurs deux points d'arrêt externes.

On se souvient néanmoins que nous nous sommes autorisé de ces exemples pour aller de l'avant dans notre étude des corps de Tuck, c.-à-d. que nous avons opté pour la définition *arithmétique* de l'élancement…

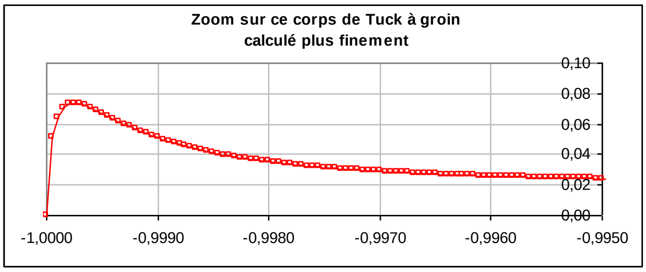
Corps de Tuck à groins

Voici encore un corps très particulier créé par l'équation de Tuck à **11** paramètres :



Nous l'avons nommé *à groins* à cause de ses extrémités plates ressemblant au groin des porcs et autres animaux fouisseurs.

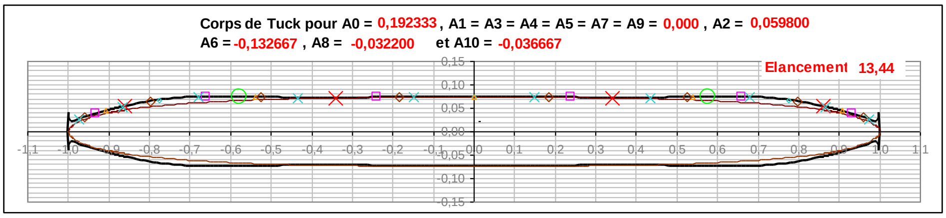
S'agissant de la forme de ce groin, il faut toujours songer, évidemment, qu'elle peut provenir de l'annulation du dénominateur d'un quotient. Cependant, pour la valeur de $\mathbf{A_{10}}$ indiquée sur ce graphe, ce n'est en rien le cas : un zoom sur l'une des extrémités le montre bien :



(noter le grand allongement de l'échelle horizontale)

Ci-dessus, la silhouette rouge est calculée très finement (la périodicité de l'abscisse des marques le montre) : ce calcul très fin rassure pleinement sur la continuité de la courbe.

Le $\mathbf{C_x}$ linéaire, référence longueur, de ce corps à groins d'élancement **13,44** est **2,417**, identique à celui du corps sans groins de même élancement dont la silhouette est représentée ci-dessous en marron ; une fois de plus ce résultat est surprenant et incite à réitérer les mises en gardes concernant la condition de grand élancement posée par Tuck (ici, c'est encore la pente locale, quasi infinie aux points d'arrêt qui doit nous alerter)…



Abandonnons, à regret, les corps de Tuck (du moins les corps simples car nous étudierons plus bas des corps composites dessinés par la méthode de Tuck).

Citons juste le moyen d'écrire les polynômes de Legendre de degrés successifs dont est formée l'équation de Tuck.

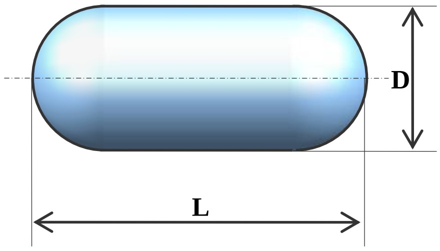
Le site http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/Math/legend.html donne la formule générale écrivant le polynôme de Legendre de degré **n** (appelé $\mathbf{P_n(x)}$) :

$$P_n(x) = \sum_{m=0}^{M} (-1)^m \frac{(2n-2m)!}{2^n m!(n-m)!(n-2m)!} x^{n-2m}$$

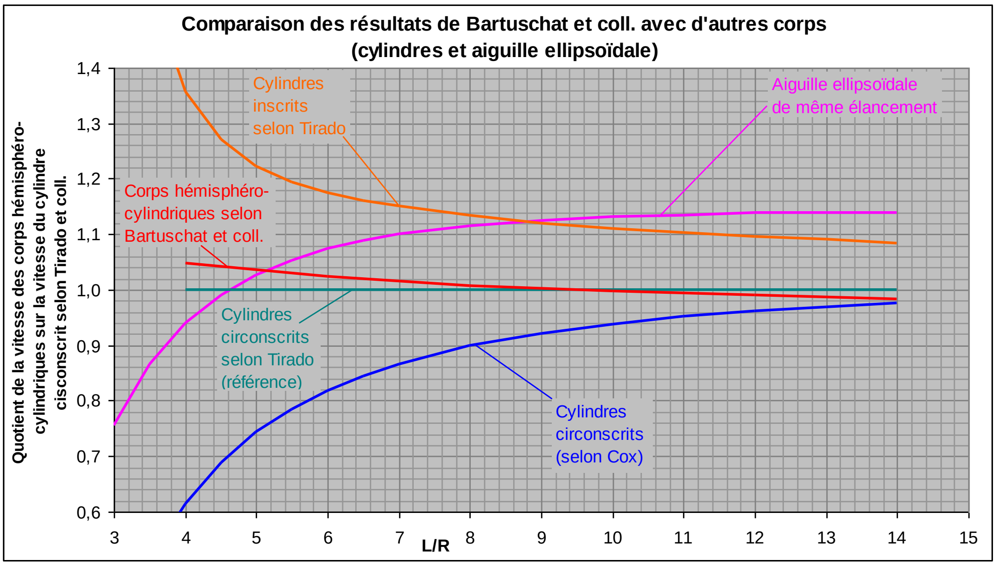
M valant **n/2** ou **(n-1)/2** de sorte qu'il soit toujours entier…

Corps hémisphéro-cylindriques de Bartuschat et coll. en mouvements axiaux :

Dans leur texte, Bartuschat, Fischermeier, Gustavsson et Rüde, calculent, par la méthode *lattice Boltzmann 3D*, les caractéristiques de Traînée de six corps hémisphéro-cylindriques d'élancement **2** à **7** :



Ils ne donnent pas leurs résultats en valeurs numériques mais les expriment en graphe sous forme de quotient (courbe rouge ci-dessous) par la vitesse d'un cylindre à bout droit de même élancement que chaque corps [167] de la vitesse de décantation de chaque corps hémisphéro-cylindrique, tout ceci sous une force décantante de **5,128** $\mathbf{10^{(-10)}}$ $\mathbf{kgm/s^2}$ [168] et dans un liquide de viscosité dynamique de **1195** $\mathbf{kg/m^3}$.

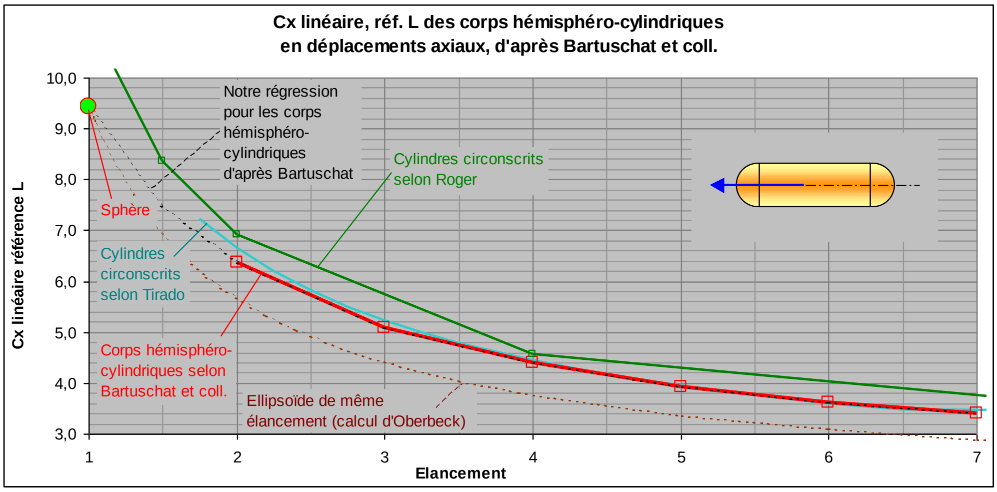


Cette présentation de leurs résultats est pour le moins absconse, mais nous avons pu reproduire leurs calculs de comparaison et saisir graphiquement leurs résultats (ceux-ci dessinant la courbe rouge ci-dessus).

Ceci nous a permis de tirer le $\mathbf{C_x}$ linéaire des six corps (en référence à leur longueur) ; c'est la courbe également rouge ci-dessous, comparée avec d'autres courbes :

[167] … donc le cylindre circonscrit au corps hémisphéro-cylindrique, ce calcul étant fait selon les équation de Tirado pour ces courts cylindres à bouts droits.

[168] …soit **5,128** $\mathbf{10^{(-10)}}$ **N**, cette force étant aussi la Traînée.



Nous avons pu trouver une régression réunissant les six marques. Par chance ineffable, cette régression passe par la sphère (qui est le corps hémisphéro-cylindrique d'élancement unitaire). Cette régression est, si $\boldsymbol{\lambda}$ est l'élancement des corps :

$$\mathbf{C_{xLin\ Réf.L} = 9{,}4\ \lambda^{(-0{,}59)} + 0{,}06\ \lambda}$$

...qui est notre régression donnant le $\mathbf{C_x}$ linéaire (référence **L**) des corps hémisphéro-cylindriques de Bartuschat et coll. en déplacement axiaux entre les élancements **7** et **2** (mais peut-être valide jusqu'à l'élancement **1** de la sphère [169]).

On peut voir cette régression sur notre graphe, sous la forme de pointillés noirs (son erreur est inférieure à **0,50 %** entre les élancements **2** et 7).

Sur la foi des travaux de Tirado et coll., Bartuschat et coll. déclarent que le coefficient de Traînée des corps hémisphéro-cylindriques (ci-dessus leur $\mathbf{C_x}$ linéaire en référence **L**) diminue du fait du carénage opéré par la présence des deux ogives hémisphériques dans la plage d'élancement **2** à **5** et augmente légèrement entre les élancement **5** et **7** (cette augmentation étant visible par l'évolution de l'écart entre la courbe bleue pâle de Tirado et la courbe rouge de Bartuschat).

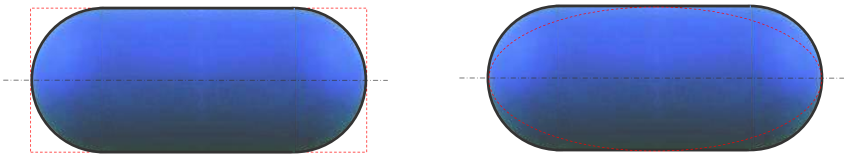
Ce constat, basé sur les $\mathbf{C_x}$ linéaires de Tirado pour les cylindres circonscrit (de même élancement donc que les corps hémisphéro-cylindriques), nous paraît sujet à caution.

Au reste, il ne peut plus être dressé si, par contre, on se réfère à la courbe des même cylindres circonscrits (de même élancement, donc) due à Roger après ses calculs (résultats cités par Ui, en vert ci-dessus).

Toujours sur ce dernier graphe, nous avons porté le $\mathbf{C_x}$ linéaire des ellipsoïdes de révolution pointus en déplacements axiaux (calculé exactement selon Oberbeck).

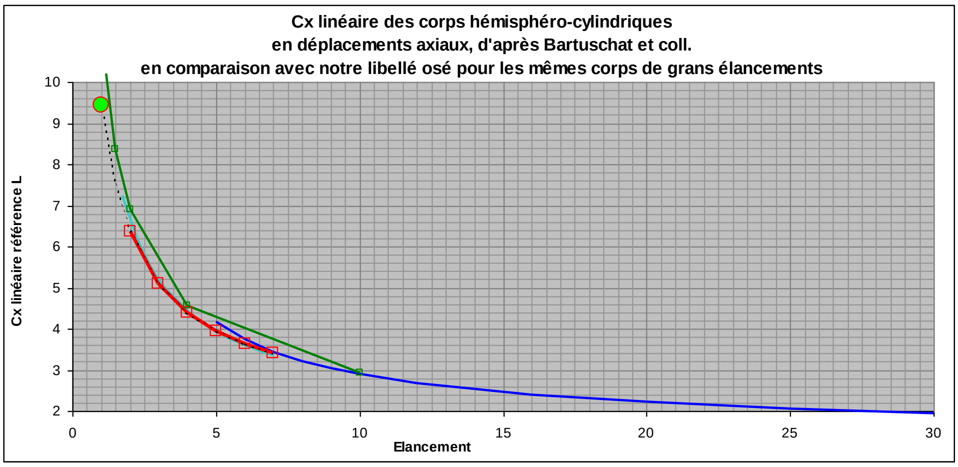
Attention au fait que ces ellipsoïdes ne sont pas circonscrits aux corps hémisphéro-cylindrique (comme le sont les cylindres de même élancement, schéma de gauche ci-dessous) : ils en ont juste l'élancement (schéma de droite) :

[169] Il est facile de voir que pour l'élancement unitaire cette régression donne **9,46** au lieu de **9,425**.



Il apparaît sur le graphe que l'ellipsoïde de même élancement présente un $\mathbf{C_x}$ linéaire nettement plus faible que celui des corps hémisphéro-cylindriques.

Si l'on ose prédire le $\mathbf{C_x}$ linéaire des corps hémisphéro-cylindriques de fort élancement en utilisant notre libellé déjà présenté, on trouve la courbe bleu dense ci-dessous (prolongée, de façon illicite vers les élancement inférieurs à **10**) :



Par une nouvelle chance ineffable [170], cette courbe bleu dense fait très bon ménage avec la courbe rouge de Bartuschat et coll., du moins des élancements **7** à **30**.

Dominik Bartuschat, contacté par nous, a eu la grande amabilité de nous communiquer les valeurs numériques de la vitesse terminale des **6** corps hémisphéro-cylindriques en mouvement axiaux (rappelons que nous avons exploité le texte de Bartuschat et coll. uniquement par captation de ses courbes).

Voici, ci-dessous, la comparaison que l'on peut faire entre la vitesse terminale des **6** corps de Bartuschat et coll. et la vitesse de décantation terminale que l'on peut tirer de notre $\mathbf{C_x}$ linéaire (qualifiée ici de *notre*) [171] :

	Traînée :	5,128E-10	
	Vicosité dynamique :	1,00E-03	
	Diamètre du corps :	8,00E-05	
Elancement L/D	Vitesse terminale	Notre Vitesse terminale	Erreur %
2	5,031E-04	5,036E-04	-0,11%
3	4,190E-04	4,195E-04	-0,13%
4	3,635E-04	3,637E-04	-0,06%
5	3,242E-04	3,241E-04	0,03%
6	2,935E-04	2,937E-04	-0,05%
7	2,691E-04	2,691E-04	0,01%

170 Une fois de plus n'est pas coutume.

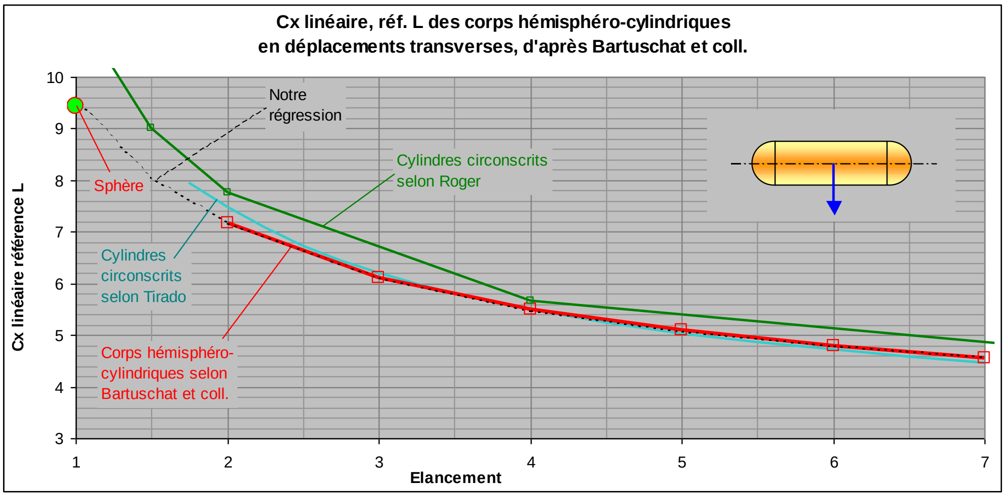
171 La Traînée, la viscosité dynamique du fluide, ainsi que le diamètre des corps ont été pris comme constant par les auteurs. Notre vitesse terminale est alors le quotient de la Traînée par $[\mu\, D\lambda\, C_{xLin\ Réf.L}]$.

L'erreur commise lors de toute notre chaîne d'exploitation s'avère donc à notre honneur.

Nous pensons que nous n'avons pas commis plus d'erreur dans notre captation de la courbe de Bartuschat et coll. pour les mouvements transverses :

Corps hémisphéro-cylindriques de Bartuschat et coll. en mouvements transverses :

Bartuschat et coll. ont également calculé selon les mêmes modalités les caractéristique de Traînée des mêmes 6 corps hémisphéro-cylindriques en déplacements transverses :



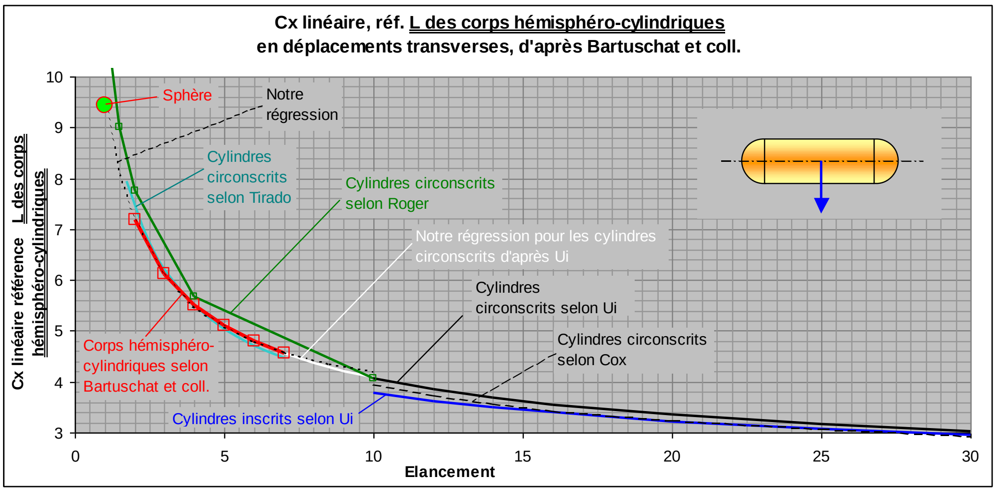
Nous avons trouvé au C_x linéaire de ces corps hémisphéro-cylindriques en déplacements transverses une régression seyante (en tiretés noirs, erreur inférieure à **0,35 %** entre les élancements **2** et **7**) :

$$\boxed{C_{xLin\ Réf}\ L = 9{,}5\ \lambda^{(-0{,}435)} + 0{,}072\ \lambda}$$

...qui est notre régression donnant le C_x linéaire (référence **L**) des corps hémisphéro-cylindriques de Bartuschat et coll. en déplacements transverses entre les élancements **2** et **7**.

On doit admettre que cette régression ne passe pas tout à fait par le C_x linéaire de la sphère (**9,572** au lieu de **9,425**, soit **1,6 %** d'erreur).

Pour les grands élancements, il est utile de dessiner, les prescriptions d'Ui pour les déplacements transverses de cylindres (ici inscrits et circonscrits) :

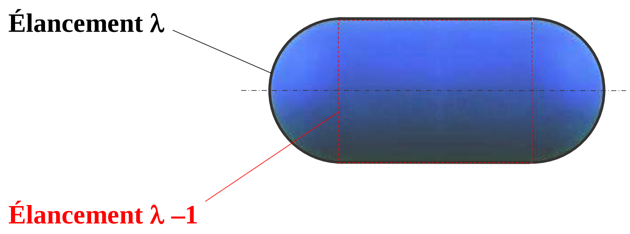


La courbe rouge de Bartuschat et coll. semble pouvoir être prolongée par notre régression blanche pour les cylindres d'élancement **2** à **10** en mouvement transverse d'Ui.

De même, elle semble viser la courbe des cylindres circonscrits noire continue d'Ui (prévue pour les élancements **10** à **75**) : cette position relative laisse entendre que les ogives hémisphériques des cylindres de Bartuschat et coll. n'apportent plus de carénage (par rapport à des cylindres stricts de même élancement).

C'est aussi l'opinion de Bartuschat, mais nous pensons que ce fait gagnerait à être démontré mathématiquement.

Il est bon d'attirer l'attention du lecteur sur la courbe bleu dense qui révèle le comportement des cylindres inscrits dans les corps hémisphéro-cylindriques (cylindre rouge ci-dessous) :



L'élancement de ce cylindre inscrit est plus faible que celui du corps hémisphéro-cylindrique.

La courbe du $\mathbf{C_x}$ linéaire de ce cylindre rouge, en référence à sa propre longueur, serait alors dessinée, en adoptant comme ordonnée l'élancement **λ** du corps hémisphéro-cylindrique, plus haut que la courbe noire en trait continu : comme le montre la pente générale de cette courbe continue noire, le $\mathbf{C_x}$ linéaire d'un corps de moindre élancement est en effet plus fort.

Or notre mise en panorama vise à effectuer la comparaison des Traînées des différentes familles de corps, ou plus simplement de leur longueur de Traînée.

Si l'on n'utilise pas ce concept de longueur de Traînée (ce qui serait également possible ici) il nous faut donc adopter pour l'ensemble de ces familles de corps une longueur de référence commune : nous avons choisi évidemment **L** la longueur des corps hémisphéro-cylindriques (qui, par chance est également celle des cylindres circonscrits).

Dans ce graphe, seuls les cylindres inscrits présentent une longueur plus courte que les corps hémisphéro-cylindriques (leur élancement vaut **λ –1**, si **λ** est l'élancement du corps hémisphéro-cylindrique).

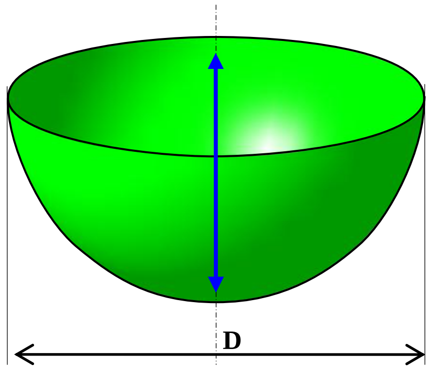
Afin que ce graphe permette une saine comparaison, il faut donc adopter pour les cylindres circonscrits la longueur de référence **L**, la longueur des corps hémisphériques, longueur qui leur est *étrangère* [172].

La courbe bleu dense donne donc le C_x linéaire de ces cylindres circonscrits en référence à la longueur des corps hémisphéro-cylindriques.

Pour en finir avec ce point qui paraîtra épineux aux lecteurs qui ne sont pas coutumiers des C_x de corps multiples aux hauts Reynolds [173], on peut juste faire remarquer qu'un panorama présentant la longueur de Traînée des différents corps (hémisphéro-cylindriques et cylindres inscrits et circonscrits) serait homothétique du graphe ci-dessus (ce qui constitue la démonstration mathématique des propos ci-dessus)…

Cx linéaire de l'hémisphère creux en mouvement axial :

Ce corps (souvent nommé *hemispherical cap* en anglais et dans la langue de Guantánamo) comporte une partie concave : il ne faut donc pas le confondre avec l'hémisphère plein (sur lequel d'ailleurs nous n'avons pas trouvé d'informations).



Le C_x linéaire de l'hémisphère creux (en référence à son diamètre **D**) est donné par Ui (citant Swanson et Teller, 1978, ainsi que Collins, 1963) comme valant :

$$C_{x\,\text{lin réf}\,D} = 8{,}7124$$

On peut noter que cette valeur est du même ordre que celle dévolue à la sphère (**9,4247**) mais plus faible.

L'écoulement sur cet hémisphère creux est très particulier, en ceci qu'il montre un décollement dans la partie concave (que le déplacement se produise dans un sens ou dans un autre). On doit donc constater que ce décollement ne pénalise pas ce corps en Traînée.

L'hémisphère creux est bien-sûr un cas particulier de la calotte sphérique que nous allons étudier à présent.

---

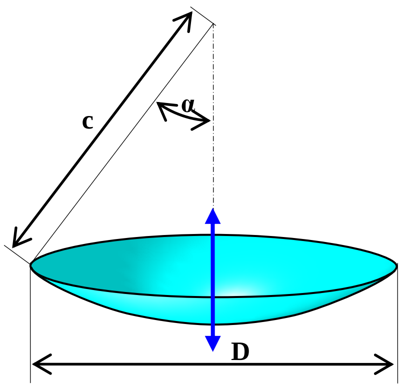
[172] Ce qui revient à pondérer leur C_x linéaire propre par $(\lambda - 1)/\lambda$.

[173] Par exemple, si l'on veut étudier les Traînées de deux sphères de diamètres inégaux se suivant en tandem dans un écoulement, on est contraint d'adopter comme surface de référence une surface commune, par exemple la somme des surfaces frontales des deux sphères…

Cx linéaire de la calotte sphérique (creuse) en mouvement axial :

Ranger et Dorrepaal, en 1980, s'intéressent aux calottes sphériques en général (quel que soit leur demi-angle au centre **α**).

Dans notre titre ci-dessus, nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que ces calottes sphériques sont creuses et non pleines :



Ranger et Dorrepaal donnent comme valeur de la Traînée pour ce corps :

$$\mathbf{F = Vc\,\mu\,\left[6\alpha + 8\sin(\alpha) + \sin(2\alpha)\right]}$$

...**α** et **c** étant définis dans le schéma ci-dessus.

Pour la valeur **π/2** de **α** (à savoir l'hémisphère creux étudié à l'instant), cette Traînée est donc :

$$\mathbf{F = Vc\,\mu\,[3\pi + 8 + 0]}$$

Comme **c** est aussi le rayon frontal du corps (soit **D/2**) pour **α = π/2**, la Traînée est également :

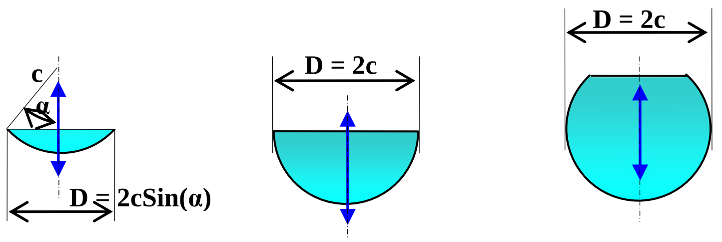
$$\mathbf{F = V(D/2)\,\mu\,[3\pi + 8]}$$

En référence à son diamètre **D**, le C_x linéaire de l'hémisphère creux est donc bien :

$$C_{xLin\ Réf\ D} = 0{,}5[3\pi + 8] = 8{,}7124$$

La valeur de la Traînée de la calotte sphérique quelconque donnée à l'instant mérite cependant d'être étudiée plus longuement.

Le diamètre frontal **D** de cette calotte quelconque vaut **2c sin(α)** pour **α ≤ π/2**, puis **2c** pour les valeurs supérieurs de **α** :



Le $\mathbf{C_x}$ linéaire de la calotte sphérique creuse, en référence à ce diamètre frontal **D** vaut donc, pour $\boldsymbol{\alpha \leq \pi/2}$:

$$C_{x\mathrm{Lin\ R\acute{e}f\ D}} = \frac{c\left[6\alpha + 8\sin(\alpha) + \sin(2\alpha)\right]}{2c\sin(\alpha)} = \frac{3\alpha + 4\sin(\alpha) + \frac{1}{2}\sin(2\alpha)}{\sin(\alpha)}$$

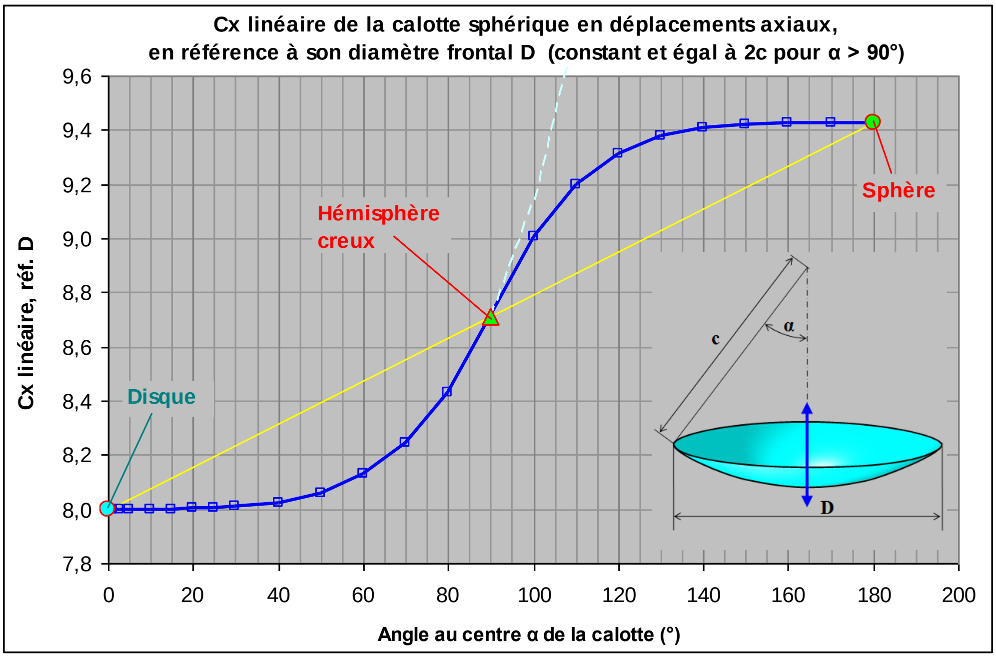
…ou, pour $\boldsymbol{\alpha \geq \pi/2}$:

$$C_{x\mathrm{Lin\ R\acute{e}f\ D}} = 3\alpha + 4\sin(\alpha) + \frac{1}{2}\sin(2\alpha)$$

Pour la valeur $\boldsymbol{\alpha = \pi}$, qui dessine une sphère complète (dont la concavité n'a plus d'ouverture) ce $\mathbf{C_x}$ linéaire prend bien la valeur $\mathbf{3\pi}$.

Par contre, pour les valeurs très faibles de $\boldsymbol{\alpha}$, pour lesquelles la calotte devient un disque, on trouve bien, comme $\mathbf{C_x}$ linéaire la valeur de **8**.

Pour les valeurs intermédiaires de $\boldsymbol{\alpha}$, le $\mathbf{C_x}$ linéaire de la calotte sphérique dessine la courbe bleu dense en **S** ci-dessous :



Cette courbe varie, en ordonnée, de **8** à $\mathbf{3\pi}$, ce qui est un variation faible.

Rappelons que pour déterminer ce $\mathbf{C_x}$ linéaire, nous avons pris comme référence le diamètre frontal **D** qui vaut **2cSin(α)** pour **α ≤ π/2** et **2c** pour les valeurs de **α ≥ π/2**. Cette longueur de référence est donc toujours le diamètre du maître-couple de la calotte et nous pensons que cette longueur a bien une signification physique (en plus d'être pratique d'usage).

Si par contre on désire conserver comme longueur de référence la valeur **2cSin(α)** pour toute la plage **0 < α < π**, (cette longueur de référence étant le diamètre de l'ouverture de la concavité), le $\mathbf{C_x}$ linéaire ainsi calculé dessine la courbe tiretée bleu clair : celle-ci voit ses ordonnées tendre vers l'infini quand **α** s'approche de **π**.

Au vu de la courbe bleu dense ci-dessus, on peut constater que le $\mathbf{C_x}$ linéaire de la calotte sphérique n'évolue presque pas pour la plage de demi-angle au centre **α** de **0** (le disque) à **40°** : tout se passe donc comme si l'augmentation de la concavité était sans action sur la Traînée (à diamètre frontal constant) [174].

De même, en dessous d'**α = π** (de **α = 140°** à **α = 180°**) tout se passe comme si l'ouverture de la cavité intérieure de la sphère pesait peu sur son $\mathbf{C_x}$ linéaire [175].

Autre curiosité qui vaut son pesant de liquide visqueux : le $\mathbf{C_x}$ linéaire de l'hémisphère creux vaut exactement la moyenne de celui du disque et de la sphère : ce fait est attesté par la droite jaune (qui passe par l'hémisphère creux).

De fait, la moyenne entre **8** et **3π** vaut bien **8,7124**.

Il nous semble que cette *curiosité* (qui a au moins des vertus mnémotechniques) n'a pas été relevée par les auteurs ayant travaillé sur ce type de corps, probablement du fait des entraves consécutives à leur choix de coefficient de Traînée.

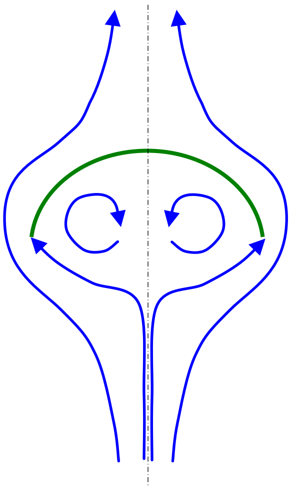
Attention au fait que nous parlons ici de l'hémisphère creux : la connaissance de son $\mathbf{C_x}$ linéaire ne nous renseigne pas particulièrement sur le $\mathbf{C_x}$ linéaire de l'hémisphère plein (que nous estimerons plus bas à **9,12**) par la méthode de la composition proportionnelle).

Ranger et Dorrepaal reviennent dans leur texte sur le fait que l'écoulement sur cette calotte sphérique de demi-angle au centre **α** quelconque (toujours en déplacement axial) montre une séparation (un décollement) dès que **α** est différent de **zéro** (donc dès que le corps n'est plus strictement un disque, cas où il n'y a pas de décollement).

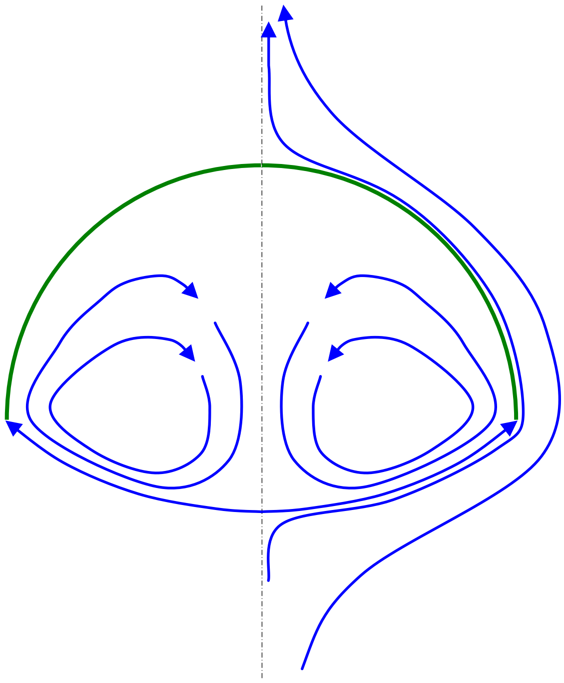
Le décollement dans la concavité de la calotte sphérique forme un tourbillon torique ; pour les **α < π/2** l'écoulement pourrait ressembler à cela (la calotte sphérique étant en vert) :

[174] Attention cependant au fait que les effets de l'augmentation de concavité sur les parties convexe et concave peuvent s'annuler tout ou partie…

[175] Attention également au fait que les effets de l'augmentation de concavité sur les parties convexe et concave peuvent s'annuler tout ou partie…



Quant à l'écoulement autour (et dans) l'hémisphère creux, il pourrait s'approcher de cela :



D'après Hasimoto 1979 (écoulement sur l'arc semi-circulaire)

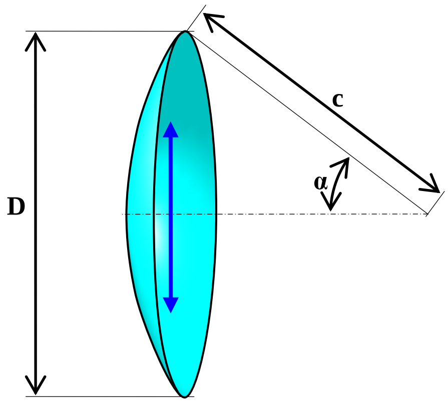
Puisque en régime de Stokes les écoulements sont réversibles, la cavité de la calotte sphérique en mouvement axial est toujours le siège d'un tourbillon torique, que cette calotte se déplace dans un sens ou dans l'autre.

Dans tous les cas, cette zone de recirculation est donnée par Ranger et Dorrepaal pour caréner le corps ; on peut cependant noter que la friction que les filets de cette recirculation opère sur la surface du corps tend à augmenter la Traînée de friction.

Signalons enfin que John R. L. Allen indique dans son ouvrage que la calotte sphérique est stable en régime de Stokes dans n'importe quelle orientation.

<u>Cx linéaire de la calotte sphérique en mouvements transverses :</u>

Dans leur texte, Ranger et Dorrepaal donnent également les caractéristiques de Traînée de la calotte sphérique en déplacement transverse.



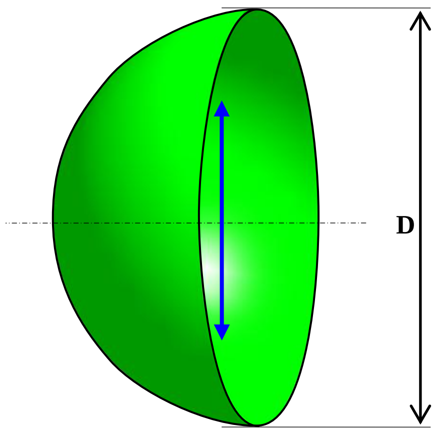
Quoique le système de normalisation de la Traînée adopté par ces auteurs soit le plus sibyllin que nous ayons eu à décrypter dans nos pérégrinations, on peut en tirer la valeur du $\mathbf{C_x}$ linéaire suivante :

$$\mathbf{C_{xLin\ Réf\ D}} = 3 + \frac{3\ \alpha}{\mathrm{Sin}(\alpha)} - \frac{\frac{4}{3}\mathrm{Sin}(\alpha)\ \mathrm{Cos}^4\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\alpha + \mathrm{Sin}(\alpha)}$$

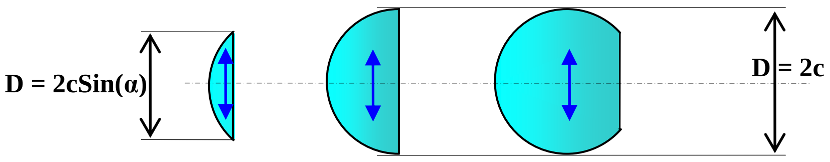
<u>Ce libellé est valide depuis **α = 0** jusqu'à **α = π /2**</u>.

De fait, lorsque **α** tend vers **0**, on note que ce $\mathbf{C_x}$ linéaire tend vers **16/3** qui est bien celui du disque en déplacement dans son propre plan.

Pour la valeur **α = π /2**, il vaut **7,5827** <u>qui est donc le $\mathbf{C_x}$ linéaire référence **D** de l'hémisphère creux</u> :



Afin de représenter l'évolution de ce $\mathbf{C_x}$ linéaire au-delà de cet angle **π/2**, nous avons pris la décision de conserver comme référence le diamètre **D** tel que défini précédemment, celui-ci ayant une réelle signification physique puisqu'il représente toujours la longueur du corps mesurée dans le sens du déplacement :

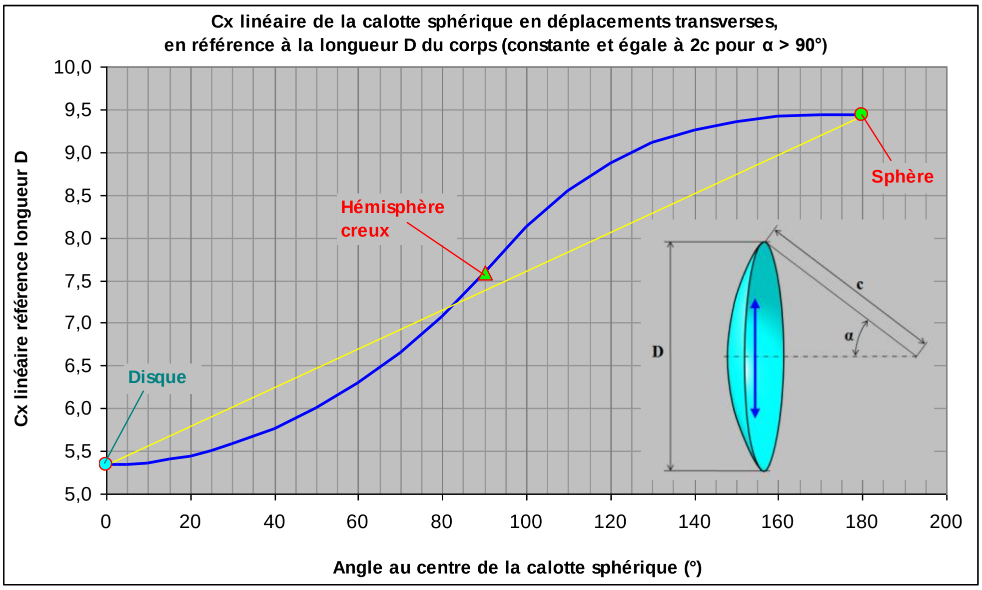


Ce choix de longueur de référence conduit à la valeur suivante :

$$C_{x\text{Lin Réf D}} = 3\ (\alpha + \text{Sin}(\alpha)) - \frac{\frac{4}{3}\text{Sin}(\alpha)\ \text{Cos}^4\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\alpha + \text{Sin}(\alpha)}$$

…qui est le C_x linéaire de la calotte sphérique d'angle $\boldsymbol{\alpha \geq \pi/2}$, en référence à son diamètre frontal **D**.

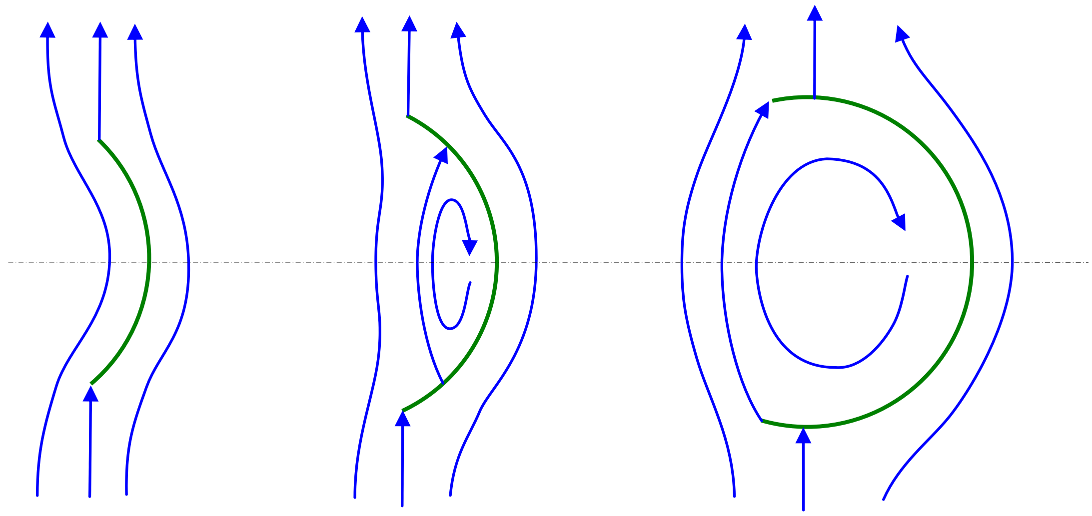
Ce C_x linéaire dessine la courbe bleu dense ci-dessous :



On peut noter que cette fois-ci, le C_x linéaire de l'hémisphère creux (**7,5827**) est **2,7 %** au-dessus de la moyenne de ceux du disque (**16/3**) et de la sphère (**3π**).

Dorrepaal a fait remarquer en 1976 que, dès que le demi-angle au centre de la calotte sphérique dépasse **60,90°** (ce qui approfondit la cavité), ladite cavité devient le siège d'un écoulement séparé (ou recirculation). Ranger et lui estiment que cet écoulement séparé carène le corps…

L'analogie avec l'écoulement 2D sur les arcs circulaires laisse à penser que les lignes de courant autour (et dans) la calotte sphérique en déplacement transverse pourrait s'approcher de cela (dans le plan de symétrie) :



D'après Dorrepaal, 1979 (écoulement transverse sur l'arc circulaire)

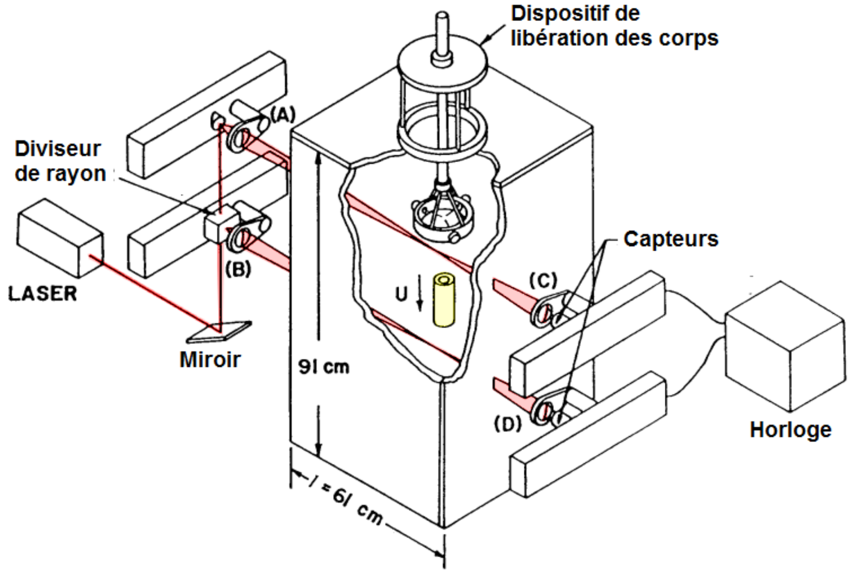
Noter que dans cet écoulement transverse, la zone de recirculation, lorsqu'elle existe, *n'emplit* pas forcément la concavité de la calotte. Dans un de ses textes datant de 1979, Dorrepaal indiquait que la recirculation prend naissance à **α = 60,90°** (nous l'avons dit) et emplit peu à peu la cavité de la calotte à mesure que **α** croît pour atteindre son arête à **α = 80,85°**.

Il est important de remarquer que, comme l'indiquent Ranger et Dorrepaal, la calotte sphérique en mouvement transverse est l'objet d'un moment qui tendra à modifier son orientation [176]. Les valeurs de $\mathbf{C_x}$ linéaire données ci-dessus risquent donc de rester théoriques tant qu'un dispositif de contrôle de l'incidence de la calotte sphérique n'est pas mis en œuvre.

C_x linéaire de corps hexapodiques dendritiques de Zakhem et coll. :

Dans leur texte, les chercheurs Zakhem, Weidman et de Groh III livrent les résultats qu'ils ont tirés de l'utilisation d'un dispositif de décantation en régime de Stokes déjà existant (et décrit par Lasso & Weidman). La section de la cuve de ce dispositif est un carré de **0,61 m** et sa hauteur **0,91 m** ; la décantation des objets est mesurée sur une hauteur de ~**30 cm** par interception de deux rayons laser :

[176] Ce moment est cependant nul dans le cas du disque et de la sphère.



Dispositif expérimental

Image tirée (puis francisée) de OFF-AXIS DRAG OF DENDRITE FRAGMENTS AT LOW REYNOLDS NUMBER, P. D. Weidman, NASA Contract NCC3-272

Cette grande cuve fut conçue pour mesurer la décantation de corps de dimensions centimétriques susceptibles d'être usinés par des machines. Effectivement, les 34 corps testés par Zakhem et coll. mesurent de **2** à **5 centimètres** dans leur plus grande dimension…

Zakhem et coll. écrivent s'être « concentrés sur la décantation de corps parallèlement à leur axe de symétrie. » S'agissant de corps triaxiaux, comme nous le montrerons à l'instant, ils auraient d'ailleurs plutôt dû écrire « l'un de leurs axes de symétrie ».

Dans leurs remarques préliminaires, les mêmes auteurs précisent, à propos de la Traînée de la sphère :

« Donc un coefficient de traînée approprié est obtenu par normalisation de la traînée par **µ RV** [**R** étant le rayon de la sphère] et non par une Pression Dynamique proportionnelle à la Masse Volumique comme pour les écoulement à hauts Nombres de Reynolds. »

Sans qu'il soit besoin d'entrer dans la définition de ce *coefficient de traînée approprié* (nous le ferons à la fin de notre exploitation de ce texte), les valeurs numériques données dans trois tableaux de ce texte [177] nous ont donné accès assez simplement au C_x linéaire des corps testés.

Nous ne nous sommes intéressé, pour notre texte déjà fort long, qu'à certains de ces corps *dendritiques* [178], comme ce corps que, faute de mieux, nous avons nommé (sur le modèle du mot *tétrapode* et du corps qu'il caractérise) *hexapode régulier* :

[177] Certaines erreurs dans les tableaux de valeurs de la publication de la NACA compliquent légèrement l'exploitation que l'on peut en faire. Une précédente publication par Selcuk Guceri, disponible dans Google Books au lien :
https://books.google.fr/books?id=hBHY94QRTdkC&printsec=frontcover&hl=fr#v=onepage&q&f=false
…p 219 à 228, comportait beaucoup plus d'erreurs de transcription…

[178] « *Dendron* », signifie « *arbre* », en latin.

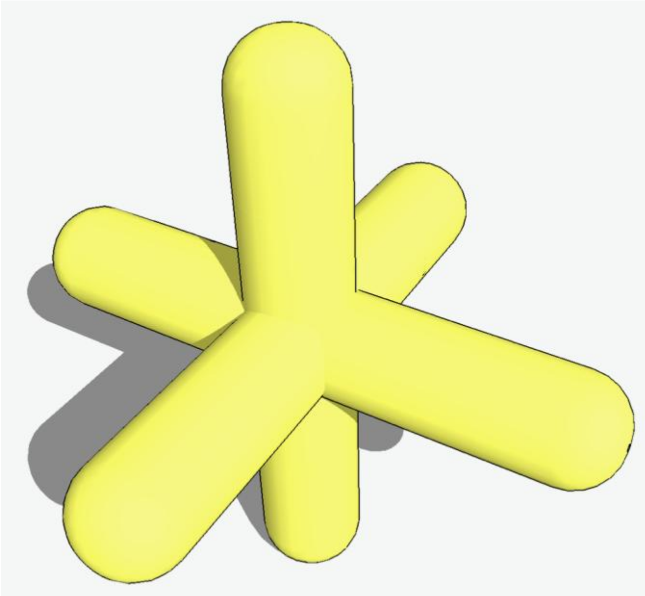


image Starcheuch

Dans leur texte, Zakhem et coll. comparent, comme beaucoup d'autres, la vitesse de décantation (et donc la Traînée de chacun de leurs corps) à celle(s) d'une sphère équivalente de même masse et de même volume.

Ils notent :

« […] en d'autres mots, cette sphère [équivalente] est la sphère qu'on formerait en chauffant la matière de chaque corps et en la moulant sous forme de sphère. »

Comme et le corps testé et la sphère ont le même poids efficient [179], ils ont la même Traînée. Ce qui permet aux auteurs d'écrire :

Traînée de la sphère équivalente = Traînée du corps = $6\pi\mu a_r V_r$

…équations où μ est la viscosité dynamique, a_r est le rayon de la sphère équivalente, et V_r sa vitesse de décantation stabilisée.

On le sait, pour nous la Traînée du corps vaut $C_{xLin\ réf.L}\ L\ \mu V_c$, équation où **L** est une longueur caractéristique du corps, μ la viscosité du fluide et V_c la vitesse de décantation stabilisée du corps, on peut écrire :

Traînée du corps = $6\pi\mu a_r V_r = C_{xLin\ réf.L}\ L\ \mu V_c$

…d'où l'on peut tirer :

$$C_{xLin\ réf.L}\ \frac{6\pi\ a_r}{L\dfrac{V_c}{V_r}}$$

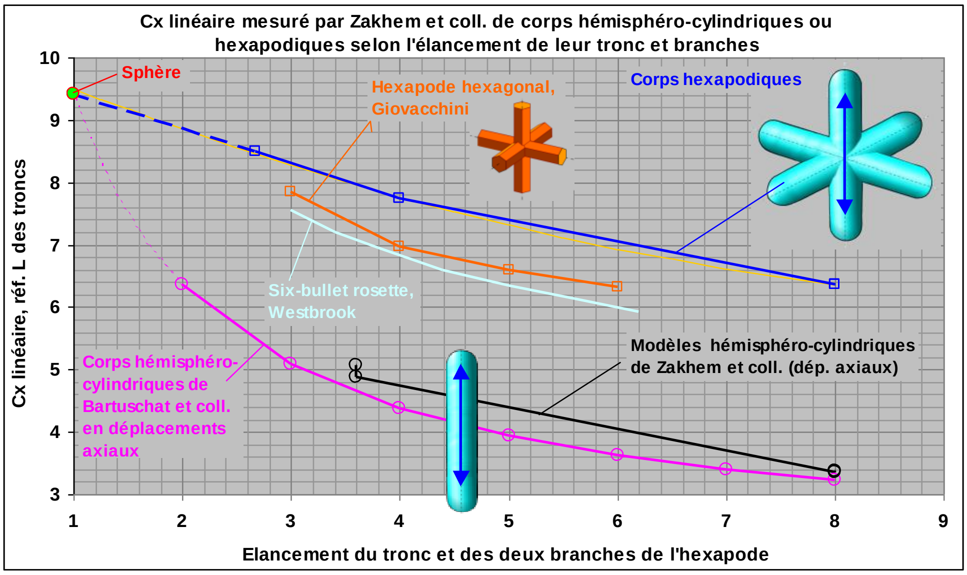
…équation où a_r est le rayon de la sphère équivalente, **L** est, par exemple, la longueur du corps prise comme référence, et V_c/V_r le quotient de la vitesse de

[179] Le poids efficient est le poids du corps diminué de sa poussée d'Archimède dans l'huile utilisée. Ce poids efficient est la seule force motrice dans le mouvement du corps. Il est donc égal à la Traînée.

décantation du corps sur celle de la sphère équivalente (de même poids efficient et de même volume que le corps considéré).

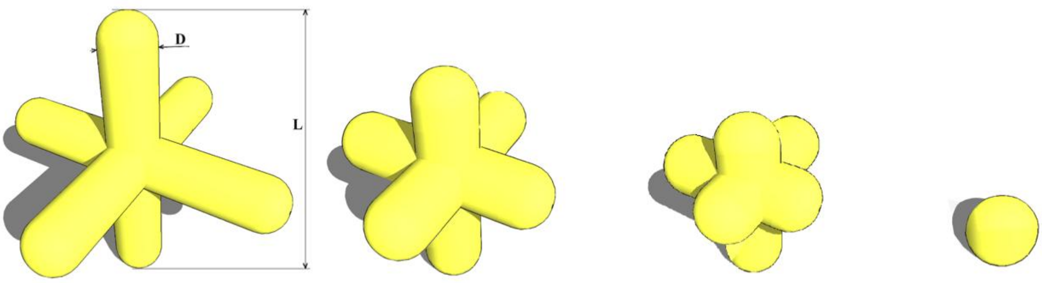
Étant donné que Zakhem et coll. donnent pour chaque corps ses dimensions, la valeur de $\mathbf{a_r}$ ainsi que celle du quotient $\mathbf{V_c/V_r}$, nous n'avons eu aucune difficulté à en déduire les $\mathbf{C_x}$ linéaires.

Voici, par exemple, la comparaison (courbe bleu dense) entre le $\mathbf{C_x}$ linéaire d'hexapodes réguliers (tels que celui déjà montré, formés par le croisement de trois corps hémisphéro-cylindriques égaux) décantant selon un de leurs axes de symétrie et le $\mathbf{C_x}$ linéaire d'un seul corps hémisphéro-cylindrique décantant axialement (en noir) :

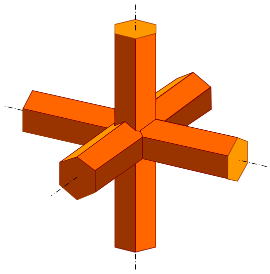


L'élancement utilisé ici est celui du corps axial (vertical) de l'hexapode régulier (que l'on peut voir comme le tronc) ou celui du corps hémisphéro-cylindrique.

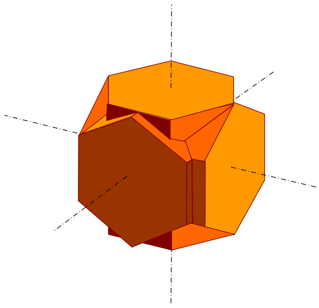
La courbe bleu dense représente donc la variation de $\mathbf{C_x}$ linéaire de corps hexapodiques <u>réguliers</u> dont l'élancement **L/D** du tronc varie (par variation de la longueur **L** seule, **D** restant constant) jusqu'à former une sphère :



La courbe orange représente les résultats des calculs de Giovacchini (méthode Lattice Boltzmann) pour l'hexapode régulier suivant :



Ce corps est formé de six bras de section hexagonale. Lorsque la longueur de ces bras diminue, il tend, à l'élancement unitaire, à ressembler à ce corps :



…corps dont le $\mathbf{C_x}$ linéaire (en référence **L**) doit être un peu plus fort que celui de la sphère et proche, si l'on préfère, de celui du cuboctaèdre (on note effectivement, sur notre graphe, que la courbe orange vise, vers la gauche, une région proche de la sphère).

Il faut noter à propos de cet hexapode régulier de Giovacchini, que son texte ne mentionne pas l'orientation avec laquelle ce cristal décante. On peut cependant penser que les calculs ont été effectués avec un *tronc* vertical et les deux *branches* horizontales.

Il se pourrait d'ailleurs que les nombreuses symétries de l'hexapode régulier en fassent un corps doté d'isotropie sphérique (comme la sphère, le cube et d'autres corps), c.-à-d. capable de décanter avec la même Traînée dans toutes les orientations.

Toujours sur notre graphe, la courbe bleu clair les résultats de Westbrook pour un hexapode un peu différent au point de fusion de ses six bras (cité par Giovacchini).

Ces deux dernières courbes sont bien dans le même ordre de grandeur mais on s'attendait à ce que l'hexapode de Giovacchini présente un $\mathbf{C_x}$ linéaire plus fort que celui de Zakhem et coll. (par absence de carénage de ses extrémités).

Au demeurant, nous sommes rentré en contact avec Juan P. Giovacchini qui nous a confié que les valeurs trouvées par lui pour cet hexapode hexagonal n'était qu'indicatives (bien qu'étant dans le bon ordre de grandeur) [180]. De fait, il semble avoir retiré le fichier d'origine pour le remplacer par un autre, au même lien, ne traitant plus que des colonnes hexagonales.

En fuchsia sur le dernier graphe, nous avons fait dessiner à notre tableur le $\mathbf{C_x}$ linéaire des corps hémisphéro-cylindriques de Bartuschat et coll. (en mouvements axiaux également). La comparaison des mesures de Zakhem et coll. avec les résultats de Bartuschat et coll. est ici assez favorable (les valeurs de Bartuschat et coll. ayant été déterminées par la méthode *lattice Boltzmann 3D*).

[180] "I suggest not to consider these numerical results which are correct in the order of magnitude but not accurate [specially in the policrystal velocity sedimentation]."

Le lecteur aura noté que nous avons prolongé la courbe bleu dense vers la sphère : ainsi que le montre l'illustration ci-dessus, l'hexapode régulier devient en effet une sphère lorsque l'élancement de chacune de ses branches ou tronc tend vers l'unité. La prolongation de la courbe bleu dense vers la sphère laisse d'ailleurs à penser qu'elle se trouve un peu haute, comme d'ailleurs la courbe noire par rapport à la fuchsia…

Notre tableur nous a soufflé une régression parabolique pour la courbe bleu dense :

$$\mathbf{C_{xLin\ Réf.L} = 0{,}033\ \lambda^2 - 0{,}745\ \lambda + 10{,}22}$$

…λ étant l'élancement de chacun des corps hémisphéro-cylindrique formant le corps hexapodique.

Cette régression dessine la courbe jaune qui chemine derrière la courbe bleu dense. Elle manque (de peu) le **C_x** linéaire de la sphère ; c'est d'ailleurs sans importance s'agissant d'une régression de première intention…

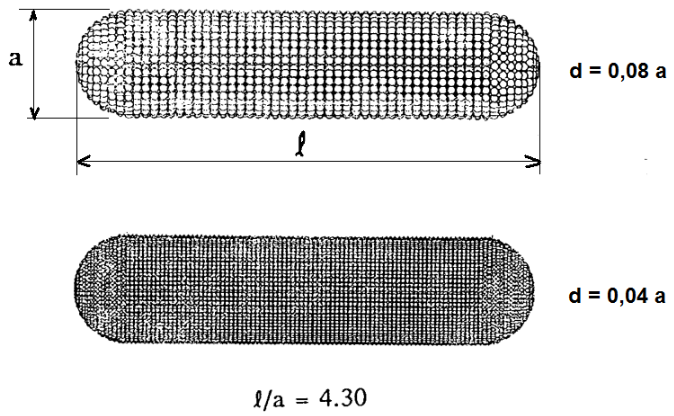
Dans un texte ultérieur, Weidman (l'un des coauteurs de Zakhem) a de nouveau mesuré la chute (entre autres) de corps hémisphéro-cylindriques. Il fait remarquer que ces corps (qu'il appelle *capsules* parce qu'ils ressemblent aux capsules médicamenteuses) ne sont dynamiquement stable que lors de leur chute en position verticale [181]. Il note par contre que bien que la décantation en position horizontale se maintienne, si on écarte un corps hémisphéro-cylindrique de cette position horizontale il rejoint lentement une position verticale.

Dans le même texte Weidman donnent d'autres valeurs du **C_x** linéaire des corps hémisphéro-cylindriques, calculées par la méthode numérique des *Perles tressées* [182].

Notes sur la méthode numérique des *Perles tressées* :

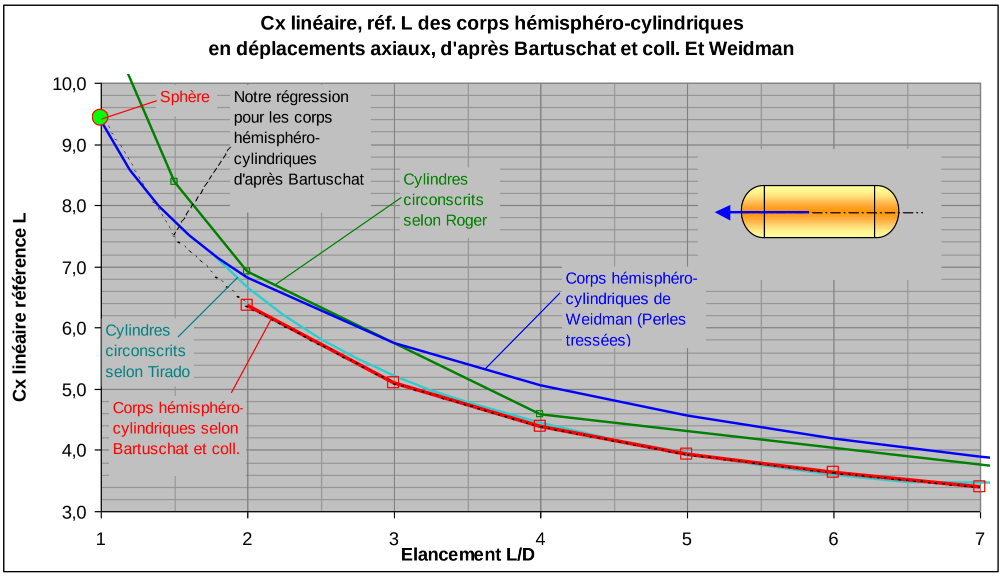
Cette méthode numérique consiste à composer la surface d'un corps à étudier avec un nombre de sphères si important que, pour l'écoulement, cet assemblage de sphères a les mêmes propriétés de Traînée que le corps à étudier. Voici deux exemples de corps hémisphéro-cylindrique d'élancement $\boldsymbol{\ell/a = 4{,}30}$, reconstitués par Weidman avec des sphères de diamètre $\mathbf{d = 0{,}08\ a}$ et **0,04 a** (**a** étant le diamètre du corps)

[181] …ce qui signifie que si on les écarte de la position verticale ils ont tendance à y revenir.
[182] …en anglais “beads-on-a-shell numerical method”



On peut concevoir assez facilement qu'en augmentant à l'infini le nombre de sphères (donc en faisant tendre leur diamètre vers zéro), on peut obtenir des résultats satisfaisant de tels calculs (de fait le premier scrupule des chercheurs est de valider cette méthode sur la sphère).

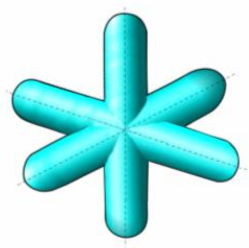
Quoiqu'il en soit de l'intérêt de cette méthode, il s'avère que les résultats obtenus par Weidman sont sensiblement plus fort (c'est la courbe bleu dense ci-dessous) que ceux de Bartuschat et Zakhem :



Nous ne savons que penser de ces résultats (qui s'inscrivent en faux par rapport aux cylindres de Roger (également calculés par cette méthode des *Perles tressées*).

<u>Estimation d'un corps composite en hexapode d'après la Traînée de ses composants :</u>

Au vu des apports de Zakhem et de Bartuschat, il vient à l'idée d'effectuer la comparaison du $\mathbf{C_x}$ linéaire d'un corps hexapodique (comme l'hexapode triaxial de Zakhem) :

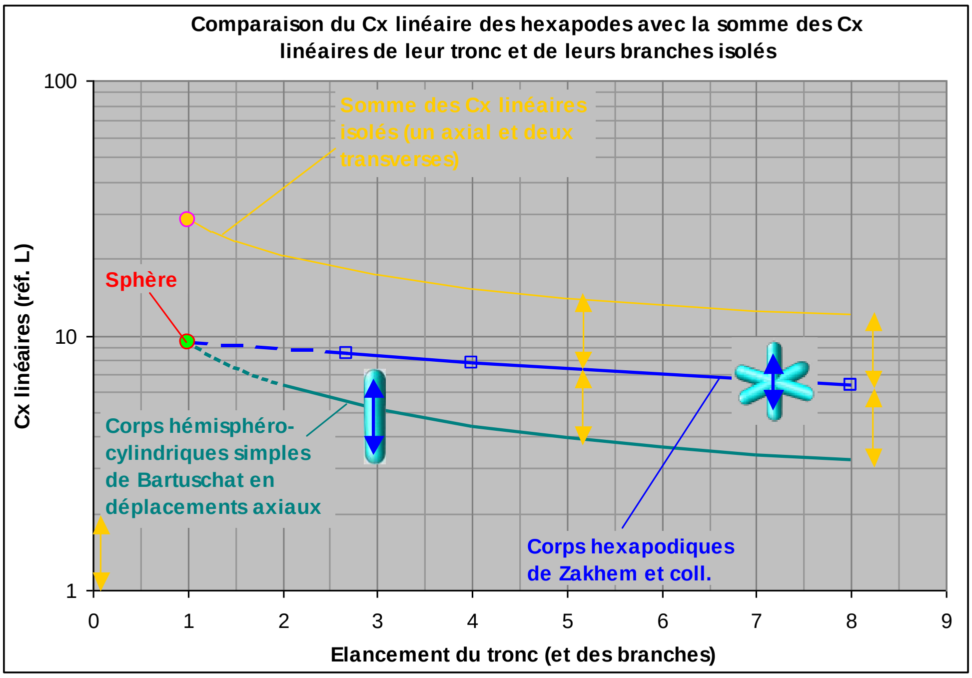


…avec la somme des $\mathbf{C_x}$ linéaires de ses composants <u>isolés</u>.

La somme desdits $\mathbf{C_x}$ linéaires va être celui du tronc (vertical), en déplacement axial isolé, augmenté du double du $\mathbf{C_x}$ linéaire d'une branche isolée en déplacement transverse. Par chance, nous avons établi plus haut, ici et là, des régressions (d'après Bartuschat) donnant ces $\mathbf{C_x}$ linéaires en fonction de leur élancement des corps hémisphéro-cylindrique que sont le tronc et les branches.

Cependant, en opérant de la sorte, nous allons tomber sur le problème que, pour l'élancement unitaire, le tronc va apporter le $\mathbf{C_x}$ d'une sphère alors que chaque branche fait de même.

C'est ce qui se voit sur le graphe suivant, où tous les $\mathbf{C_x}$ linéaire sont donnés en référence à la longueur **L** des corps :



Sur ce graphe, la *vraie* courbe du $\mathbf{C_x}$ linéaire de l'hexapode (selon son élancement) est en bleu dense (d'après les expériences de Zakhem et coll.). En jaune est la somme du $\mathbf{C_x}$ linéaires du tronc (en déplacement axial) et de deux fois le $\mathbf{C_x}$ linéaire transverse d'une branche, tronc et branches étant alors pris comme isolés.

S'agissant de cette courbe jaune, on observe bien le problème mentionné à l'instant : pour l'élancement **1** du tronc et des branches, cette somme du $\mathbf{C_x}$ des composants vaut à très peu près $\mathbf{9\pi}$, soit trois fois le $\mathbf{C_x}$ linéaire de la sphère (relativement à son diamètre qui est alors la longueur du corps).

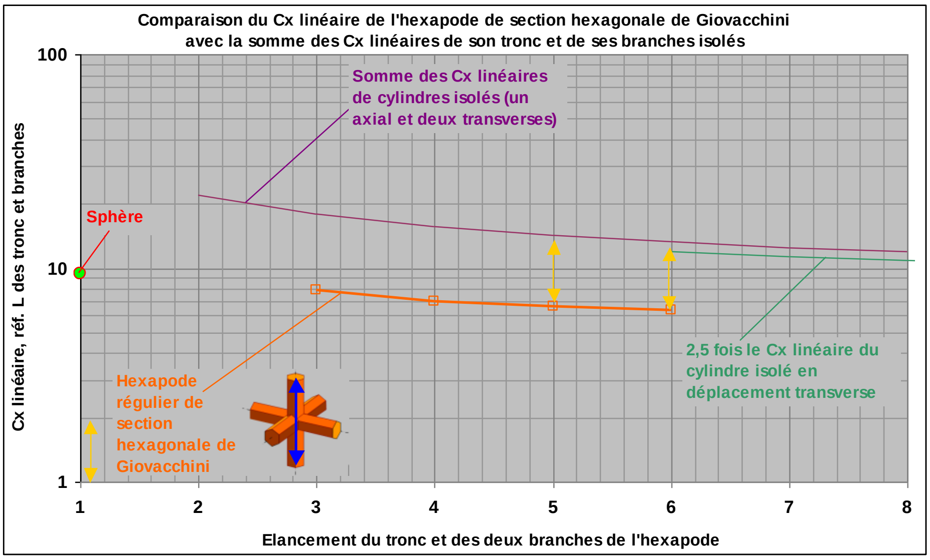
En tout état de cause, pourtant, ce graphe nous donne un renseignement intéressant : il s'avère que pour les élancements d'hexapodes supérieurs à **5**, le $\mathbf{C_x}$ linéaire de l'hexapode régulier (en référence à sa longueur **L**) vaut à très peu près la moitié de la somme (courbe jaune) de ceux de son tronc (en déplacement axial) et de ses branches (en déplacement transverse), tronc et branches étant considérés comme isolés : c'est la raison d'être des flèches jaunes dont le module est **2**.

De même, et ce n'est pas rien, le $\mathbf{C_x}$ linéaire de l'hexapode régulier d'élancement supérieur à **5** vaut à peu près le double de celui du corps hémisphéro-cylindrique en déplacement axial.

Ces renseignements pourraient être utile, en première approche, lors de la fabrication d'un corps composite hexapodique à partir de bâtonnets, par exemple, ou même d'ellipsoïdes [183] (nous apportons une nuance favorable un peu plus bas à ce constat).

Nous avons effectué la même comparaison du $\mathbf{C_x}$ linéaire de l'hexapode régulier de Giovacchini (cité plus haut en comparaison avec celui de Zakhem et coll.) avec celui de cylindres courts en déplacement axiaux et transverses (en partant du fait que le $\mathbf{C_x}$ linéaire des colonnes de section hexagonale sont souvent assimilées à celui des cylindres).

Voilà ce que donne cette comparaison :



(la courbe couleur prune est fondée sur les régressions du $\mathbf{C_x}$ linéaire de cylindres courts, d'après Ui et Roger)

On retrouve bien, en ordre de grandeur, le même rapport **2** entre les ordonnées des deux courbes.

<u>De plus, on peut apporter une nuance favorable à ces constats</u> : En toute logique, les diverses interférences entre les éléments constitutifs de ces hexapodes (branches et tronc) s'atténuant avec la distance, le $\mathbf{C_x}$ linéaire des hexapode de grand élancement doit s'approcher de **2,5 fois** le $\mathbf{C_x}$ de la colonne hexagonale horizontale (si l'on considère que les colonnes hexagonales d'élancement infini en déplacements axiaux présentent un $\mathbf{C_x}$ linéaire moitié de celui des colonnes hexagonales en déplacements transverses).

On peut donc penser que, pour les très forts élancements, la courbe prune ci-dessus et la courbe bleu dense dans le graphe précédent s'approche lentement de la courbe dessinant **2,5 fois** le $\mathbf{C_x}$ linéaire du cylindre transverse [184] : cette courbe est la courbe verte ci-dessus [185].

---

[183] Étant donné que les interférences entre les trois corps se font surtout dans la zone centrale (où leur proximité est la plus forte), on peut, en première approche, penser que la forme de leurs extrémités est moins soumise aux interférences.

[184] Nous prenons ici le $\mathbf{C_x}$ linéaire de la colonne hexagonale infinie comme celui du cylindre.

[185] Elle est tracée ici pour les faibles élancements puisque Roger n'a pas donné des valeurs de traînée pour le cylindre infini. Prendre le $\mathbf{C_x}$ linéaire du cylindre transverse proposé par la Théorie des Corps Élancés (cité plus haut) dessine une courbe **3%** plus haute…

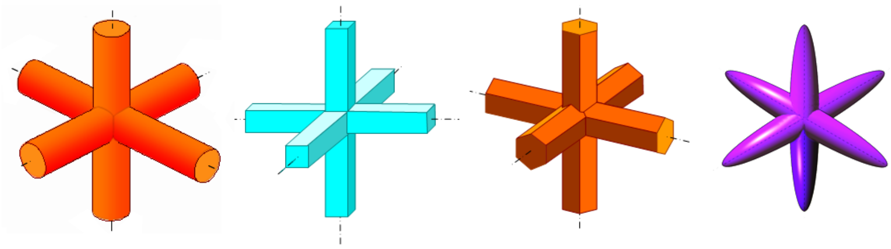
Cette courbe verte est très proche de la courbe prune ; à notre sens, cependant, cette proximité doit être prise comme un hasard.

Quoiqu'il en soit, la réflexion ci-dessus (celle qui prédit un C_x linéaire de **2,5 fois etc.** aux très forts élancements) donne plutôt du crédit à notre constat des **2 fois etc.** aux faibles élancements…

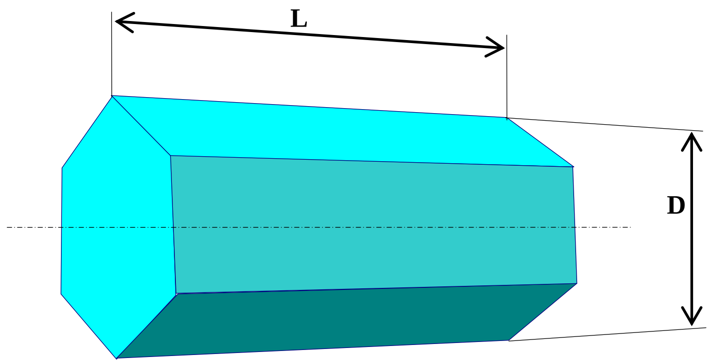
Il est pourtant difficile de deviner à partir de quel élancement *libératoire* les six extrémités de ces hexapodes pourront être considérées comme exemptes d'interférences entre elles et avec leur partie centrale [186]…

L'ingénieur pragmatique utilisera donc prudemment, dans une plage d'élancement raisonnable, le parallélisme entre les couples de courbes susnommées.

Mais on peut aussi élargir le domaine d'application de ce constat : c'est que cette règle empirique et grossière de composition des C_x linéaires doit pouvoir donner une première estimation du C_x linéaire de corps hexapodiques formés à partir de trois corps simples croisés comme trois cylindres circulaires ou trois prismes à base carrée ou hexagonale (cas que nous avons déjà évoqué). De même cette règle doit fonctionner pour des corps qui ne soient pas des cylindres ou des prismes, comme les ellipsoïdes ou peut-être même les bicônes, l'ensemble de ces corps simples étant bien-sûr d'élancements assez forts :



Colonnes hexagonales de Giovacchini :



Juan Pablo Giovacchini, chercheur argentin, a calculé par la méthode Lattice Boltzmann, la traînée naissant du mouvement de colonnes de section hexagonale en régime de Stokes.

Une telle recherche est essentielle en météorologie puisque, à notre connaissance, il n'existe pas de valeur de traînée pour de tels corps hexagonaux qui interviennent pourtant beaucoup en météorologie (sous la forme de *météores aqueux*

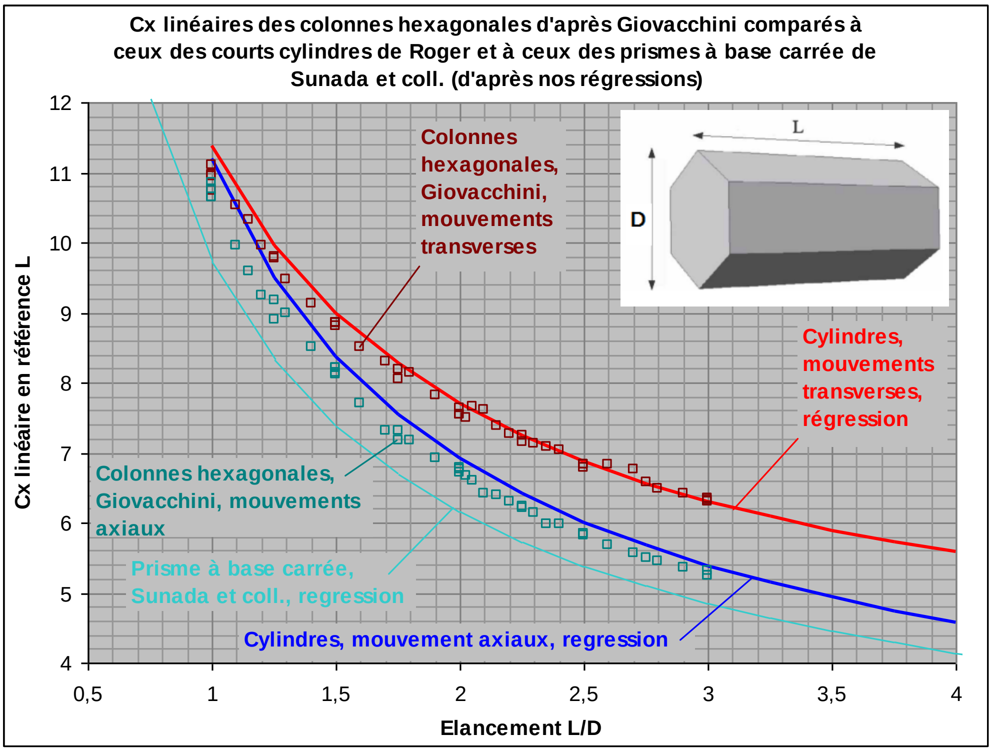
---

[186] Ce qui ne veut pas dire qu'à cet élancement *libératoire* l'écart de **2,5 fois** sera observé ; cela veut juste dire, qu'à partir de cet élancement, la courbe du C_x de l'hexapode sera de type hyperbolique (tendant hyperboliquement vers l'écart **2,5 fois**), ainsi que nous l'avons déjà observé à propos de l'influence des extrémités des corps sur leur C_x…

solides, c.-à-d. de cristaux de glace)(voir la partie de notre texte consacrée aux parhélies et donc à ces cristaux).

Pour ce qui est de leur comportement, lesdites colonnes hexagonales sont réputées, par les météorologues, être très proches des cylindres circulaires de même élancement **L/D**.

De fait, Giovacchini a obtenu les résultats suivants (marques carrées brunes ou bleu glauque selon la direction du mouvement) :



En rouge et en bleu dense, sur ce graphe, sont nos régressions pour les $\mathbf{C_x}$ linéaires des cylindres de Roger.

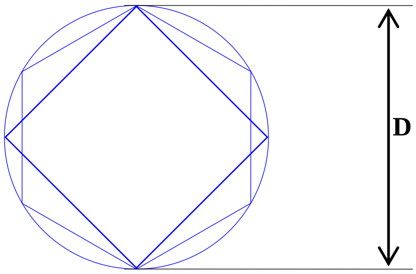
On remarque sur ce graphe que les marques brunes (mouvements transverses) semblent se rapprocher de la courbe rouge des cylindres : y-a-t-il croisement des deux courbes autour de l'élancement **3** ?

On remarque aussi que les marques bleu glauque (mouvements axiaux) semblent garder leur distance avec le cylindre pour les élancements les plus forts.

Sur le même graphe, nous avons également fait dessiner en bleu clair à notre tableur la régression tirée des travaux de Sunada et coll. sur les prismes à base carrée en mouvements axiaux. Il convient cependant d'ouvrir ici une parenthèse importante :

Quelles abscisses avons-nous utilisées pour cette courbe bleu clair ?

À notre sens, pour obtenir la meilleure comparaison entre les colonnes hexagonales, les cylindres circulaires et les prismes à base carrée, il convient de caractériser tous ces corps par un élancement **L/D** où **D** sera pris comme la cote entre sommets opposés :



Le cylindre circulaire pouvant être considéré comme un prisme régulier dont la base serait un polygone régulier à très grand nombre de côtés, cette définition de **D** lui convient encore.

Il faut évidemment noter que cette définition de **D** modifie d'un facteur $\sqrt{2}$ l'élancement plus généralement admis pour le prisme à base carrée (où **D** est pris comme la cote sur plat).

L'observation du graphe précédent apporte la satisfaction que, pour les déplacements axiaux, l'ensemble des trois types de corps (cylindres, colonnes hexagonales et prismes à base carrée) présentent un grand parallélisme dans leur comportement.

D'autres part, la même observation fait obligatoirement germer une idée à l'ingénieur pragmatique :

Puisque, pour les mouvements transverses dans cette plage d'élancements de **1** à **3**, on connaît le C_x linéaire des prismes à **4**, **6** et **20** côtés égaux (nous considèrerons à partir d'ici le cylindre circulaire comme un prisme droit régulier à **20** facettes [187]), on peut sans grand risque prédire, par exemple, que :

→ les C_x linéaires des prismes de **5** côtés se tiendront entre les C_x des prismes à **4** et à **6 côtés** ;

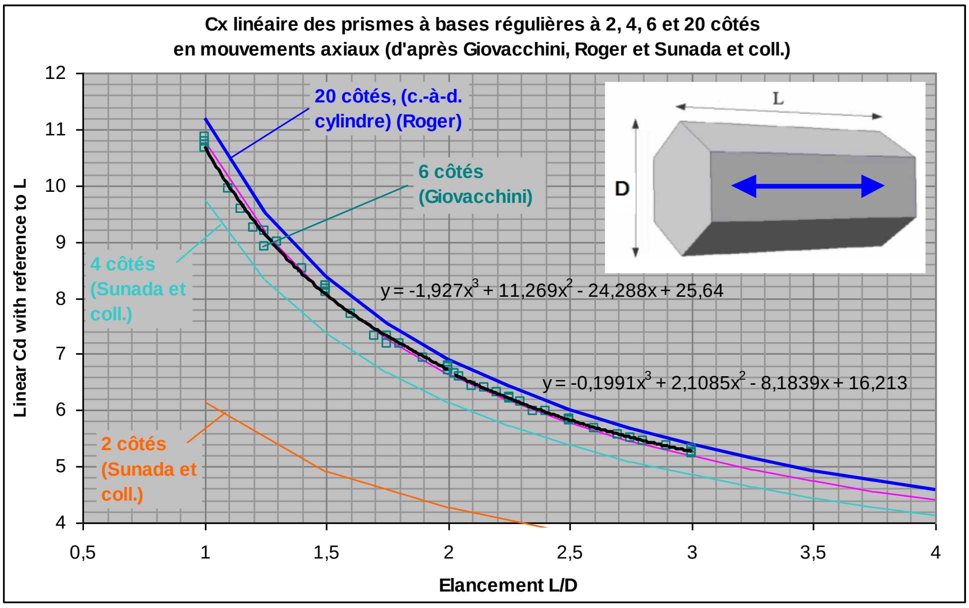
→et que les C_x linéaires des prismes à **8** côtés se tiendront entre les C_x des prismes à **6** et à **20** côtés.

Il vient alors à l'esprit que la plaque rectangulaire mince décantant de façon coplanaire (étudiée par Sunada et coll.) pourrait bien être considérée comme un prisme droit dont la base serait un polygone régulier à deux côtés !

Ce prisme particulier dessine sa courbe de C_x en-dessous de celle des prismes à base carrée, comme on le voit ci-dessous (en orange) :

---

[187] L'expérience démontre que si l'on remplace ce nombre de facettes par **100**, tout le calcul qui suit est peu modifié.



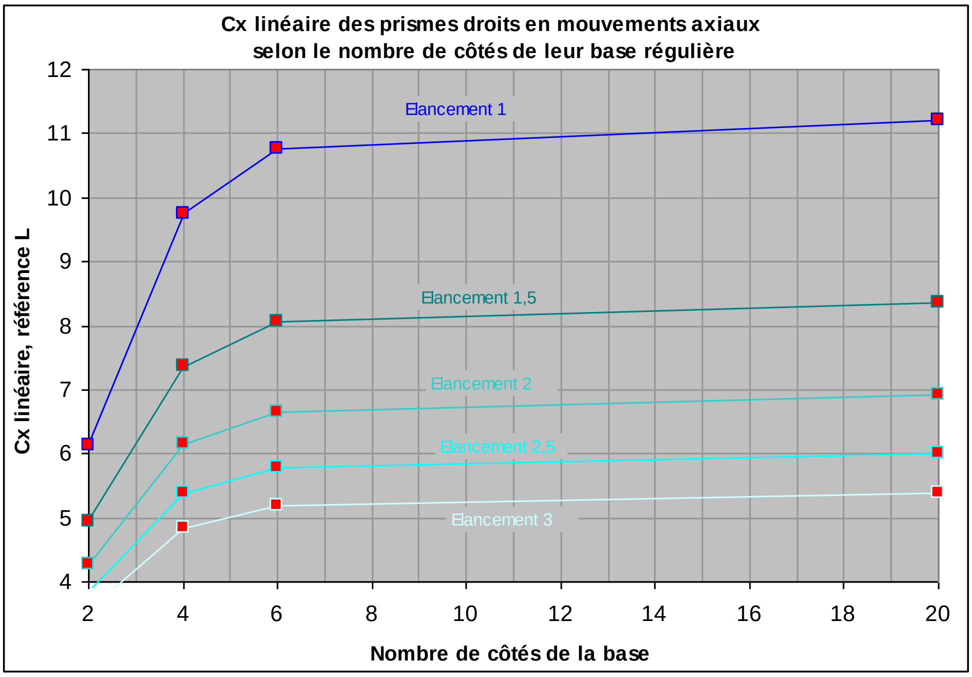
Nous avons isolé ci-dessus le $\mathbf{C_x}$ des prismes droits à base comportant **2**, **4, 6** et **20** côtés égaux (c.-à-d. le cylindre pour cette dernier nombre) <u>en mouvements axiaux</u>.

Les marques en bleu glauque obtenues par Giovacchini peuvent être représentées assez fidèlement par deux régressions cubiques noires dont les équations sont indiquées sur le graphe [188].

Pour simplifier, nous avons cependant résumé ces mêmes marques de Giovacchini à une courbe reprenant **96,2 %** de la valeurs des ordonnées de la courbe bleu dense du cylindre (courbe fuchsia).

Une façon plus efficace de représenter les mêmes choses est de dessiner les courbes d'évolution du $\mathbf{C_x}$ linéaire des prismes pour chaque élancement selon le nombre de leurs côtés :

[188] L'équation unique $\mathbf{-0{,}69x^3 +5{,}47x^2 -15{,}62x +21{,}48}$ donne aussi des résultats acceptables entre les élancements **1** et **3**. Bien sûr, comme toutes les régressions polynomiales, elle donne des coups de fouet en dehors du domaine prescrit.

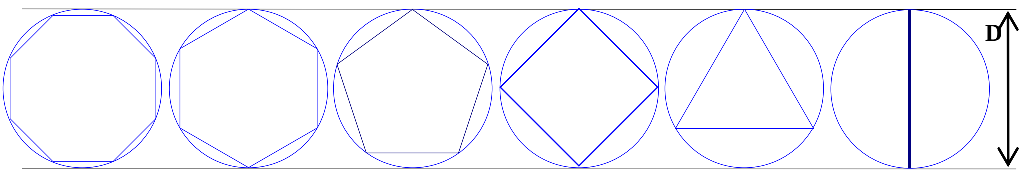


Entre toutes ces marques à cœur rouge (qui représentent des valeurs connues, donc les « points durs »), nous allons placer manuellement d'autres marques (estimées, celles-là) qui pronostiqueront le $\mathbf{C_x}$ des prismes de **3**, **5** et **8** côtés.

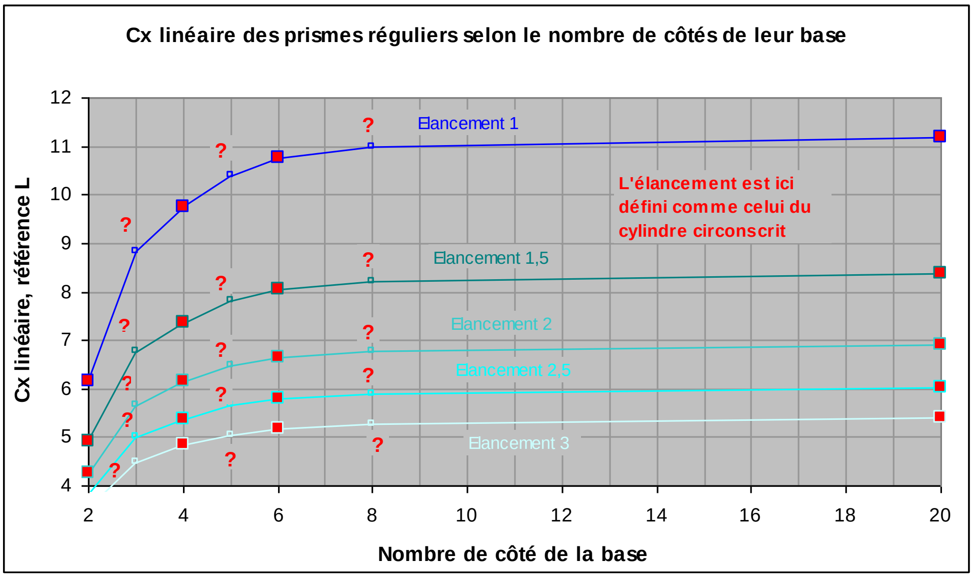
Mais au fait : Quelle définition avons-nous choisie sur le graphe ci-dessus pour la côte **D** de l'élancement **L/D** ?

La définition « cote prise entre sommets » adoptée plus haut ne pouvant convenir pour des prismes dont la base comporte un nombre de côtés impair (ou difficilement pour le prisme dont la base possède **2** côtés), nous avons adopté comme définition de l'élancement pour tous ces corps l'élancement du cylindre circonscrit (ce qui ne modifie pas l'élancement précédemment calculé pour les prismes à **6** et **4** côtés).

Voici les bases de tous nos prismes représentées dans leur cercle circonscrit de diamètre **D** :



Et voici à présent les courbes du dernier graphe augmentées des nouvelles marques aux élancements **3**, **5** et **8** :



Les points durs (connus ou considérés comme tels) ont toujours un cœur rouge ; les nouveaux points, imposés manuellement, sont repérés par un point d'interrogation rouge.

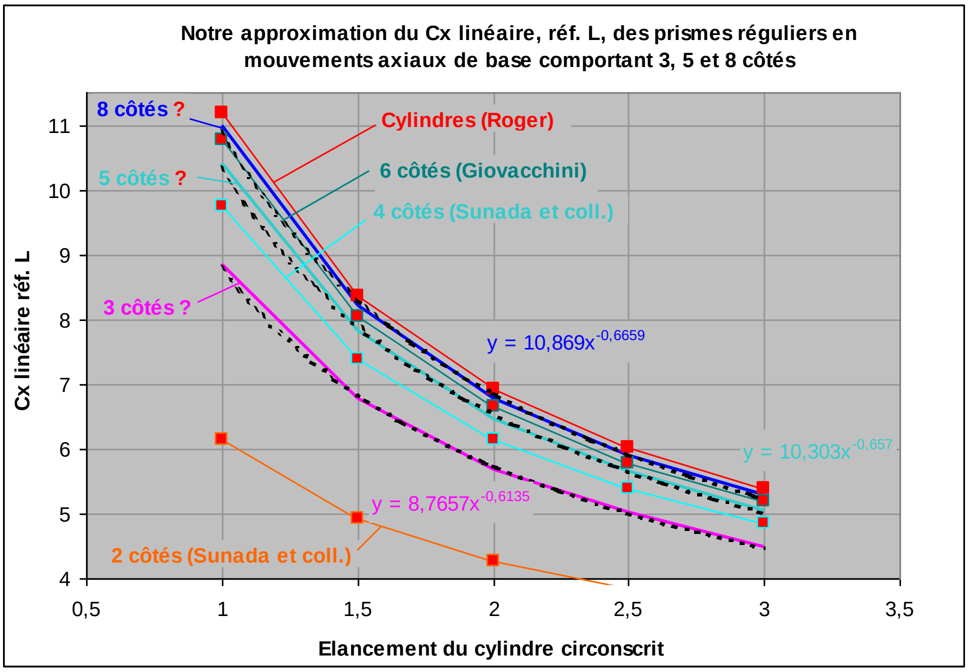
Comme on peut en juger, l'ajout de ces points nouveaux laisse place à assez peu d'interprétation.

Pour mémoire, nous avons ici pris les C_x des prismes à **8** côtés comme la moyenne arithmétique entre ceux à **6** côtés et ceux du cylindre (ou du prisme à **20** côtés).

À gauche, la référence aux prismes dont la base possède **2** côtés est satisfaisante bien qu'elle n'apporte pas grand-chose. Ce prisme à **2** côtés est d'ailleurs celui qui s'éloigne le plus des autres par ses formes et son absence de faces d'extrémités… [189]

Le graphe précédent étant tracé, il est aisé d'en déduire l'évolution du C_x linéaire des prismes droit à base régulière de **3**, **5** et **8** côtés en fonction de leur élancement (défini, rappelons-le, comme celui de leur cylindre circonscrit) :

[189] Il est amusant de constater que le prisme à **0** côté, dont le C_x linéaire est nul, prolonge correctement les courbes.



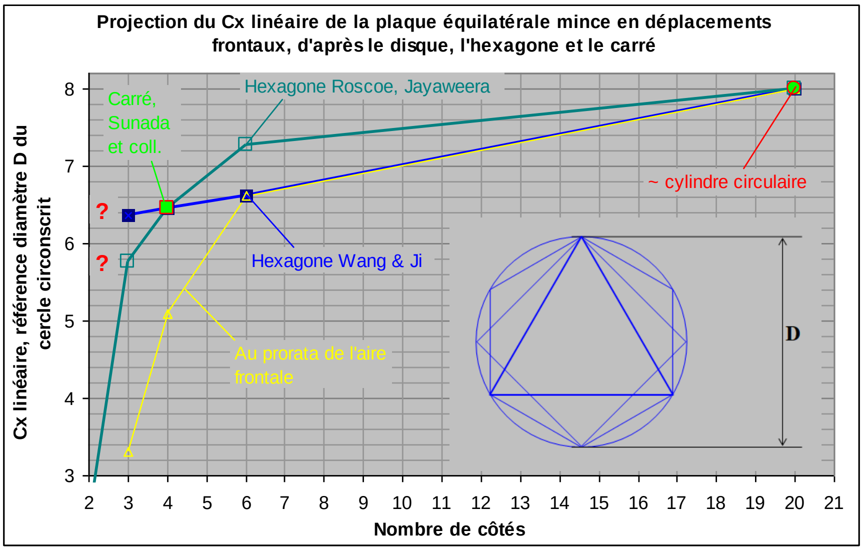
Ces trois courbes sans marques (bleu dense, bleu plus clair et fuchsia) sont assez régulières, ce qui vient justifier nos impositions manuelles précédentes.

Curieusement, les courbes fuchsia et bleu plus clair acceptent des régressions en puissance assez fidèles (courbes tiretées) ; la régression du même type pour la courbe bleu dense (**8** côtés) est moins précise, ainsi qu'on peut en juger (courbe tiretée la plus haute). Les équations de ces régressions, qui sont indiquées, pourraient constituer une première approche pour le $\mathbf{C_x}$ de ces prismes droits à base régulière à **3**, **5** et **8** côtés en mouvements axiaux.

La plaque mince équilatérale :

Selon une méthode analogue (basée sur la continuité probable des équations de la Nature, on peut se demander quelle pourrait être le $\mathbf{C_x}$ linéaire des plaques minces équilatérales en déplacement frontaux (ce type de cristaux de glace se formant parfois dans les nuages d'altitude).

Une difficulté apparaît alors : Si les $\mathbf{C_x}$ linéaires de la plaque carrée et du disque sont connus (ce sont les marques carrée et ronde verte ceintes de rouge), nous n'avons aucune certitude quant à la valeur du $\mathbf{C_x}$ linéaire de la plaque mince hexagonale. Roscoe, Jayaweera, Wang et Ji en ont proposé des valeurs dont certaines, comme celle de Wang et Ji, sont suspecte d'avoir été déterminée au *prorata* de la surface frontale (par rapport au $\mathbf{C_x}$ linéaire **8** du disque). Ce *prorata* apparaît sur le graphe ci-dessous comme une courbe jaune :



Sur ce graphe, tous les $\mathbf{C_x}$ linéaires sont exprimés en référence au diamètre **D** du cercle circonscrit ; en abscisse sont les nombres de côtés des plaques minces. Comme précédemment, nous avons placé le $\mathbf{C_x}$ linéaire du disque à l'abscisse **20**.

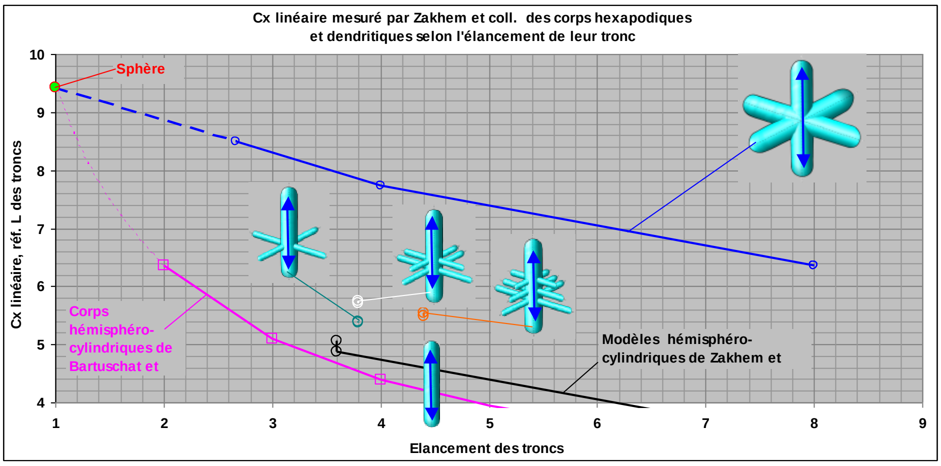
Selon que l'on utilise pour la plaque hexagonale la valeur de Wang et Ji ou celle de Roscoe ou Jayaweera, on peut prolonger les courbes bleu dense ou bleu glauque en deux ordonnées à l'abscisse **3** (pour **3** côtés). Ces deux marques sont repérées par un point d'interrogation rouge…

Ce graphe montre quand même que dès que les ambiguités sur la valeur du $\mathbf{C_x}$ linéaire de la palque mince hexagonale seront levées, l'on pourra s'avancer à en tirer le $\mathbf{C_x}$ linéaire de la plaque mince équilatérale… [190]

[190] Comme on peut l'observer, nous nous sommes risqué à proposer un $\mathbf{C_x}$ linéaire pour la plaque mince ne présentant que deux côtés (toujours référence **D**) : cette plaque a été assimilée ici par nous à un cylindre de longueur **D** en mouvement transverse. Il n'est pas sûr que cette démarche soit intéressante…

Corps uniaxiaux dendritiques de Zakhem et coll. :

L'exploitation du même texte nous a permis de dresser ce panorama du C_x linéaire de corps dendritiques uniaxiaux simples mesurés par ces auteurs :



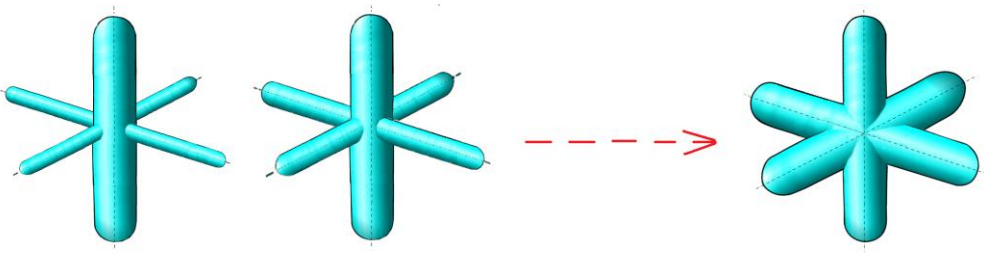
Ces corps dendritiques uniaxiaux sont représentés sur le graphe : ils ont, autour de leur tronc (parallèle à la direction du mouvement) de un à trois jeux de quatre branches.

Dix corps ainsi définis ont été mesurés par Zakhem et coll., chaque type de corps donnant lieu à deux modèles homothétiques chacun de ceux-ci étant de plus souvent usinés dans deux matières de Masse Volumique très différente.

Il apparaît que les branches sont assez peu *traînantes* bien que leur diamètre soit **36 %** du diamètre du tronc (leur longueur absolue étant quand-même moins forte que celle de leur tronc ou des branches de l'hexapode régulier, à savoir **~79**, **60** et **52 %** de cette longueur). On peut donc dire, au moins mnémotechniquement, que chaque branche *fait la trace* de la suivante (ou assure le carénage de la précédente)…

Le corps comportant un seul étage de branche (qui est un hexapode irrégulier) est intéressant à lui seul dans la mesure où il se place, en ordonnées, à **18 %** de l'espace vertical entre le troncs sans branche et l'hexapode régulier, alors que ses deux branches font **36 %** du diamètre du tronc de l'hexapode.

On peut en déduire une première approche du C_x linéaire de corps hexapodiques irréguliers selon le diamètre de leur branches, celles-ci pouvant par simplification mesurer la longueur de leur tronc puis croître progressivement en diamètre jusqu'à prendre le diamètre du tronc (ce qui reforme l'hexapode régulier). :



Note sur l'évolution du C_x linéaire d'un hexapode irrégulier en diamètres :

Calculons d'abord l'accroissement de C_x linéaire consécutif à l'accroissement de la longueur des branches jusqu'à **100 %** de **L**, **L** étant toujours la hauteur du tronc.

Notre régression tirée de Bartuschat et coll. attribue à chaque branche (d'élancement **8,35**) en déplacement transverse un C_x linéaire de **4,374** (en référence à leur longueur **0,79 L**, chacune de ces branches étant considérée comme isolée). La longueur de Traînée des deux branches (considérée comme isolée) est donc **2*4,374*0,79 L = 6,91 L**.

La longueur de Traînée du tronc seul et isolé peut être estimée à **4,85 L** (à son élancement **3,8)** d'après les mesures de Zakhem et coll. sur le graphe ci-dessus.

La longueur de Traînée de l'hexapode irrégulier en diamètre et en longueur a été déterminé par Zakhem (marque bleu glauque) : c'est **5,4 L**, soit simplement **0,55 L** de plus que le corps hémisphéro-cylindrique d'élancement **3,8**.

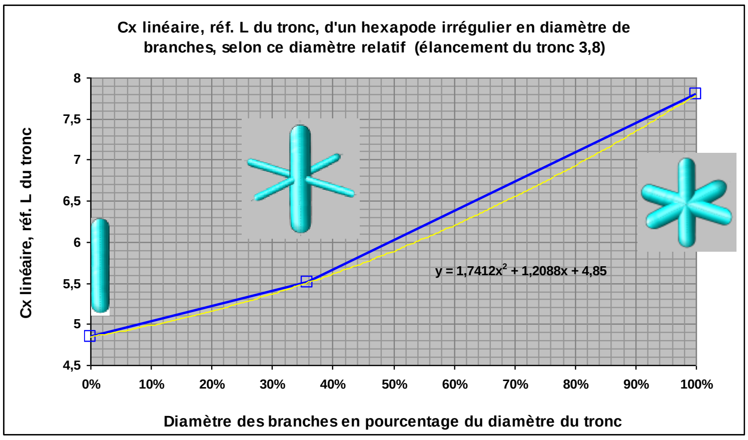
Il s'avère donc que les différentes interférences entre les trois corps formant cet hexapode régulier font que la croix que forment les deux branches n'apporte pas comme longueur de Traînée à l'hexapode irrégulier **6,91 L** mais seulement **0,55 L**, soit **8 %** de la longueur de Traînée des deux branches de la croix calculée comme isolées.

On peut nommer *Coefficient d'Interférences* cette fraction **8 %**.

Si à présent l'on étend la longueur des deux branches à celle du tronc (pour former un hexapode irrégulier seulement en diamètre), on peut trouver par la même régression de Bartuschat et coll. que la longueur de Traînée de chacune des deux branches de longueur **L** (leur élancement atteignant **10,58**) est **4,17 L**. Soit une longueur de Traînée pour les deux branches de la croix (considérées comme isolées) de **2*4,17L = 8,33L**.

En utilisant le même *Coefficient d'Interférences de* **8 %** [191] l'apport en longueur de Traînée des deux branches de la croix de longueur **L** est donc **0,67L**, ce qui donne, comme longueur de Traînée d'un hexapode irrégulier seulement en diamètre la valeur de **4,85 L+ 0,67 L= 5,51 L**. Soit un C_x linéaire de **5,51**.

Il nous est donc possible de tracer le graphe du C_x linéaire des hexapodes seulement irréguliers en diamètre de leur branches, ces hexapodes ayant un tronc d'élancement **3,8** (C_x linéaire en référence longueur **L** de leur tronc, courbe bleu dense) :



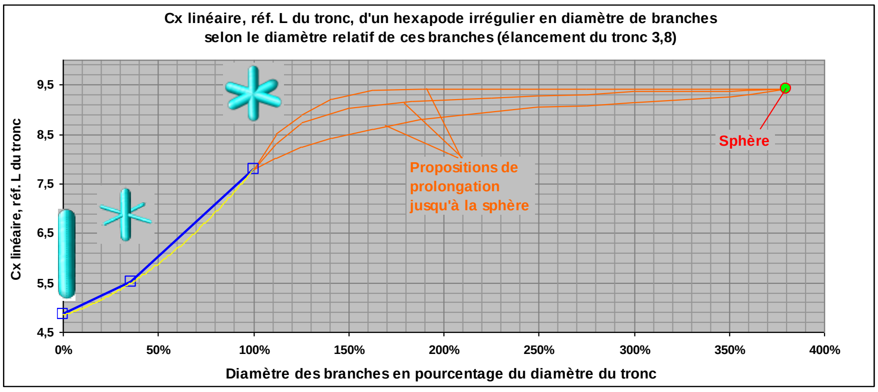
Il est judicieux de remarquer que cette courbe bleu dense est contingentée par ses deux valeurs extrêmes (à **0** et à **100 %**) : notre proposition ne peut donc se rendre coupable que d'erreurs assez faibles (ces erreurs étant encore plus faibles autour de la marque à **36 %** et peut-être autour de **0** et **100 %**)…

On note sur le graphe la proposition de régression parabolique de notre tableur (l'équation en est indiquée)…

Si l'on étend le diamètre relatif jusqu'à **380 %**, le corps formé devient une sphère et son C_x linéaire est **3 π**, ce qui laisse entendre qu'au-delà de l'abscisse **100 %** la courbe bleu

[191] Le fait qu'en régime de Stokes la perturbation causée par un corps se ressente très loin de ce corps est pour nous ici un argument pour considérer que le *Coefficient d'Interférences* évolue également très peu d'un point à un autre point assez proche…

dense admet une inflexion [192]. Bien que cette limite des **380 %** paraisse lointaine, sa prise en compte peut apporter une certaine aide dans le tracé de la courbe au-dessus de **100 %** (propositions de courbes orange tracées à la main ci-dessous) :



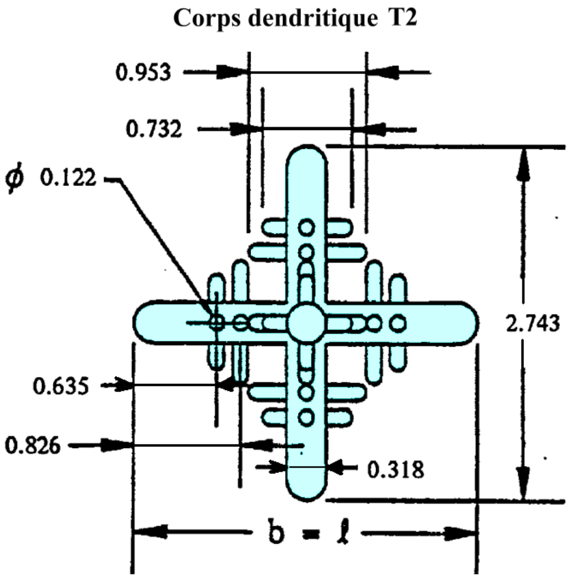
Ces courbes orange, limitées en haut par l'asymptote **3π** [193], sont évidemment sujettes à caution [194].

Attention au fait que ces deux graphes ne valent que pour les hexapodes irréguliers en diamètre de branches <u>dont le tronc montre un élancement **3,8**</u>…

<u>Corps triaxial dendritique de Zakhem et coll. :</u>

Nous ne mentionnerons pas tous les corps testés par ces auteurs. Mais le corps le plus complexe mérite d'être étudié.

C'est un hexapode régulier comportant sur son tronc et chacune de ses branches deux étages de branches en croix :



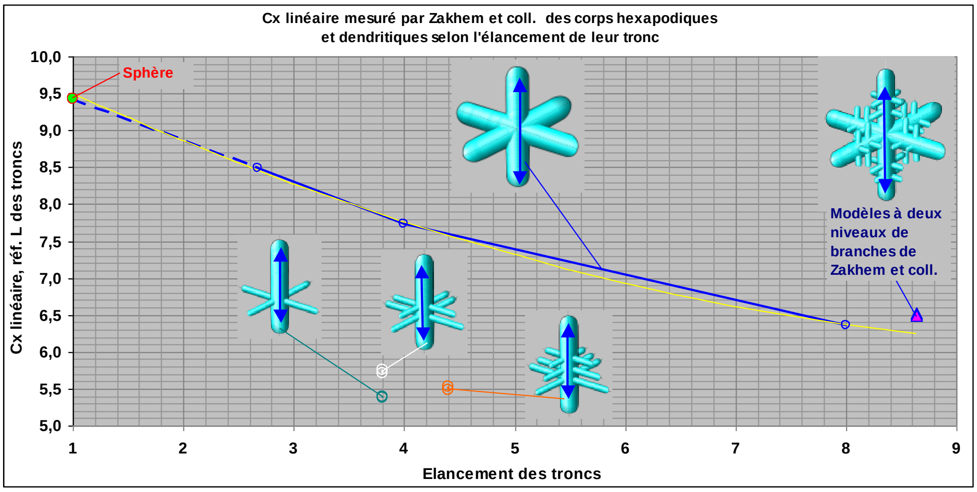
Les cotes données dans le dessin des auteurs ci-dessus sont en centimètres.

[192] La valeur de **380 %** correspond à l'élancement **3,8** du tronc de l'hexapode.

[193] …conformément au théorème de la dissipation minimale d'énergie.

[194] Quelques points supplémentaires seraient les bienvenus.

Ces mêmes auteurs notent que la Traînée de ce corps muni de multiples branches n'est guère plus forte que celle de l'hexapode sur lequel ces branches ont foisonné. Le $\mathbf{C_x}$ linéaire de ce corps est représenté ci-dessous par la marque triangulaire fuchsia à l'extrême droite (à l'élancement **8,64**) :



De fait, le foisonnement des branches ne semble pas extrêmement *traînant*.

Zakhem et coll. expliquent ainsi ce phénomène :

« Les mesures montrent que la pousse de branches secondaires n'a virtuellement aucun effet sur le coefficient de Traînée [du moins celui qu'utilisent Zakhem et coll., ndBdGM] ; ceci est dû au fait que cette pousse de branches secondaires sur un [hexapode régulier] ne modifie pas son *emprise transversale* [195] qui est déjà réglée par la configuration sans branche [c.-à-d. l'hexapode]. »

Sur ce point précis, il convient de préciser que le $\mathbf{C_x}$ linéaire utilisé par les auteurs (nommé $\mathbf{C_d}$, ce qui prête à confusion), à savoir :

$$\mathbf{C_d}_{\text{ Zakhem}} = \frac{\left.\frac{\mathbf{d(D)}}{\mathbf{d(Re)}}\right|_{\mathbf{Re=0}}}{\mathbf{6\pi\mu v}}$$

…est le fruit de la différentiation de la Traînée **D** en fonction d'un Reynolds $\mathbf{R_e}$ qui se trouve être basé sur le rayon de la sphère équivalente (de même volume, donc de même poids efficient). En témoigne la définition de ce $\mathbf{R_e}$:

$$\mathbf{R_e} = \frac{\mathbf{a_r V}}{\frac{\mu}{\rho}}$$

…définition où $\mathbf{a_r}$ est le rayon de la sphère équivalente et **V** la vitesse du corps dendritique considéré (le quotient μ / ρ formant la viscosité cinématique propre à la création des Reynolds).

Ce Reynolds tombe donc de plein droit dans la catégorie des Reynolds volumiques (tels que ceux utilisés parfois pour l'étude des dirigeables) puisqu'il est basé, à un coefficient près, sur la racine cubique du volume du corps.

[195] Ainsi traduisons-nous : « horizontal length scale ».

Note sur la définition du Reynolds nécessaire et suffisant pour qu'un corps décante en régime de Stokes :

La définition de ce Reynolds volumique pose d'ailleurs la question de la limite au-delà de laquelle l'écoulement n'est plus strictement de Stokes ; ces difficultés de définition du Reynolds nécessaire et suffisant pour qu'un corps décante en régime de Stokes n'ont d'ailleurs pas été abordées dans notre texte, hormis pour la sphère et le disque : nous nous sommes contentés de préciser que les corps que nous étudiions décantaient en régime de Stokes [196]. Il n'en demeure pas moins que plusieurs longueurs de référence viennent à l'esprit lorsqu'il s'agit de former le nombre de Reynolds de tels écoulements :

→ L'exemple des hauts Reynolds (qui n'est pas forcément ici un bon exemple) incite à prendre comme longueur de référence la longueur des corps mesurée dans le sens de l'écoulement.

→ Zakhem et coll., quant à eux, ont choisi dans leur texte comme longueur de référence <u>le rayon</u> de la sphère équivalente (ce qui divise par **7**, pour certains corps, le Reynolds par rapport au choix précédent) : il s'avère alors que ces auteurs ont mesuré la Traînée de corps dendritiques dont le Reynolds <u>longitudinal</u> (donc basé sur la longueur mesurée dans le sens de l'écoulement) approche dangereusement de l'unité (par exemple les corps dénommés U2 BH et U3 BH, ce dernier Reynolds longitudinal atteignant **0,98**).

Dans la pratique, le $\mathbf{C_x}$ linéaire de Zakhem et coll. est relié au nôtre par la relation :

$$\mathbf{C_d}_{\text{ Zakhem}} = \frac{\mathbf{C_{xLin\ Réf.L} * L}}{\mathbf{6\pi\ a_r}}$$

…cette conversion ne correspondant qu'à un changement de longueur de référence (de **L** à $\mathbf{a_r}$) et à une division par le scalaire **6π**.

De la même façon que nous avons écrit à l'instant que le Reynolds utilisé par Zakhem et coll. est un Reynolds volumique, nous pouvons également écrire que <u>le $\mathbf{C_x}$ linéaire utilisé par Zakhem et coll. est un $\mathbf{C_x}$ linéaire volumique</u>… [197]

Quant à nous, la longueur de référence que nous avons choisie pour notre $\mathbf{C_x}$ linéaire (la longueur du tronc des corps) ainsi que la mise en panorama que ce choix permet, ne nous font pas dire que le surcroît de Traînée dû aux foisonnement des branches est *virtuellement* nul. Il est cependant faible puisqu'il ne fait passer le $\mathbf{C_x}$ linéaire d'un hexapode d'élancement **8,64** (en référence à la longueur de son tronc et premières branches) que de **6,25** à **6,50** (soit un surcroît de **4 %**)…

Mais pour les corps considérés par cette étude, à savoir des corps dendritiques comportant jusqu'à deux niveaux de branches secondaires, on peut comprendre que Zakhem et ses coauteurs, en faisant référence, pour leur propre $\mathbf{C_x}$ linéaire, au rayon de la sphère équivalente (de même volume et donc de même poids efficient que chaque corps) amenuise le léger accroissement de (notre) $\mathbf{C_x}$ linéaire occasionné par le foisonnement des branches secondaires : en effet ce foisonnement augmente légèrement le volume du corps, donc le rayon de sa sphère équivalente qui est un diviseur du $\mathbf{C_d}_{\text{ Zakhem}}$.

Si un tel référencement *volumique* facilite la détermination de la Traînée des corps dendritique, c'est assurément un bénéfice.

[196] Nous n'avons pas trouvé de renseignements sur cette question pour des corps quelconques.

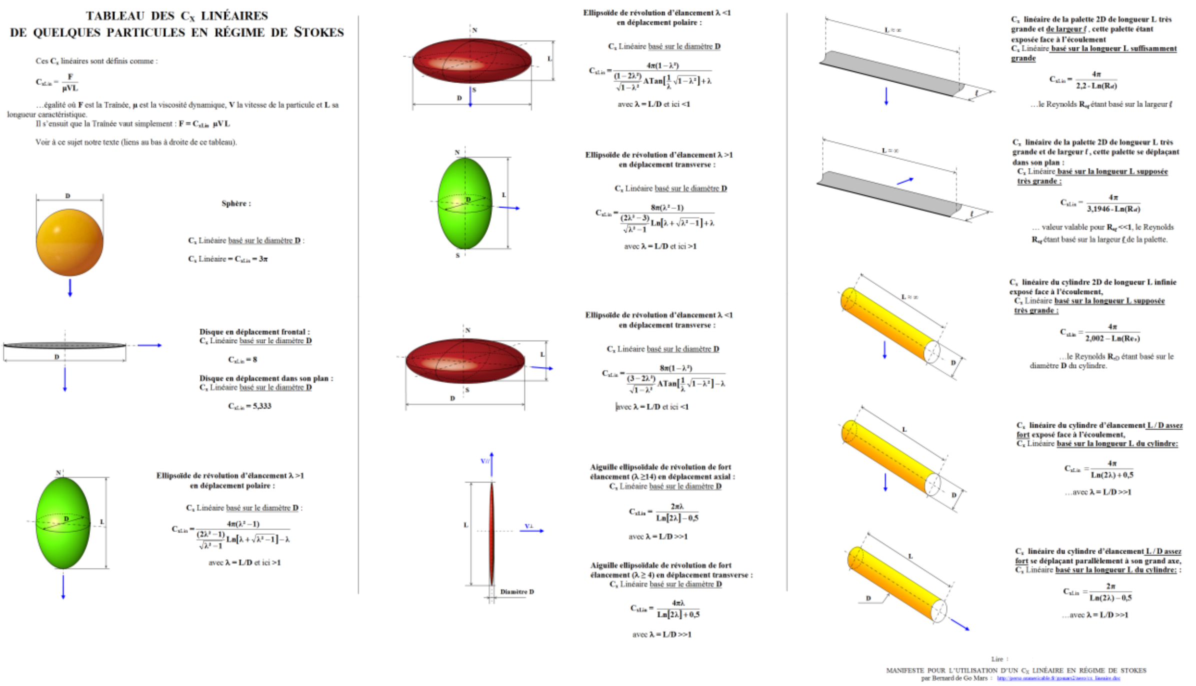
[197] Cela signifie qu'à un coefficient près, ce $\mathbf{C_x}$ linéaire prend comme longueur de référence la racine cubique du volume du corps considéré…

Il ne faudrait cependant pas appliquer sans précaution ce principe à d'autres corps, tels tous ceux que nous avons rencontrés tout au long de notre texte…

Au moins mnémotechniquement, on pourra rapprocher les prescriptions de Zakhem et coll. concernant les corps dendritiques 3D des calculs de Traînées de corps dendritiques 2D que nous présenterons plus loin ou des corps hexagonaux 2D plus ou moins indentés que nous présenterons un peu plus loin.

Nos tableaux des C_x linéaires de particules :

Fort de la collecte des valeurs numériques de $\mathbf{C_x}$ linéaires effectuée ci-dessus, nous avons réalisé un premier tableau puis un deuxième regroupant ces $\mathbf{C_x}$ linéaires à fins de publication dans les Wiki-Commons :



Ce tableau est conçu pour être agrandi. On gagnera donc à le télécharger à son adresse :
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Tableau_des_cx_linéaires_de_quelques_particules_en_Régime_de_Stokes.png

Un deuxième, troisième, puis un quatrième et cinquième tableaux ont ensuite été publiés :

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Tableau_cx_lineaires_deuxieme.png

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Tableau_des_cx_lin%C3%A9aires_de_quelques_particules_en_R%C3%A9gime_de_Stokes,_troisi%C3%A8me.png

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Tableau_des_cx_lin%C3%A9aires_de_quelques_particules_en_R%C3%A9gime_de_Stokes_quatri%C3%A8me.png

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Tableau_des_cx_lin%C3%A9aires_de_quelques_particules_en_R%C3%A9gime_de_Stokes_cinqui%C3%A8me.png

Nous ne les joignons pas à ce texte pour ne pas le surcharger

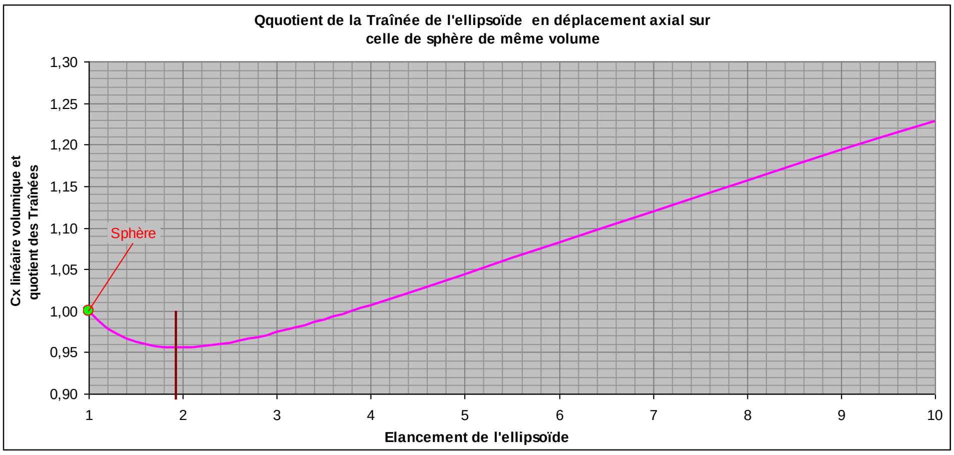
Les corps de moindre Traînée en régime de Stokes :

Nous venons d'écrire *Les corps de moindre Traînée* car il y en a plusieurs ; en effet, comme c'est également le cas pour les forts Reynolds, il faut faire la différence entre le corps de moindre Traînée à volume donné et le corps de moindre Traînée à surface mouillée donnée. D'autres corps de moindre Traînée pourraient d'ailleurs se montrer intéressants, comme le corps de moindre Traînée à section frontale donnée ou même le corps de moindre Traînée de diamètre donné (afin qu'il puisse passer à travers un trou) ou même le corps de moindre Traînée de longueur donnée (nous verrons que ce dernier corps optimal n'existe pas).

Quoiqu'il en soit de ces diverses possibilités, les corps de moindre Traînée qui apparaissent les plus intéressants sont ceux à volume donnée et à surface extérieure donnée.

Le chercheur australien E. O. Tuck, dont nous avons plus haut exploité le texte, y a consacré un chapitre à la Minimalisation de la Traînée. Il propose un graphe du quotient de la Traînée des ellipsoïdes selon leur élancement par la Traînée de la sphère de même volume.

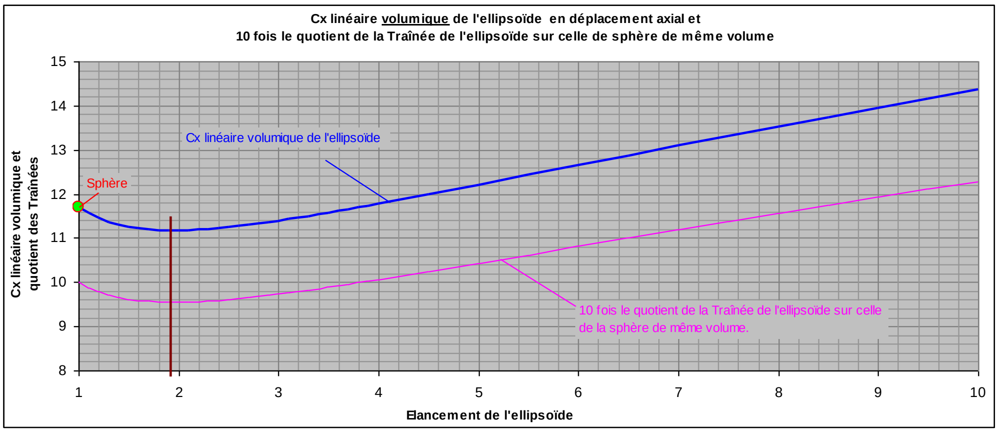
Cette façon de faire revient à comparer la Traînée des ellipsoïdes avec celle de sphère d'égal volume. Il s'avère que la courbe de ce quotient dessine un minimum aux alentours de l'élancement **2** :



Ci-dessus ce minimum est signalé par une verticale marron.

La lecture du graphe nous informe que, d'un point de vue pratique, l'augmentation de l'élancement de l'ellipsoïde (par rapport à l'élancement unitaire de la sphère) ne produit qu'un gain médiocre (un peu moins de **5 %** de minimalisation de la Traînée à volume constant).

Quoique cela soit assez difficile à comprendre, l'établissement du graphe ci-dessus aide fortement à la recherche du corps de moindre Traînée à volume donné. Pour preuve, si l'on s'avise de dessiner le $\mathbf{C_x}$ linéaire de l'ellipsoïde <u>en référence à la racine cubique de son volume</u>, on obtient le résultat suivant :

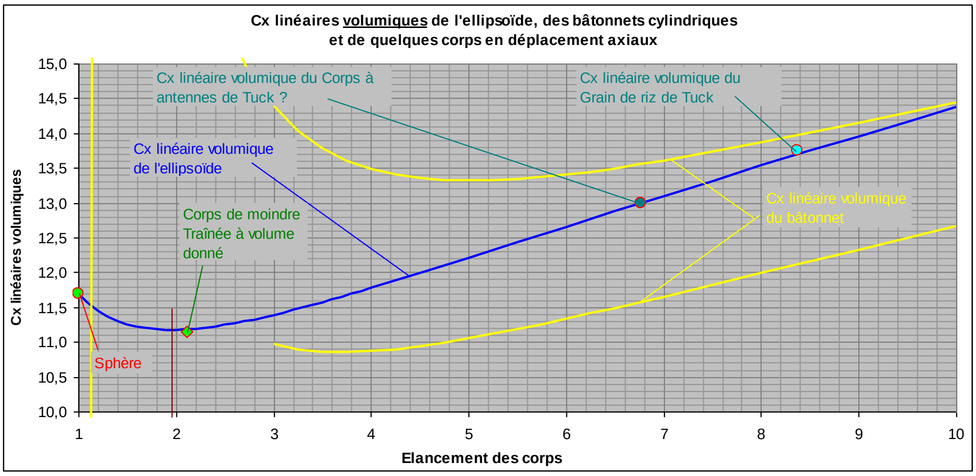


Sur ce graphe, nous avons reporté en fuchsia les ordonnées multipliées par **10** de la courbe du quotient de Traînée fuchsia précédente : il est visible que le minimum des deux courbes se produit au même élancement (**1,952**).

Comme on le lit dans le titre du graphe, nous avons nommé **C_x** <u>linéaire volumique</u> ce **C_x** linéaire en référence à la racine cubique du volume de l'ellipsoïde.

Bien que ce fait mériterait une démonstration dans un texte comme le nôtre, ce ***C_x* linéaire volumique** est bien celui, qui, en son point le plus bas, donnera l'ellipsoïde de moindre Traînée <u>à volume donné</u> (de sorte qu'en multipliant l'ordonnée de ce point bas (**11,173**) par la racine cubique du volume de l'ellipsoïde de cet élancement, on obtient facilement la Traînée réduite de cet ellipsoïde de moindre Traînée à volume donné (qui ne minimalise guère la Traînée que d'un peu moins de **5 %** par rapport à celle de la sphère, nous l'avons déjà fait remarquer).

Comme nous savons par ailleurs que le corps de moindre Traînée à volume constant n'est pas un ellipsoïde, il est utile de présenter le graphe suivant qui montre le **C_x** linéaire volumique des ellipsoïdes, des bâtonnets cylindriques et des deux corps de Tuck précédemment étudiés :



Et là nous sommes surpris de constater que le **C_x** linéaire volumique des bâtonnets cylindriques calculé à partir de l'équation du **C_x** linéaire en référence longueur :

$$C_{xLin} = \frac{2\pi}{Ln(2\lambda) - 0,5}$$

…est un peu plus faible que celui des ellipsoïdes (ce qui n'est pas le cas de l'autre **C_x** linéaire volumique des bâtonnets, calculé à partir de l'autre équation du **C_x** linéaire en référence longueur.

Bien-sûr, il convient de se remémorer que le libellé de la Traînée de ces bâtonnets cylindrique ne vaut que pour les élancements suffisamment grands (disons supérieurs à **5**) ; mais même interprétée d'après la partie droite de la courbe jaune la plus basse, la tendance est assez nette.

Bien-sûr aussi, le bâtonnet cylindrique offre un volume un peu plus fort que l'ellipsoïde, à élancement égal ; mais cette situation de la courbe jaune la plus basse nous laisse à songer que l'équation du **C_x** linéaire (en référence à la longueur du bâtonnet) donne un résultat décidément trop faible (ce qui nous était déjà apparu au cours de ce texte)…

Rappelons par contre qu'en référence à leur longueur, le **C_x** linéaire des bâtonnets cylindriques donné par l'autre équation :

$$C_{xLin} = \frac{2\pi}{Ln(2\lambda) - 0,807}$$

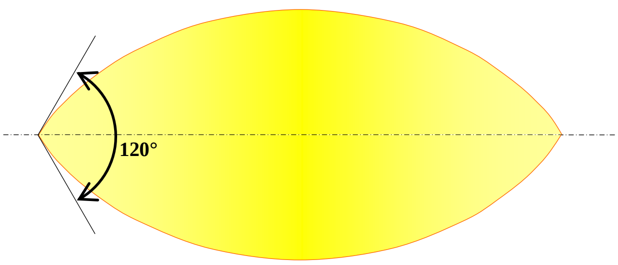
…reste comparable à celui des ellipsoïdes pour les élancements supérieurs à **10**, même s'il est un peu plus fort : c'est la courbe haute sur ce graphe …

Sur le graphe précédent, nous avons fait suivre l'annotation Cx linéaire volumique du Corps à antennes de Tuck d'un point d'interrogation parce que, on s'en souvient, nous avons pris la décision plus haut de négliger par la pensée l'influence de ses antennes.

Sur le même graphe apparaît le corps de moindre Traînée à volume donné, corps qui est issu des travaux de Pironneau en 1973 puis Bourot en 1974, relatés par Montenegro-Johnson et Lauga.

Le schéma ci-dessous dévoile la forme de ce corps :

Corps de moindre Traînée de volume donné en régime de Stokes



Il est symétrique, d'élancement **2,109** et ses deux pointes tangentent des cônes de **120°** d'angle au sommet.

Sur le graphe des **C_x** volumiques précédent, il apparaît que ce corps se place très peu en dessous de l'ellipsoïde de moindre Traînée *volumique* (ou à volume donné) :

son C_x linéaire <u>volumique</u> vaut **11,158** alors que celui de l'ellipsoïde de moindre Traînée à volume donnée est **11,173**.

L'élancement du corps de moindre Traînée à volume donné est de **2,109** alors que celui de cet l'ellipsoïde de moindre Traînée à volume donné est de **1,952**.

Tout ceci revient à dire que l'ellipsoïde de révolution d'élancement **1,952** est presque le corps de moindre Traînée à volume donné.

Au fait, comment avons-nous déterminé ce C_x linéaire volumique du corps de moindre Traînée à volume constant ?

Nous n'avons fait qu'utiliser le constat, posé par Bourot, que ce corps présente une Traînée réduite valant **0,95425** fois celle de la sphère de même volume.

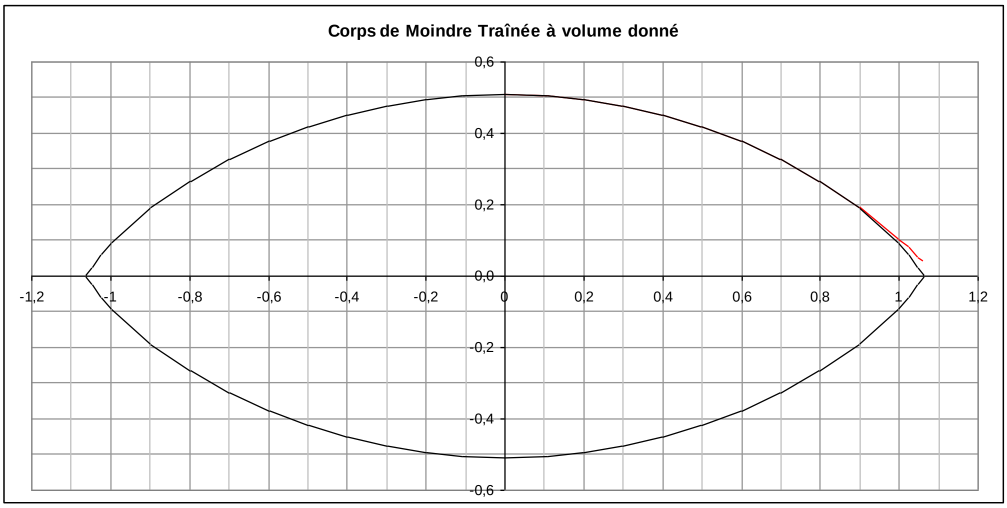
On peut donc écrire, si l'on nomme D_v le diamètre de cette sphère de même volume (ou sphère *équivalente*) que le C_x linéaire volumique du corps de moindre Traînée à volume donné vaut :

$$\frac{\mathbf{0{,}95425\ Traînée\ réduite\ de\ la\ sphère\ équivalente}}{\sqrt[3]{\mathbf{Volume\ de\ cette\ sphère}}} = \mathbf{0{,}95425}\ \frac{\mathbf{3\pi D_v}}{\sqrt[3]{\frac{\pi D_v^3}{6}}} = \mathbf{0{,}95425}\ \frac{\mathbf{3\pi}}{\sqrt[3]{\frac{\pi}{6}}}$$

Ce qui donne **11,158** de C_x linéaire.

Quant au C_x linéaire du même corps de moindre Traînée à volume donné <u>en référence à sa longueur</u>, il faut en déterminer le volume pour le connaître.

Nous avons saisi la forme de ce corps (dont nous n'avons pas trouvé l'équation) dans notre tableur :



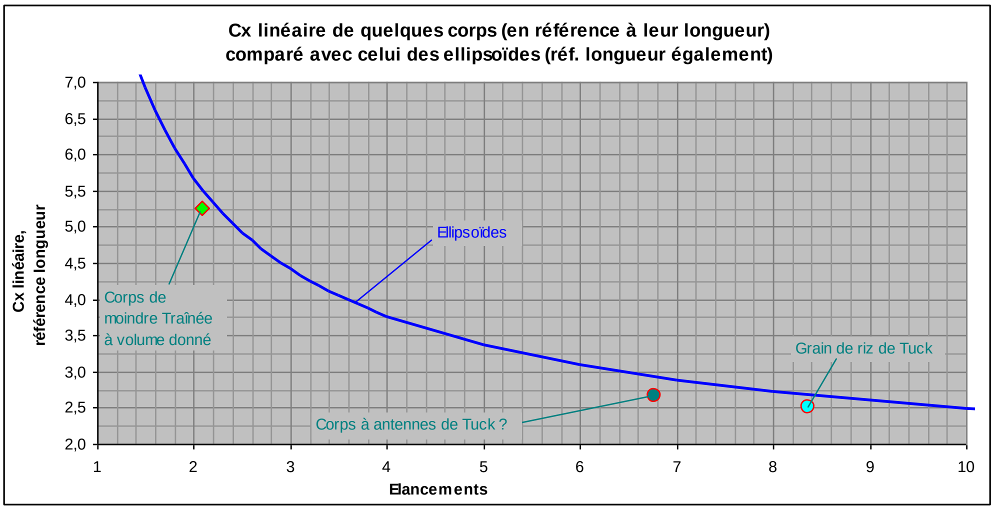
Au passage, nous pouvons voir que sa génératrice n'est pas tout à fait circulaire puisque l'arc de cercle rouge se sépare de son profil un peu après l'abscisse **0,8**.

Nous avons trouvé pour ce corps de rayon maximal **0,509** et de longueur **1,062** le volume **1,0018**. Ceci nous a suffit pour déterminer le C_x linéaire de ce corps. C'est :

$$\boxed{C_{xLin} = 5{,}257}$$

…qui est le C_x linéaire du corps de moindre Traînée à volume donné en référence à sa longueur.

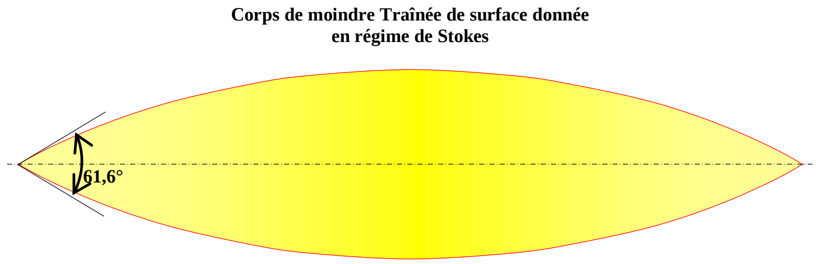
Voilà comment ce C_x linéaire en référence longueur (C_x linéaire plus classique, donc) se place par rapport aux autres C_x de corps à génératrice très proche ou assez proche d'un arc de cercle que nous venons d'étudier :



On note sur ce graphe que le C_x linéaire du corps de moindre Traînée à volume donné (en référence longueur) est un peu plus faible que celui de l'ellipsoïde de même élancement [198], mais il ne faut pas oublier que le volume du corps de moindre traînée est plus faible que celui de l'ellipsoïde (c'est ce qui explique la grande proximité, que nous avons constaté plus haut, de son C_x linéaire volumique avec celui de l'ellipsoïde de même élancement). Autrement dit, l'échelonnement en ordonnée de ce corps de moindre Trainée à volume donné n'est pas significatif de sa qualité de moindre Traînée à volume constant (qui ne peut apparaître que sur un graphe dessinant son C_x linéaire volumique)…

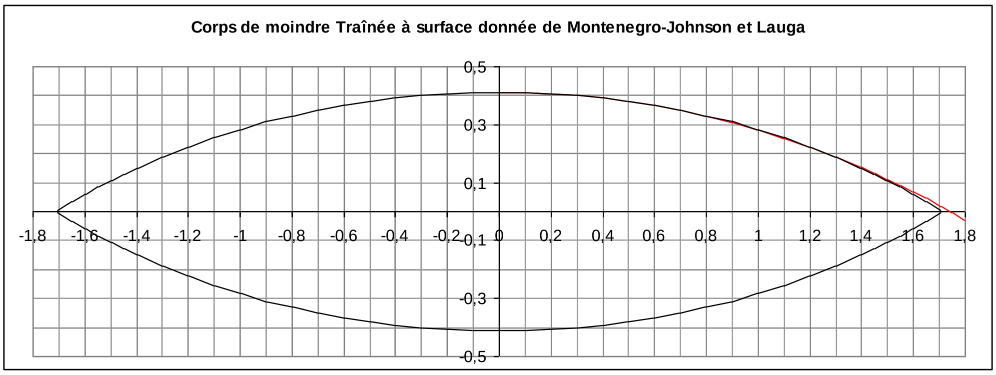
Nous ne pouvons nous appesantir sur ce problème des corps de moindre Traînée à volume donné en régime de Stokes, mais nous pouvons signaler quand même que le corps de moindre Traînée à surface donnée (surface mouillée extérieure complète, et non la surface de la section frontale) est celui-ci, encore dévoilé par les travaux de Montenegro-Johnson et Lauga :

[198] 1,0018 au lieu de 1,153.



Son élancement de **4,162** est beaucoup plus fort que celui du corps précédent, et le gain en Traînée procuré par ces formes est de **11,3 %** (seulement) par rapport à la Traînée de la sphère de même surface.

La captation des formes de ce corps dans notre tableur donne ce résultat :



Notre tentative d'assimiler la génératrice de ce corps de révolution à un arc de cercle dessine l'arc de cercle rouge dont on peut juger qu'il diverge lentement de la génératrice réelle à partir de l'abscisse **1,3**.

Cette captation des formes dessinées par Montenegro-Johnson et Lauga ne nous est pas nécessaire pour à calculer le C_x linéaire surfacique de ce corps, à savoir le quotient de sa Traînée réduite par la racine carrée de sa surface mouillée. C'est **4,717**.

Ce C_x linéaire surfacique vient naturellement lorsque l'on prend acte des **11,3 %** de gain en Traînée par rapport à la sphère de même surface mouillée, à savoir que la Traînée du corps est **0,8872** fois celle de cette sphère de même surface mouillée.

En effet, si l'on appelle D_s, le diamètre de cette sphère de même surface mouillée, sa surface est forcément πD_s^2 et son C_x linéaire (en régime de Stokes) $3\pi D_s$.

Par définition, le C_x linéaire surfacique (qui est le seul à rendre compte de cette qualité d'être le corps de moindre Traînée à surface mouillée constante) vaut :

$$\frac{0{,}8872\ \text{Cx linéaire de la sphère}}{\sqrt{\text{Surface Mouillée}}} = 0{,}8872\,\frac{3\pi D_s}{\sqrt{\pi D_s^2}} = 0{,}8872\,\frac{3\pi}{\sqrt{\pi}}$$

Soit un C_x linéaire surfacique :

$$\boxed{C_{x\text{Lin Surfacique}} = 4{,}717}$$

…qui est le $\mathbf{C_x}$ linéaire surfacique (c.-à-d. en référence à la racine carré de sa surface mouillée) du corps de moindre Traînée à surface mouillée donnée calculé par Montenegro-Johnson et Lauga.

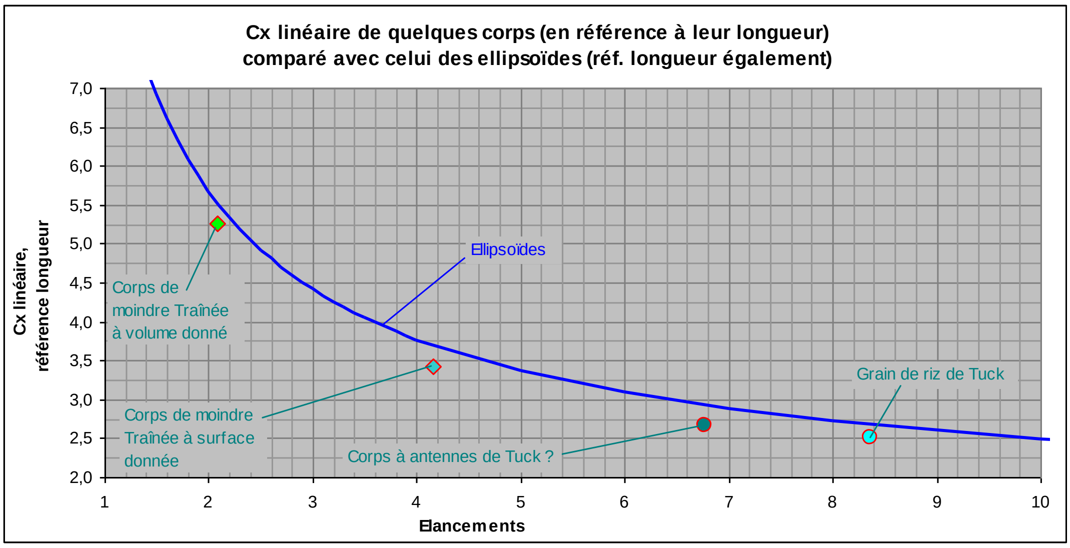
Afin de déterminer le $\mathbf{C_x}$ linéaire de ce même corps de moindre Traînée à surface mouillée donnée, mais cette fois en référence à sa longueur, il nous faut connaître son volume. Notre tableur l'évalue à **6,200** avec les abscisses et les ordonnées du graphe précédent (la longueur totale du corps en ressortant comme **2*1,71**.

Le $\mathbf{C_x}$ linéaire de ce corps de moindre Traînée est donc, en référence à sa longueur :

$$\mathbf{C_{xLin}} = \frac{\mathbf{4{,}717\sqrt{6{,}2}}}{\mathbf{2*1{,}71}} = \mathbf{3{,}4345}$$

Ce résultat est assez précis, bien qu'il soit tributaire de notre intégration de la surface mouillée du corps.

Nous gagnons évidemment à représenter les $\mathbf{C_x}$ linéaires des deux corps de moindre Traînée que nous venons d'étudier (en référence à leur longueur) : ils apparaissent sur le graphe ci-dessous avec celui des ellipsoïdes de révolution :



On note que pour chaque élancement, tous ces corps à génératrice circulaire ou quasi-circulaire paraissent avantageux par rapport aux ellipsoïdes (en ce qui concerne leur $\mathbf{C_x}$ linéaire basé sur la longueur).

> Cependant, baser le $\mathbf{C_x}$ linéaire des mêmes corps sur leur diamètre correspondrait à multiplier toutes les ordonnées dessinées ci-dessus par l'élancement [199], soit à multiplier l'ordonnée de chaque point par son abscisse (aussi bien pour les corps de moindre Traînée ou de Tuck que pour la courbe des ellipsoïdes [200]) ; donc, pour chaque élancement l'échelonnement en hauteur des points serait conservé.

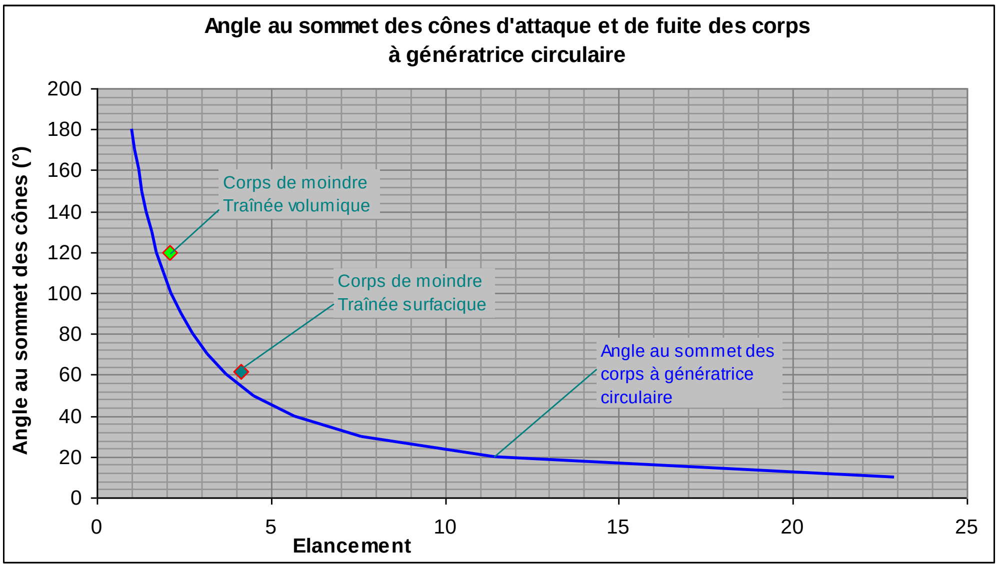
---

[199] En effet : $\mathbf{C_{xLin\,D}} = \mathbf{C_{xLin\,L}}\mathbf{*(L/D)}$

[200] Il est sans intérêt et illogique de comparer des $\mathbf{C_x}$ linéaires établis en référence différentes !

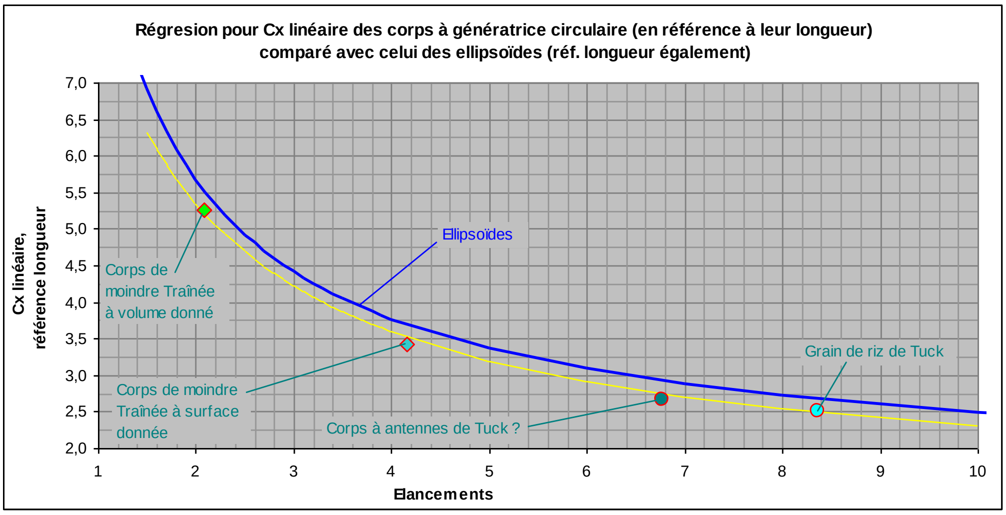
On peut donc dire que les corps à génératrice circulaire sont probablement les corps de moindre Traînée à élancement donné !

Il est d'ailleurs utile de se remémorer que ces corps à génératrice circulaire peuvent être définis par leur seul élancement et que l'angle au sommet de leur cône d'entrée et de fuite est variable selon ce même élancement (cet angle est donné ci-dessous par la courbe bleue) :



Sur ce graphe, nous avons fait figurer les deux corps de moindre Traînée précédemment étudiés : nous savons que leur génératrice n'est pas tout à fait circulaire spécialement près de leurs pointes et que leur angle d'attaque et de fuite est un peu plus fort…

Le graphe précédant ce dernier graphe nous a incité à risquer la régression jaune suivante qui approcherait le $\mathbf{C_x}$ linéaire des corps à génératrice circulaire ou assimilée :



L'équation de cette régression jaune est :

$$\mathbf{C_{x\mathrm{Lin}\,L} \approx 8\,\lambda^{-0,6} + 0,03\,\lambda}$$

…si λ est l'élancement desdits corps à génératrice circulaire (dont nous avons dit qu'ils pourraient bien être les corps de moindre Traînée à élancement donné).

Revenons-en au problème du corps de moindre Traînée de longueur donnée :

Nous avons encadré un peu plus haut le constat que les corps à génératrice circulaire sont *probablement* les corps de moindre Traînée à élancement donné.

Qu'on nous pardonne, d'ailleurs, ce *probablement* : c'est le lot de la Mécanique des Fluides d'être une science floue, même si cela impose à ses amateurs d'en être d'autant plus rigoureux. Ajouter le mot *probablement* dans une phrase est bien augmenter la précision de cette phrase, même si l'idéal serait de donner l'indice de probabilité.

Notre régression jaune du graphe ci-dessus relie par une courbe régulière les quatre corps de révolution à génératrice circulaire (ou assimilée) que nous avons rencontré précédemment : pour un élancement donné on a donc vraisemblablement [201] un corps à génératrice circulaire dont la Traînée se trouve nettement plus bas que, par exemple, l'ellipsoïde de même élancement.

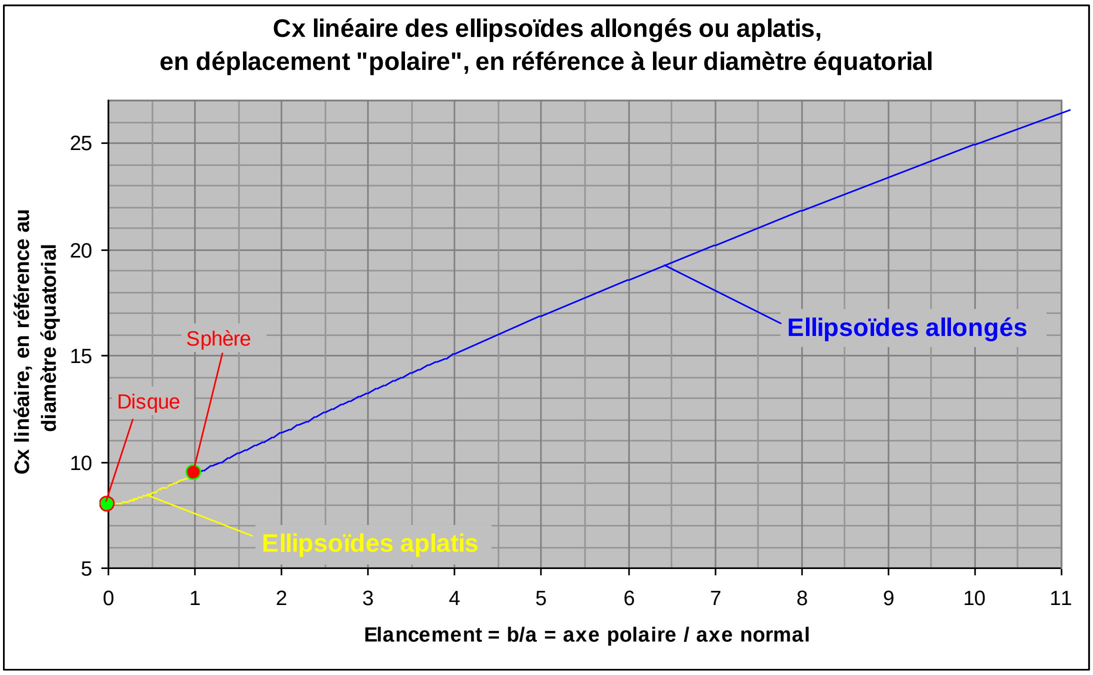
Cependant, il n'y a pas de corps de moindre Traînée à longueur donnée.

Ceci ce démontre facilement en faisant l'expérience de pensée suivante : Supposons que l'on ait trouvé un corps de révolution de moindre Traînée à longueur donnée (c'est donc le corps de moindre Traînée qu'on peut ranger dans un garage de longueur donnée) : si l'on réduit le diamètre maximal de ce corps "prétendu de moindre Traînée à longueur donnée", le corps résultant sera de surface mouillée plus faible et de section plus faible. Il est assez facile de penser que sa Traînée sera plus faible (à l'extrême, un corps de même longueur mais à diamètre maximal nul aurait forcément une Traînée nulle).

On peut donc affirmer qu'il n'y a pas de corps de moindre Traînée à longueur donnée.

Par contre, on peut dire qu'il y a un corps de révolution de moindre Traînée de diamètre donné. Référons-nous au graphe déjà présenté du $\mathbf{C_x}$ linéaire des ellipsoïdes allongés ou aplatis en déplacement polaire :

[201] Nous disons *vraisemblablement* car ce constat est basé sur l'hypothèse que la courbe qui relierait tous les corps à génératrice circulaire de tous élancements (du moins entre les élancements **2** et **9**) serait régulière et "parallèle" à la courbe bleue des ellipsoïdes. Ce n'est pas absolument sûr mais c'est quand-même quasiment certain.



(les courbes jaune et bleue sont établies en référence au diamètre équatorial des ellipsoïdes (donc le diamètre de la section frontale à leur mouvement)

Au vu de ce graphe, on peut réaliser que, pour un diamètre donné, c'est le disque qui est générateur de la moindre Traînée.

Ainsi une sphère de diamètre **1 mm** aura une Longueur de Traînée de **3 π * 1 mm**, soit **3 π mm** ou **9,425 mm**.

Pareillement, un ellipsoïde d'élancement **5** aura une Longueur de Traînée de **~17 * 1 mm**, soit **17 mm**

Par contre, le disque de diamètre **1 mm** aura une Longueur de Traînée de **8 * 1 mm**, soit **8 mm**, cette Longueur de Traînée étant bien la plus faible de toutes celles qui sont envisageables…

Nous en arrivons donc à cette conclusion très contre-intuitive qu'en régime de Stokes les disques se déplacent plus facilement perpendiculairement à leur plan que la sphère ou que tout ellipsoïde de même diamètre, même si ces derniers corps (ou cette infinité de corps) paraissent à nos esprits empreints de Mécanique des Fluides des hauts Reynolds mieux profilés que le disque …

En régime de Stokes, le corps de moindre Traînée à diamètre donné est le disque !

Cette constatation a peut-être son importance biologique, d'autant plus que, s'agissant de corpuscules dotés d'une vie propre, rien n'interdit à un micro-organisme en forme de disque (ou d'ellipsoïde très aplati) de se tourner pour se placer sur la tranche, position où il aura une Trainée encore plus faible (**C_x** linéaire diamétral de **5,33** pour le disque se déplaçant dans son plan au lieu de **8** lorsqu'il se déplace perpendiculairement à son plan)…

C_x linéaire en régime de Stokes de corps simples étirés ou écrasés par homothétie :

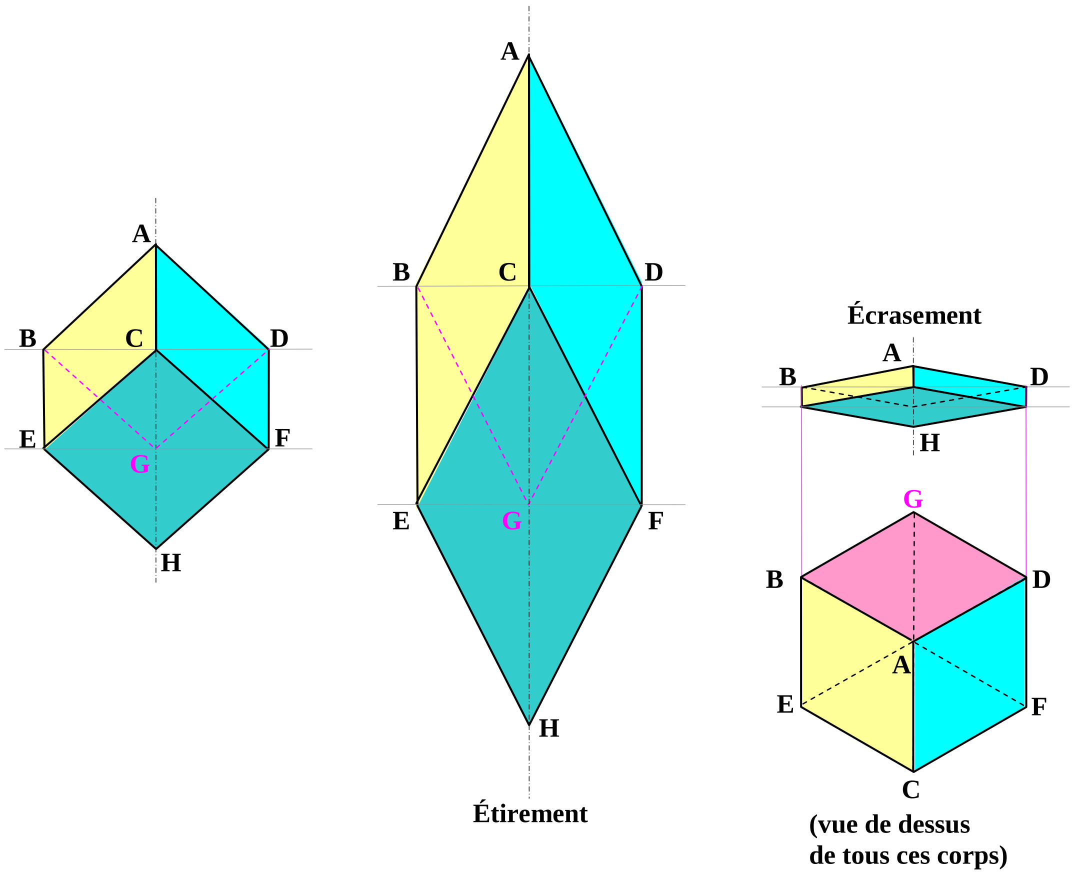
La sphère est un exemple de corps simple qu'un étirement ou un écrasement homothétiques par deux de ses points opposés transforment en ellipsoïdes aplatis ou allongés.

Le C_x linéaire de ces corps ayant été analysés par nous plus haut (en fonction de leur élancement), nous pourrons nous servir de son évolution comme modèle pour l'évolution homothétique d'autres corps.

Bien-sûr, il n'est pas certain que ce modèle soit le juste modèle, mais son existence est instructive.

Prenons par exemple le cube (schéma cavalier de gauche, ci-dessous), dont le C_x linéaire est assez bien connu (il est donné par Clift et coll. comme valant 4π , en référence à son arête) :

Étirement et écrasement homothétiques du cube par deux sommets opposés



Étirer ce cube par deux de ses sommets opposés donne le corps en forme de diamant au milieu de notre dessin ci-dessus.

Ce corps est assez difficile à lire, mais il faut songer que, comme le cube, il est formé de **6** faces.

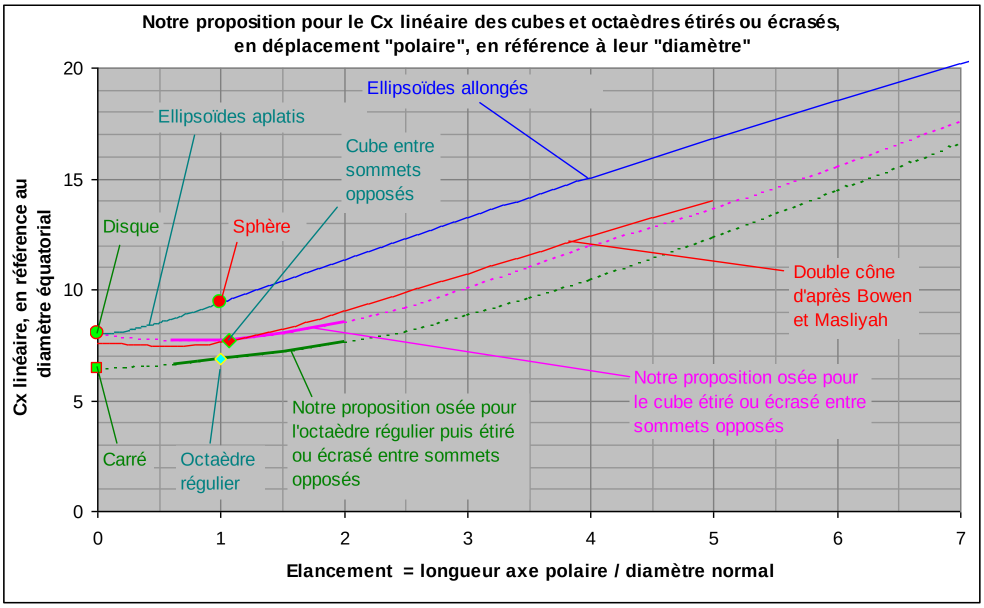
La face arrière **ABGD** du cube (invisible sur notre dessin) existe évidemment toujours sur le cube étiré du centre.

De même, sur le cube écrasé, elle existe toujours (elle est limitée vers le bas par les tiretés) mais elle est difficile à imaginer ; on la voit mieux sur la vue de dessus que nous avons réalisée : cette face **ABGD** est la face fuchsia.

Il est d'ailleurs essentiel, pour la lecture dans l'espace de tous ces corps, de prendre conscience du fait que cette vue de dessus est la même pour tous les degrés d'étirement ou d'écrasement des corps (ne serait-ce que parce que, dans une homothétie comme celle-là, cette vue est inchangée).

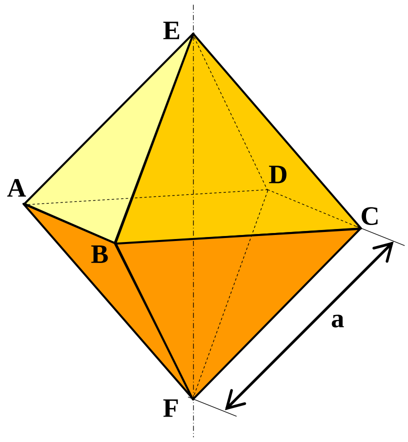
Cette même vue de dessus aide également à comprendre que pour un écrasement extrême, le cube devient un hexagone : pour nous c'est intéressant car si le $\mathbf{C_x}$ linéaire de l'hexagone nous reste inconnu, il doit être assez proche de celui d'un disque (du moins en référence à l'un de ses *diamètres*, par exemple la projection horizontale du segment oblique **ED**).

Nous avons eu l'idée de porter sur un graphe une proposition téméraire d'évolution du $\mathbf{C_x}$ linéaire d'un cube écrasé ou étiré entre deux de ses sommets opposés en référence à l'un de ses grands diamètres (nous y reviendrons). Sur le même graphe, nous avons porté également une autre proposition non moins osée de l'évolution du $\mathbf{C_x}$ linéaire de l'octaèdre régulier écrasé ou étiré en référence à l'un de ses diamètres :



En fuchsia est notre proposition pour le cube étiré ou écrasé ; cette proposition est prolongée à gauche jusqu'à ce qui doit être le $\mathbf{C_x}$ linéaire de l'hexagone en référence à son diamètre (mesuré entre sommet opposé par exemple **ED** sur notre dessin précédent) : nous avons pris ce $\mathbf{C_x}$ linéaire de l'hexagone comme valant celui du disque en référence à son diamètre.

En vert est notre proposition pour l'octaèdre régulier étiré ou écrasé.
Il n'aura échappé à personne que ce corps possède une section médiane carrée :



…ce qui fait que son écrasement (par exemple entre ses sommets **E** et **F**) produit ce carré **ABCD**. [202]

Ainsi que nous l'avons déjà vu, le C_x linéaire de la plaque carrée a été calculé à **9,136** par Mukherjee, Telukunta et Mukherjee en référence à son côté. Sur notre graphe, cependant, c'est par rapport à son "diamètre entre sommets" (c.à.d. à sa diagonale) que nous l'avons porté (à l'abscisse nulle) : Ce C_x linéaire, en référence à sa diagonale est donc divisé par Racine[2], soit **6,460**.

Pour l'octaèdre, c'est également le "diamètre entre sommets" qui nous a servi de référence (**AC** ou **BD** sur le dessin ci-dessus). Ces diamètres possèdent d'ailleurs la même longueur que la hauteur **EF**.

Ce qui signifie incidemment que l'octaèdre présente un élancement unitaire…

Pour le cube, dans un soucis d'uniformisation, nous avons pris comme "diamètre" de référence (pour le calcul du C_x linéaire) la projection sur un plan normal au déplacement (un plan équatorial donc si l'on qualifie le déplacement du cube de polaire) de ses segments **BF**, **ED** ou d'ailleurs **GC** : ainsi qu'on le voit sur la vue de dessus, lors de l'écrasement maximal du cube, ces trois segments deviennent des "diamètres" de l'hexagone : au demeurant leur projection sur le plan normal au déplacement reste constante pour tous les écrasements ou étirements et vaut $\mathbf{2}\sqrt{\frac{2}{3}}$ fois l'arête du cube, soit **1,633** cette arête.

La longueur du cube entre sommets nous sert, conjointement avec le "diamètre" de référence cité à l'instant, à la détermination de l'élancement de ce corps : calculée ainsi, cet élancement n'est pas tout à fait unitaire.

Ces options conduisent au graphe ci-dessus. Le C_x linéaire des ellipsoïdes allongés ou aplatis (en référence diamétrale) nous y sert de modèle, ainsi que celui du double cône tel que calculé par la méthode de Bowen et Masliyah (en référence à son diamètre) (méthode que nous avons déjà mise en application plus haut pour les double cônes).

[202] Mais l'écrasement entre deux autres sommets opposés produira le même résultat.

Cette estimation du $\mathbf{C_x}$ linéaire du double cône est sans doute imprécise (d'ailleurs elle ne passe pas par le disque, à l'élancement nul [203]), mais elle vient seconder la courbe (mathématiquement calculée, celle-là) des ellipsoïdes…

Sur notre graphe ci-dessus les courbes fuchsia tiretée et verte tiretée sont des propositions de prolongation des courbes en traits pleins de la même couleur : elles sont encore plus *osées* car elle s'éloignent beaucoup de l'abscisse du cube (déterminé avec précision par l'expérience) et de l'octaèdre (moins précis car déterminé par nous par la méthode de la sphéricité de Bowen et Masliyah) : il nous est impossible de dire à quelle distance de la courbe des ellipsoïdes ces deux courbes fuchsia et verte doivent se tenir, au dessus de l'élancement **2** : dans un cas comme celui-ci, la connaissance d'un seul point parmi les forts élancements serait un apport inestimable.

Ces propositions téméraires ne sont là que pour inciter des praticiens (ou des mathématiciens) à démontrer qu'elles sont fausses.

C_x linéaire des corps *composites* en régime de Stokes :

Par *corps composites* nous voulons signifier des corps réels composés de plusieurs corps simples (ces corps simples ayant déjà été étudiés par nous). Nous avons déjà vu un exemple de ces corps composite avec le corps composé de deux sphères tangentes.

Souvent, il suffira de réunir deux corps simples à l'aide d'une broche noyée pour composer nos corps composites et réaliser facilement des expériences de décantation dans un liquide visqueux.

Lorsque les deux sphères (ou les corps, en général) sont physiquement séparés, il convient, pour réaliser des expériences de décantation, de les libérer selon un certain protocole (plus difficile à mettre au point). Mais en tout état de cause, lorsqu'il s'agira de corps isotropiques, les lois du régime de Stokes feront que, de façon tout à fait contre-intuitive, deux corps isotropiques qui se suivent se suivront à distance constante sans même manifester de tendance à dévier de leur route…

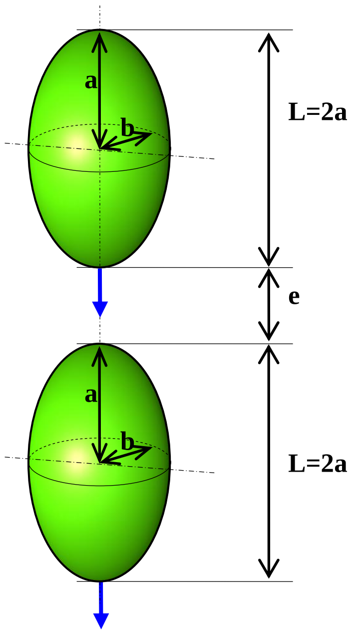
Nous verrons plus loin les caractéristiques de Traînée de chaînes de sphères identiques en contact. Ci-dessous, nous nous intéresserons plus spécialement à la décantation de couples de corps.

C_x linéaire de couples d'ellipsoïdes d'élancement 1, 2 et 5 en contact :

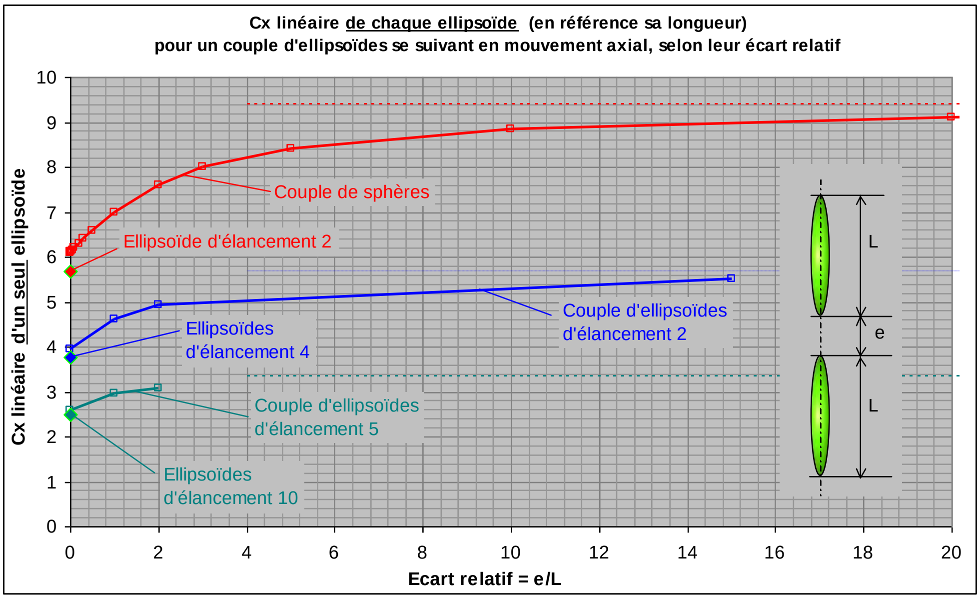
Dans leur texte "SUSPENSIONS OF PROLATE SPHEROIDS IN STOKES FLOW. Part 1, Claeys et Brady proposent en 1992 une méthode de calcul informatique de la Traînée de plusieurs corps décantant *de conserve*.

Ils comparent leurs résultats à ceux de Gluckman (auxquels nous n'avons pu avoir accès) à propos du mouvement, en régime de Stokes, de deux couples d'ellipsoïdes de révolution jumeaux d'élancement **2** ou **5**, le mouvement de chacun de ces couples d'ellipsoïdes jumeaux se faisant à la queue leu-leu parallèlement à leur grand axe commun comme ci-dessous :

[203] Nous avons préféré ne pas corriger cette imprécision dans notre calcul d'après Bowen et Masliyah…



Bien que, dans le tableau des Traînées qu'ils produisent, Claeys et Brady omettent d'indiquer si ces Traînées sont celles du couple de corps ou d'un seul corps, nous avons réussi à dégager le graphe suivant, énonçant leurs résultats (conformes à ceux de Gluckman, établis mathématiquement) et les comparant avec les résultats de Sun, Klaseboer, Khoo, et Chan pour un couple de sphères :



Les éléments en rouge de ce graphe reprennent les enseignements de Sun, Klaseboer, Khoo et Chan à propos d'un couple de sphères (enseignements dont nous avons déjà dit qu'ils sont conformes à ceux de Stimson et Jeffery) mais en les présentant différemment puisqu'ici c'est le **C_x** linéaire d'une seule des deux sphères qui est dessiné, ceci en fonction de l'écart relatif **e /L** (défini sur le graphe ci-dessus mais également sur le schéma montrant les ellipsoïdes verts).

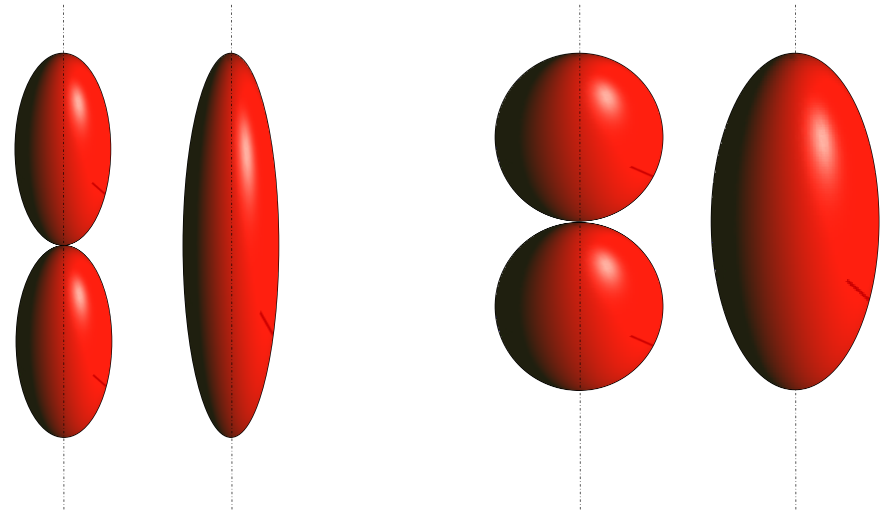
Comme précédemment, nous avons ajouté au-dessus de chaque courbe son asymptote (à l'ordonnée du **C_x** linéaire du corps isolé, c.-à-d. suffisamment loin de l'autre corps).

Mieux encore, nous avons porté à l'écart relatif nul (cas où les deux ellipsoïdes jumeaux sont en contact) le **C_x** linéaire de l'ellipsoïde de même diamètre que les ellipsoïdes jumeaux mais d'élancement double (soit l'élancement **4** pour le couple d'ellipsoïdes d'élancement **2**, **10** pour le couple d'ellipsoïdes d'élancement **5**, et **2** pour le couple de sphères tangentes) :

Il apparaît en effet que, lorsque les ellipsoïdes jumeaux se touchent deux à deux, leur $\mathbf{C_x}$ linéaire (en référence à leur longueur) est très proche de celui de cet ellipsoïde d'élancement double et de même diamètre [204], ceci surtout pour les élancements de **2** et **5**.

Ce constat fort intéressant mérite d'être mieux explicité :

Représentons ci-dessous les deux couples d'ellipsoïdes jumeaux d'élancement **2** puis d'élancement unitaire (des sphères) en contact :



Deux corps jumeaux d'élancement 2 — **Un corps d'élancement 4 et de même diamètre** — **Deux corps jumeaux d'élancement 1** — **Un corps d'élancement 2 et de même diamêtre**

L'intuition qui nous est venue à l'esprit est qu'en régime de Stokes, les couples de corps jumeaux (comme par exemple le couple de gauche, formé de corps d'élancement **2**) doit présenter une Traînée du même ordre (évidemment pour la même viscosité et la même vitesse) que le corps un peu plus à droite d'élancement **4** et de même diamètre.

Bien-sûr, ce dernier corps d'élancement **4** (et de même diamètre) n'a pas exactement la même surface mouillée que la somme des surface mouillée des deux corps jumeaux de gauche ; de plus, le rétreint marqué que ces deux corps de gauche marque à leur point de contact doit influer sur la distribution des pressions et des frictions.

Mais la comparaison est tentante (et qui ne tente rien n'a rien).

Et de fait, surtout pour les élancements **2** et **5** des corps jumeaux, cette comparaison est édifiante ! En d'autres termes, les deux $\mathbf{C_x}$ linéaires, en référence longueur, des ellipsoïdes d'élancement double s'insèrent très correctement dans notre graphe.

Cette constatation est une merveilleuse découverte. Ce pourrait être un hasard mais nous ne le pensons pas (et si c'était un hasard, d'ailleurs, ses vertus mnémotechniques ne seraient pas à négliger)…

[204] …et donc de longueur double de celle de chaque ellipsoïde.

Cependant, une question peut embarrasser nos lecteurs : pourquoi, s'agissant d'un graphe dessinant successivement le $\mathbf{C_x}$ linéaire de l'un seulement des ellipsoïdes jumeaux deux à deux (et non celui de chaque couples d'ellipsoïdes jumeaux), avons-nous fait figurer le $\mathbf{C_x}$ linéaire des trois ellipsoïdes d'élancement double dont la longueur, dans chaque cas, est la somme de celle des deux ellipsoïdes jumeaux ?

Nous pouvons le justifier de la façon suivante, en nous concentrant, par exemple, sur les corps de gauche du schéma ci-dessus (jumeaux d'élancement **2** et ellipsoïde d'élancement **4**) :

Appelons $\mathbf{C_{x\,L\,jum}}$ le $\mathbf{C_x}$ linéaire de chacun des ellipsoïdes jumeaux. Ce $\mathbf{C_x}$ linéaire n'est pas celui d'un ellipsoïde d'élancement **2** : il est moindre puisque les deux ellipsoïdes jumeaux interagissent beaucoup l'un sur l'autre (l'ellipsoïde amont faisant la trace de l'ellipsoïde aval et ce dernier assurant le profilage de l'arrière du premier [205])

La *Longueur de Traînée* du couple d'ellipsoïdes jumeaux est $\mathbf{2*C_{x\,L\,jum}*L}$ (nous parlons ici de la Longueur de Traînée des deux ellipsoïdes jumeaux et l'on se souvient que, par définition, le Traînée individuelle de ces deux corps est la même, en régime de Stokes).

Ceci posé, revenons à notre intuition que la *Longueur de Traînée* de ce couple est du même ordre de grandeur que celle de l'ellipsoïde d'élancement double (élancement **4**, donc) et de même diamètre.

La longueur physique de cet ellipsoïde d'élancement double est **2L**. Sa Longueur de Traînée est donc :

$$\mathbf{C_{x\,Lin\,2L\,4}*2L}$$

…l'indice **4** dans l'intitulé du $\mathbf{C_x}$ linéaire rappelant que cet ellipsoïde est d'élancement **4,** et la quantité **2L** (présente dans l'intitulé du $\mathbf{C_x}$ linéaire et en tant que longueur multiplicatrice) prenant acte du fait que la longueur de cet ellipsoïde d'élancement **4** est le double de celle des ellipsoïdes jumeaux d'élancement **2** (revoir à ce sujet notre schéma ci-dessus).

Pour comparer la longueur de Traînée de ces deux corps (le corps composite formé des deux ellipsoïdes jumeaux et l'ellipsoïde d'élancement double) il faut écrire :

$$\mathbf{2*C_{x\,L\,jum}*L \approx C_{x\,Lin\,2L\,4}*2L}$$

c.-à-d., en simplifiant, que :

$$\mathbf{C_{x\,L\,jum} \approx C_{x\,Lin\,2L\,4}}$$

…$\mathbf{C_{x\,L\,jum}}$ étant le $\mathbf{C_x}$ linéaire d'un seul des ellipsoïdes jumeaux (en référence à sa longueur **L**) et $\mathbf{C_{x\,Lin\,2L\,4}}$ étant le $\mathbf{C_x}$ linéaire de l'ellipsoïde d'élancement double (et de longueur **2L**).

Est-ce bien le cas ?

[205] Ces explication doivent rester mnémotechnique car elles sont surement trop influencées par notre expériences de hauts Reynolds où, par exemple, deux coureurs cyclistes en échappée (l'un juste derrière l'autre) roulent plus vite qu'un seul coureur ou que deux coureurs séparés d'une plus grande distance.

$C_{x\,L\,jum}$, le **C_x** linéaire d'un seul des ellipsoïdes jumeaux (en référence à sa longueur), a été calculé par nous d'après Claeys et Brady et Gluckman ; nous l'avons représenté ci-dessus.

Quant à **$C_{x\,Lin\,2L\,4}$**, le **C_x** linéaire de l'ellipsoïde d'élancement **4** et de même diamètre (en référence à sa propre longueur également, bien-sûr), nous l'avons obtenu par le calcul sur le graphe ci-dessus ; mais il est possible également de se reporter, pour l'estimer, à nos graphes montrant le **C_x** linéaire des ellipsoïdes de différents élancements, par exemple ce dernier.

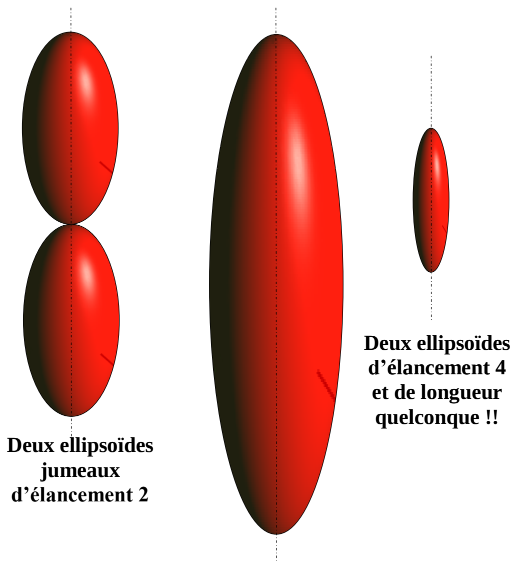
On y lit que l'ellipsoïde linéaire d'élancement **4** montre un **C_x** linéaire (en référence à sa propre longueur) de **3,75**.

L'ellipsoïde d'élancement **10**, quant à lui, présente un **C_x** linéaire (référence longueur) de **2,5** : c'est ce que l'on peut également lire tout à fait à gauche de notre graphe et bien-sûr à l'extrême droite de celui-ci.

Notons d'ailleurs ce fait remarquable que, dans l'établissement du graphe précédent, la longueur physique de l'ellipsoïde d'élancement double n'a pas été utilisée : nous avons juste reporté à l'abscisse nulle sur ce graphe le **C_x** linéaire (en référence à leur longueur) des ellipsoïdes d'élancement double (à savoir **2**, **4** et **10**) pris sur un de nos graphes précédents !

C'est-à-dire que nous aurions pu comparer le **C_x** linéaire de chaque ellipsoïde jumeau au **C_x** linéaire d'un ellipsoïde d'élancement double beaucoup plus petit en longueur ou d'ailleurs beaucoup plus grand :

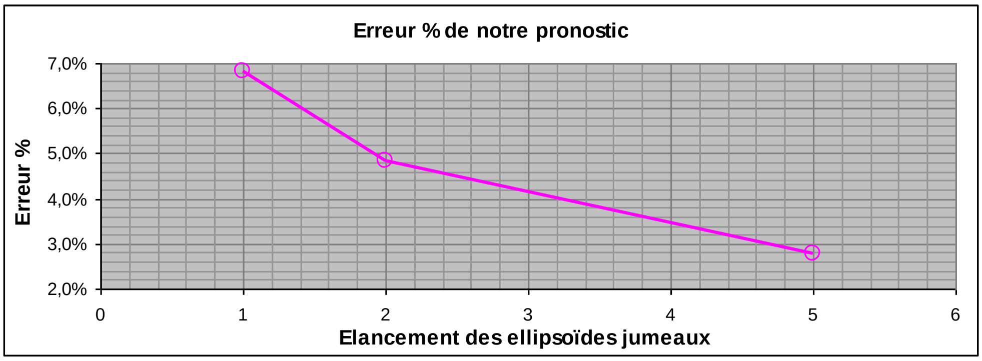
Comparaison du C_x linéaire (en référence longueur) de deux ellipsoïdes jumeaux d'élancement 2 avec le C_x linéaire d'ellipsoïdes d'élancement double



Cet libéralité est due au fait qu'en régime de Stokes, les **C_x** linéaires ne sont pas dépendant de la taille des corps mais dépendent au contraire de leur élancement (donc de leur silhouette, quelque soit la taille que l'on donne homothétiquement à cette silhouette) ; ceci évidemment tant que le Reynolds des corps respecte la condition d'être très inférieur à l'unité.

Ce phénomène qui nous a permit de rapprocher le $\mathbf{C_x}$ linéaire (référence longueur) de l'ellipsoïde d'élancement double du $\mathbf{C_x}$ linéaire (référence longueur, évidemment) de chacun des ellipsoïdes jumeaux en contact avec son alter-égo peut évidemment servir à pronostiquer le $\mathbf{C_x}$ linéaire de chacun des ellipsoïdes jumeaux d'élancement différent de **2** ou **4**.

Si nous avions pronostiqué que le $\mathbf{C_x}$ linaire de chacun des ellipsoïdes jumeaux (d'élancement **1**, **2** et **5**) vaut celui de l'ellipsoïde de même diamètre et d'élancement double, nous aurions commis cette erreur % :



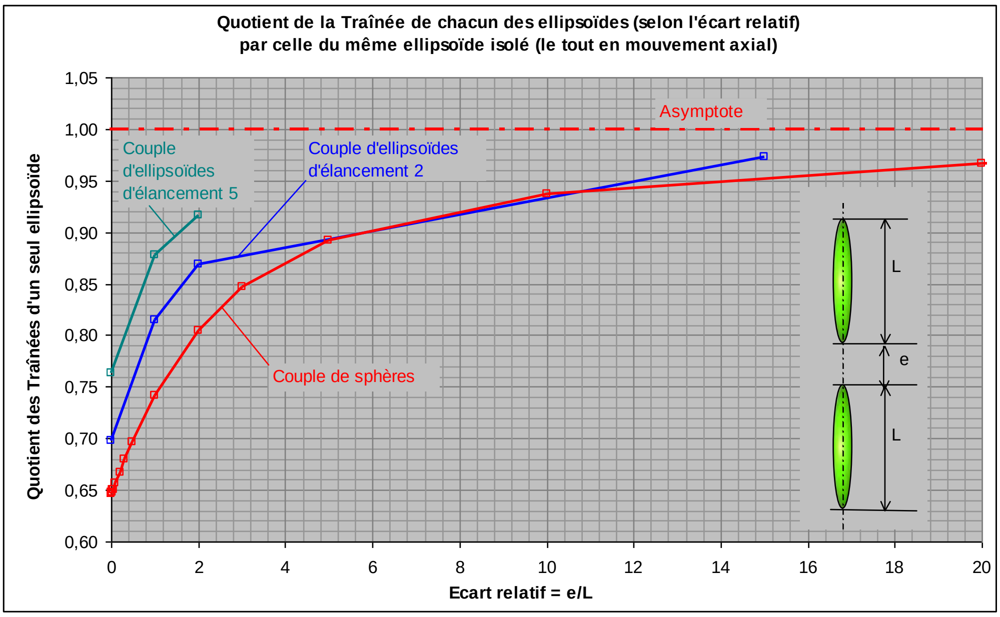
(nous n'avons fait ici que mesurer les écarts relatifs qui apparaissent sur notre graphe précédent)

Mais connaître ses erreurs permet de les corriger ! Si donc nous désirions connaître le $\mathbf{C_x}$ linéaire de chacun des ellipsoïdes jumeaux de n'importe quel élancement, nous pourrions corriger notre pronostic basé sur le $\mathbf{C_x}$ linéaire de l'ellipsoïde d'élancement double d'après ce dernier graphe pourtant fort sommaire !

Nous sommes même en droit de croire que cette méthode consistant à prendre le $\mathbf{C_x}$ linéaire d'élancement double comme $\mathbf{C_x}$ linéaire (référence longueur) de chacun des ellipsoïdes jumeaux d'élancement supérieur à **5** sera entachée d'une erreur inférieure **2,8 %**.

En attendant de prendre connaissance des travaux de Gluckman…

Une autre façon très instructive de présenter les résultats de Claeys et Brady (déjà montré dans notre graphe) est de calculer le quotient de Traînée de chacun des corps considéré par rapport à la Traînée du même corps lorsqu'il est isolé.

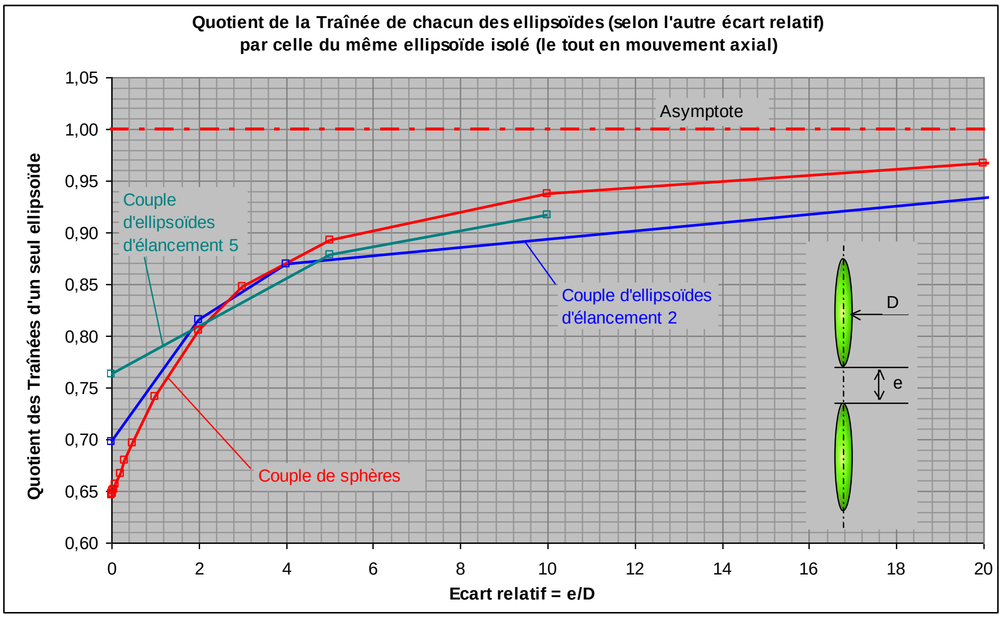


Ce panorama est intéressant car il montre bien que la Traînée des corps de plus grand élancement s'approche beaucoup plus vite de leur Traînée en tant que corps isolé.

Ceci est sans nul doute la conséquence du fait qu'ils sont plus pointus : on note que l'ellipsoïde d'élancement **5** atteint déjà le quotient de Traînées de **0,95** pour un écart relatif de ≈ **4** alors qu'il faut à l'ellipsoïde d'élancement **2** un écart relatif de ≈ **8** (en arrondissant la courbe) pour atteindre ce quotient de **0,95**.

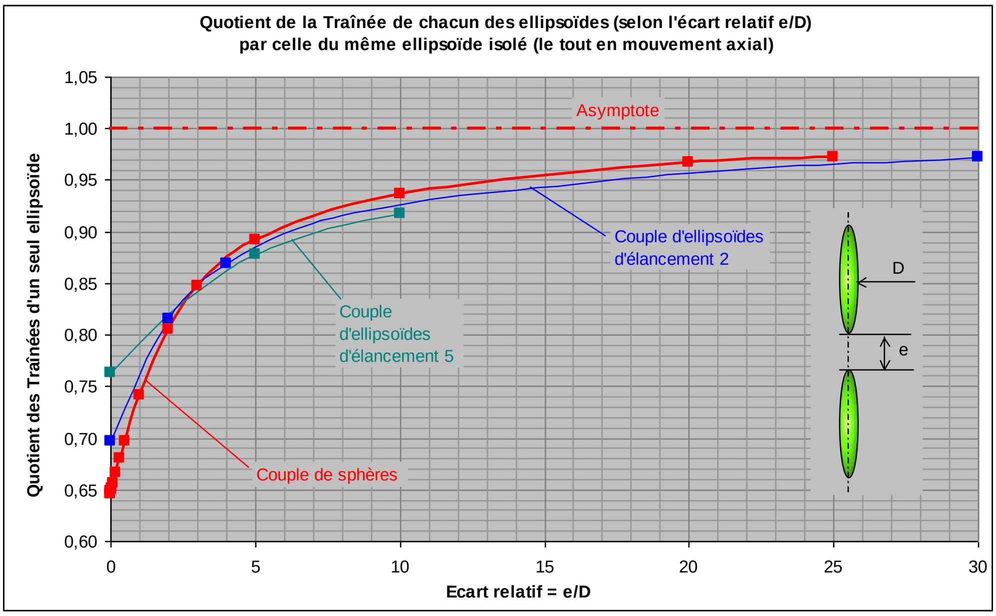
Encore faut-il préciser ici que l'écart relatif entre deux ellipsoïdes jumeaux se fait plus faible lorsque ces ellipsoïdes sont plus élancés !

Il nous faut donc montrer l'évolution des quotient de Traînée en fonction de l'écart relatif existant entre les ellipsoïdes (ou sphères) jumeaux (jumelles) en référence au diamètre **D** des corps :



Ici les trois courbes sont beaucoup plus proches l'une de l'autre dès que l'écart **e/D** se monte à **2** ou **3** (plage d'écart relatif où l'on constate un croisement des courbes).

Pour l'écart relatif **10**, il est difficile d'apprécier l'étagement des courbes (dès lors qu'on les arrondit par la pensée), mais elles doivent se tenir dans une plage d'ordonnées assez réduite (autour de **92,5 %**) ; ce que l'on peut mieux évaluer si l'on arrondit "manuellement" les courbes (avec les risques que cela comporte) :

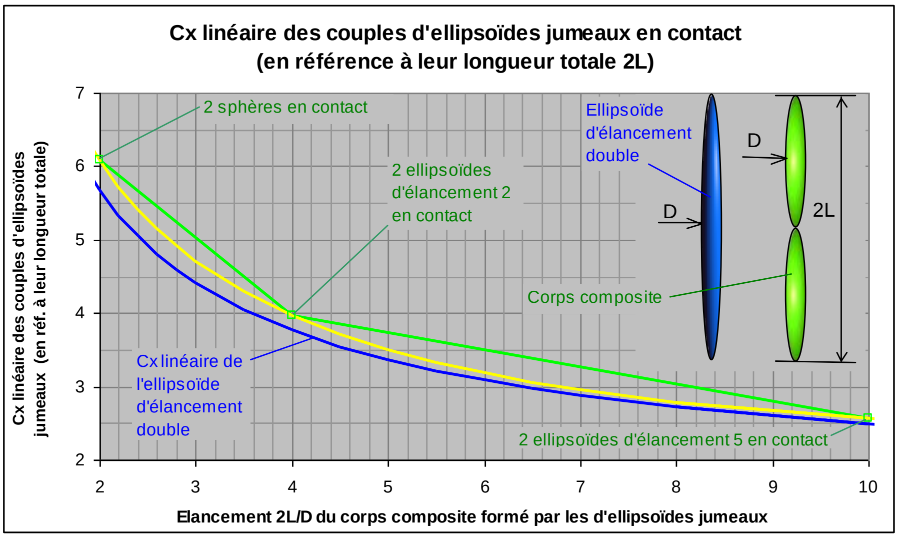


(sur ce graphe les marques pleines sont les données brutes de Claeys et Brady)

Le fait de prendre pour abscisse l'écart relatif **e/D** permet de représenter de façon plus claire l'influence de l'élancement sur la Traînée de corps jumeaux à proximité l'un de l'autre (et ceci sans la médiatisation que créée le choix d'une longueur de référence) : Le référencement des écarts à un étalon commun (le diamètre **D**) ressemble beaucoup aux référencements des mêmes écarts à l'étalon de longueur que représente le mètre.

Il est alors beaucoup plus facile de pratiquer l'expérience de pensée qui consiste à faire varier l'écart entre des sphères et des ellipsoïdes jumeaux de même petit diamètre, comme dessiné dans le schéma suivant qui expose trois situations conduisant à un quotient de Traînées de même ordre de grandeur (proche de **92** ou **93 %** puisque l'écart relatif **e/D** est identique et égal à **10**) :

Ceci étant exposé, en nous appuyant sur notre graphe tiré des travaux de Claeys et Brady, ou plutôt en nous concentrant sur son ordonnée nulle (qui correspond à des ellipsoïdes jumeaux en contact, formant des corps composites), nous pouvons donner une régression donnant le $\mathbf{C_x}$ linéaire des couples d'ellipsoïdes jumeaux en contact de n'importe quel élancement (formant des corps composites), ce $\mathbf{C_x}$ linéaire de couple gémellaire étant celui du corps composite complet (celui des deux ellipsoïdes, donc) et étant établi en référence à la longueur totale **2L** du corps composite :



Les trois marques carrées vertes sur ce graphe sont les trois valeurs du $\mathbf{C_x}$ linéaire des couples d'ellipsoïdes tirés des résultats de Claeys et Brady (le couple de sphères en contact pour l'élancement **2L/D = 2** et les couples d'ellipsoïdes d'élancement **2** et **5** en contact, ce qui fait des élancements de corps composites **4** et **10**).

Ces ordonnées sont donc les mêmes que celles du graphe précédent qui ne mesuraient que le $\mathbf{C_x}$ linéaire d'un seul ellipsoïde (en référence à sa seule longueur) parce que le $\mathbf{C_x}$ linéaire de chaque couple d'ellipsoïdes est ici pris en référence à leur longueur totale **2L**.

En bleu sur le même graphe est la courbe du $\mathbf{C_x}$ linéaire de l'ellipsoïde d'élancement double (dont la silhouette est dessinée en bleu également dans la vignette du graphe). L'élancement de cet ellipsoïde est évidemment **2L/D**.

Comme nous avons tout lieu de penser que cette courbe bleue est un modèle valable pour la courbe qui passerait par les trois marques carrées vertes si Claeys et Brady avaient calculé la Trainée des couples d'ellipsoïdes de tous les élancements possibles en contact, nous avons dessiné la régression jaune qui reprend sa courbure et passe (bien-sûr) par les trois marques carrées vertes.

L'équation de cette régression jaune est :

$$\mathbf{C_{xLin\ Couple\ réf\ 2L} \approx 9{,}5\ (2L/D)^{-0{,}67} + 0{,}053\ (2L/D)}$$

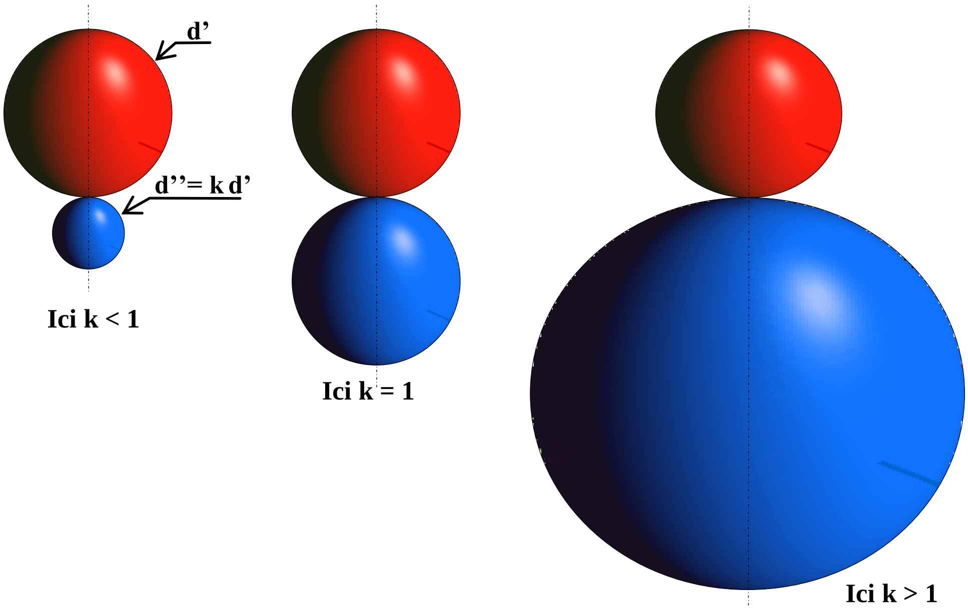
…qui est le $\mathbf{C_x}$ linéaire, en déplacement axial, des couples d'ellipsoïdes jumeaux d'élancement **L/D** en contact, en référence à la longueur totale **2L** du corps composite que forme chaque couple d'ellipsoïdes jumeaux.

Comme d'habitude, nous avons privilégié, dans cette régression, la simplicité de la forme, mais son erreur **%** (calculée aux trois marques connues par Claeys et Brady) est inférieure à **0,21 %**.

C_x linéaire d'un couple de sphères de diamètres différents en contact :

Dans leur texte, Cooley et O'Neill étudient la Traînée en régime de Stokes de deux sphères inégales en contact et en mouvement parallèle à la ligne rejoignant leurs centres.

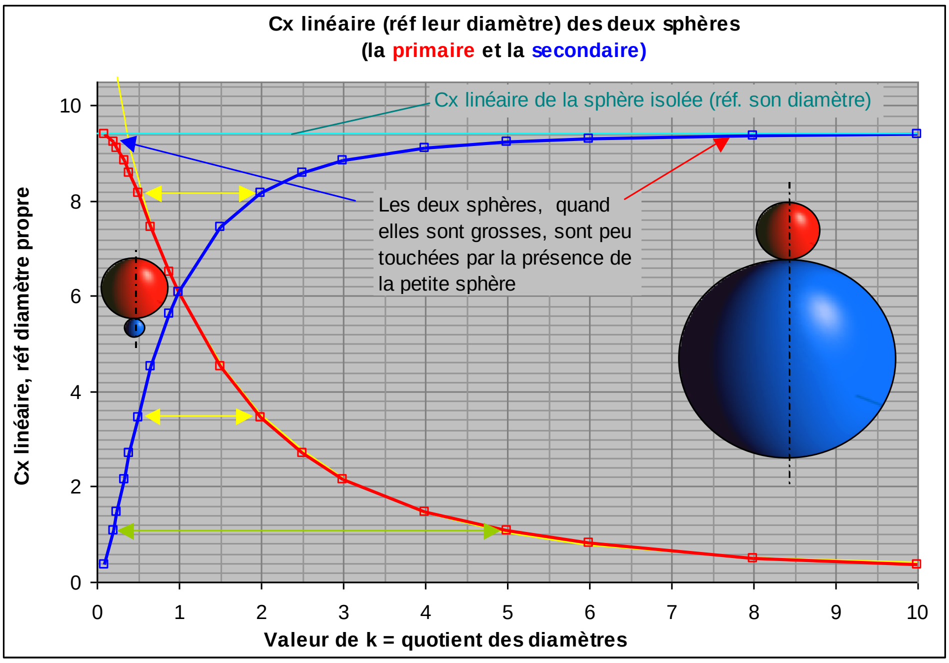
La taille relative des deux sphères est commandée par un paramètre **k** qui multiplie le diamètre **d'** de l'une des sphères (nommée par nous primaire) pour donner le diamètre **d''** de l'autre sphère (nommée par nous secondaire [206]) :



Cooley et O'Neill ont donné au paramètre multiplicateur **k** des valeurs allant de **1/10** à **10**, mais il est évident, compte tenu des symétries existant dans le domaine de Stokes, qu'une plage allant de **1/10** à **1** ou de **1** à **10** aurait suffi : en effet lorsque, ci-dessus, la sphère bleue secondaire devient plus grosse que la sphère rouge (**k > 1**, schéma de droite), on se retrouve, en inversant les couleurs et (si l'on veut) le sens du mouvement, dans la situation ou **k** est plus petit que **1** du schéma de gauche.

Ces mêmes auteurs publient leurs résultats sous la forme d'un tableau de valeurs donnant la Traînée de chacune des deux sphères pour des valeurs de **k** allant, comme nous l'avons dit, de **1/10** à **10**. Nous en avons tiré le graphe suivant de leur $\mathbf{C_x}$ linéaire (en référence, pour chaque sphère, à son propre diamètre) :

[206] Comme on s'en souvient, la Traînée de ce couple de sphère et même de chaque sphère, est la même dans les deux sens. Les mots *primaire* et *secondaire* ne font donc pas référence à la place (avant ou arrière) de chaque sphère dans leur mouvement…



En rouge est le C_x linéaire de la sphère rouge et en bleu celui de la sphère bleue.

Comme on le remarque sur le graphe, lorsque l'une ou l'autre des sphères est grosse (par rapport à l'autre), son C_x linéaire (relatif à son propre diamètre) s'approche asymptotiquement du C_x linéaire de la sphère isolée (**3** $\boldsymbol{\pi}$) ; c.-à-d. que l'écoulement sur sa surface et surtout la Traînée qui en résulte est peu modifié par la présence de l'autre sphère, beaucoup plus petite qu'elle.

Nous venons d'écrire *asymptotiquement* : le rapprochement, à droite en haut, du C_x linéaire bleu de l'asymptote **3** $\boldsymbol{\pi}$ apparaît bien asymptotique. Mais à gauche en haut, le rapprochement de la courbe rouge de la même asymptote le paraît moins : ceci est dû à la contraction des abscisses qui représentent, entre **1** et **0** la même évolution relative des diamètres qui se produit entre **1** et **10** (c.-à-d. une multiplication par **10** de l'un des diamètres par rapport à l'autre).

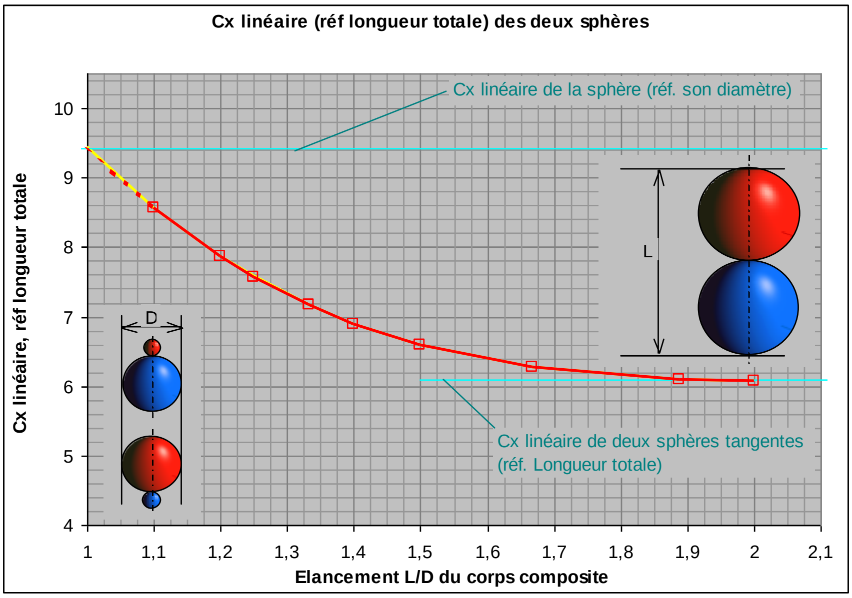
Au demeurant, comme le soulignent les flèches doubles jaunes, le C_x linéaire des deux sphères est égal pour des nombres **k** tels que **0,5** et **2** (voir les deux flèches jaunes) ou encore **0,2** et **5** (voir la flèche verte, mais il existe une égalité similaire en haut, à l'ordonnée **9,233**) : la courbe rouge, à l'abscisse **k**, a évidemment la même ordonnée que la courbe bleue à l'abscisse **1/k**…

Sur ce dernier graphe, on remarque sous la courbe rouge la régression jaune d'équation :

$$=8*EXP(-0{,}59*K)+1{,}6/K^{0{,}6}$$

Cette régression donne des résultats valides à **2,82 %** entre les **k 2/3** et **8**, ces bornes comprises, ce qui pourrait servir à beaucoup d'expériences.

Mais puisque nous nous intéressons aux corps composites, c'est surtout la somme de la Traînée des deux sphères qui nous intéresse ou plutôt le C_x linéaire du corps formé par les deux sphères. Voici ce C_x linéaire calculé en référence à la longueur **L** du corps composite :



Le choix de la référence pour un C_x linéaire est libre mais celui adopté ici donne lieu à une assez bonne régression (nous y reviendrons)

En abscisses sont les élancements **L/D** du corps composite, **D** étant toujours le diamètre de la plus grosse sphère.

Le tableau de résultats de Cooley et O'Neill valant pour les **k** compris entre **1/10** et **10**, l'élancement correspondant du corps composite va de **1,1** (pour **k = 1/10**) à **1,1** (encore, pour **k = 10**), en passant par **2** pour **k = 1**. Donc, sur toute la plage des **k** envisagés par les auteurs, notre courbe sera décrite en descendant puis en montant (avec rebroussement à l'abscisse **2**.

Cependant, cette plage ne couvre pas entièrement tous les cas possibles de diamètres relatifs : pour les diamètres de grosse sphère supérieurs à **10** fois celui de la petite sphère, nos auteurs ne donnent pas de résultats (entre les abscisses **1** et **1,1**).

C'est sans importance pratique puisque la courbe rouge, à l'abscisse **1,1**, vise de façon très satisfaisante le point (**1** ; **3** π) qui représente la configuration de la sphère unique (ou avec une sphère secondaire minuscule) : on peut être quasiment sûr en conséquence que des configurations avec l'une des sphères un peu moins minuscule (par rapport à l'autre) dessineront des marques sur la prolongation de la courbe rouge que nous avons dessinée en tiretés rouges entre les élancement **1,1** et **1**.

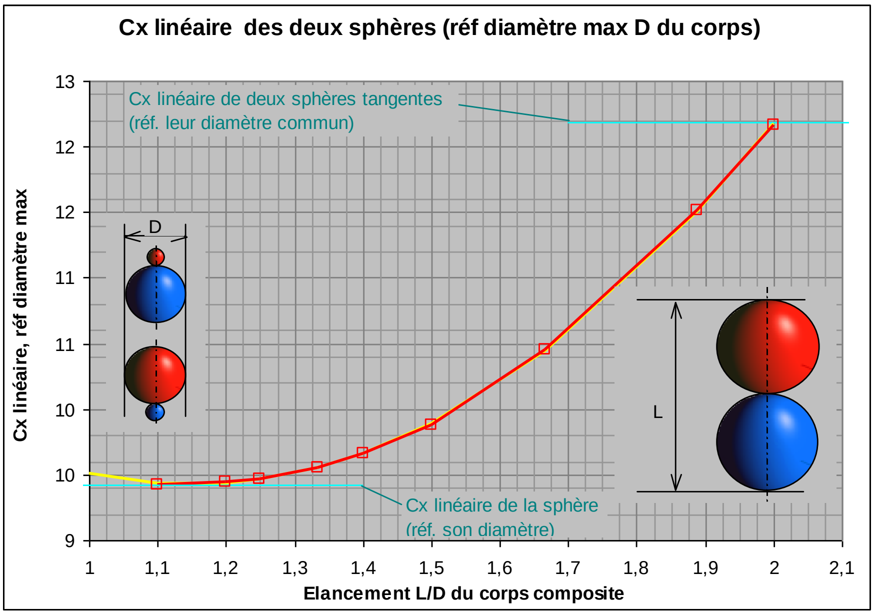
Comme on le remarque sur ce dernier graphe, à l'approche de l'élancement **2**, la courbe rouge vient tangenter asymptotiquement le C_x linéaire déjà rencontré par nous plus haut pour les deux sphères égales tangentes en déplacement axial (**12,186/2 = 6,093**, car ici en référence, non pas à leur diamètre commun mais à leur longueur totale qui vaut le double).

Notre régression jaune (que l'on aperçoit à peine ci-dessus cheminant derrière la courbe rouge mais qui monte jusqu'à la marque (**1** ; **3** π)) est précise à **0,14 %** entre les élancements **1** et **2** et a pour équation :

$$\boxed{C_{x\ \text{lin réf}\ L} = -2{,}95\,\lambda^3 + 17{,}95\,\lambda^2 - 36{,}564\,\lambda + 31}$$

…qui est le C_x linéaire du couple de sphères inégales en déplacement parallèle à la ligne de leurs centres, en référence à la longueur totale du couple de sphère, si λ est l'élancement total **L/D** du corps.

Lorsque l'on détermine le **C_x** linéaire du corps composite en référence à son plus grand diamètre (le diamètre de la sphère la plus grosse), on trouve une courbe également régulière (en rouge ci-dessous) :



Une régression quadratique assez précise est proposée par Excel pour cette courbe rouge (c'est la courbe jaune qui chemine sous la rouge). Son équation (que nous n'avons pas retravaillée pour en simplifier les coefficients) est :

$$\mathbf{C_{x\,\text{lin réf}\,Dmax} = 3{,}7812\,\lambda^2 - 8{,}6786\,\lambda + 14{,}404}$$

À part près de l'élancement unitaire, où l'on sait que ce **C_x** linéaire vaut **~ 3 π**, elle est précise à **0,12 %** près…

Une autre façon de traiter ce phénomène d'interférence entre deux sphères de diamètres inégaux est de faire appel à ce qu'il est convenu d'appeler, s'agissant des hauts Reynolds, le *Coefficient d'Interférence*.

Définition du Coefficient d'Interférence :

Pour les hauts Reynolds, ce *Coefficient d'Interférence* est le quotient de la Traînée totale de deux corps proches l'un de l'autre par la Traînée totale des deux corps supposés très loin l'un de l'autre.

Toujours dans ce cas des hauts Reynolds, ledit *Coefficient d'Interférence* est aussi le quotient du **C_x** du couple de corps proches l'un de l'autre en référence à la somme de leur surface (surface frontale, par ex.) par le **C_x** des deux corps isolés en référence à la même surface [207].

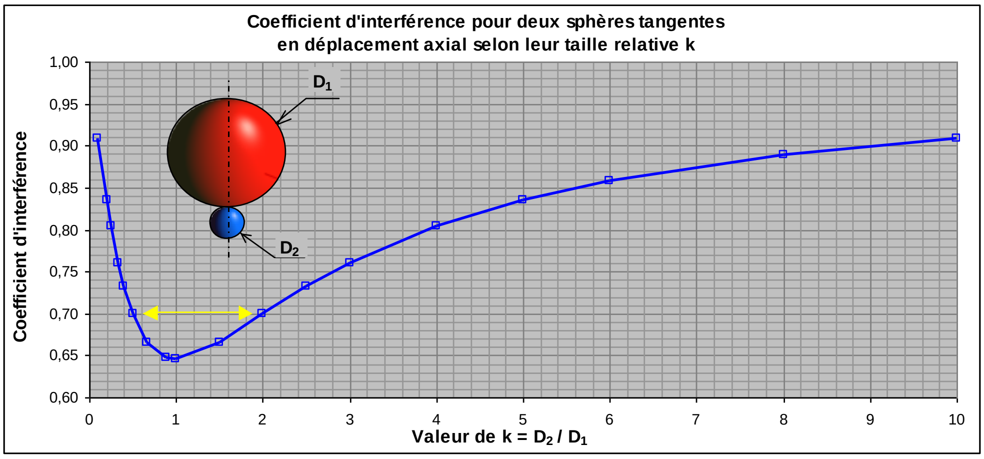
Dans notre cas du régime de Stokes, le *Coefficient d'Interférence* sera de même le quotient de la somme des deux Traînées des corps proches par la somme des Traînées des corps isolés l'un de l'autre. [208]

---

[207] …soit la somme des Traînées des deux corps divisée par la somme de leur surface (frontale, dans notre exemple).

[208] Quand on rédige en langage mathématique cette dernière définition, des simplifications interviennent. Nous y reviendrons plus bas.

Ainsi défini, et dès lors qu'on aura noté que ce Coefficient d'Interférence prend des valeurs inférieures à l'unité lorsque les interférences diminuent la Traînée de l'ensemble étudié, il peut être dessiné comme ci-dessous :



Au vu de ce graphe, il apparaît que ledit coefficient admet un point bas pour la valeur unitaire de **k** (sphères égales) : ce point bas est évidemment donné par le quotient du $\mathbf{C_x}$ de deux sphères égales en contact (**12,186**, en référence à un seul diamètre **D**) par le double du $\mathbf{C_x}$ linéaire de la sphère isolée (**3** $\boldsymbol{\pi}$), ce qui donne **0,6465** [209].

La partie gauche de la courbe vise très bien le point [**0** ; **1**] (ce qui signifie « pas d'interférence »), de la même façon (même si ce n'est pas apparent) que la partie droite de la courbe vise l'ordonnée **1** à l'abscisse infinie. En effet, comme l'indique la flèche jaune à double fer, l'ordonnée de la courbe bleue pour une valeur de **k** est la même que celle pour **1/k**.

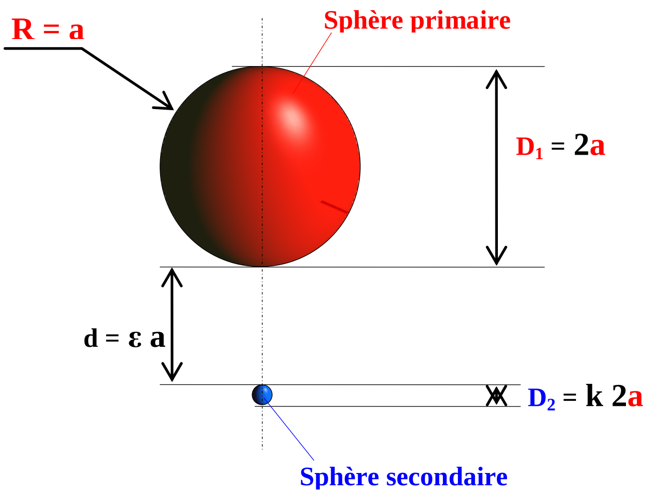
C_x linéaire de couples virtuels de sphères de diamètres différents à distance variable :

Dans leur texte que nous avons déjà exploité, Cooley et O'Neil poussent plus avant la méthode de Stimson & Jeffery et calculent la Traînée de deux couples de sphères de diamètres différents se suivant à distance quelconque (mais fixe) dans un déplacement parallèle à la ligne de leur centre et à la même vitesse.

Le diamètre de la deuxième sphère (que nous appellerons *secondaire* et que nous colorerons en bleu) est défini par multiplication par un facteur **k** du diamètre de la première sphère (que nous appellerons *primaire* et que nous colorerons en rouge).

On a donc $\mathbf{D_2} = \mathbf{k}\ \mathbf{D_1}$:

[209] Si l'on a du mal à comprendre ce calcul, il faut faire le quotient des Longueurs Équivalentes de Traînée, à savoir **[12,186*D] / [2*3π].**

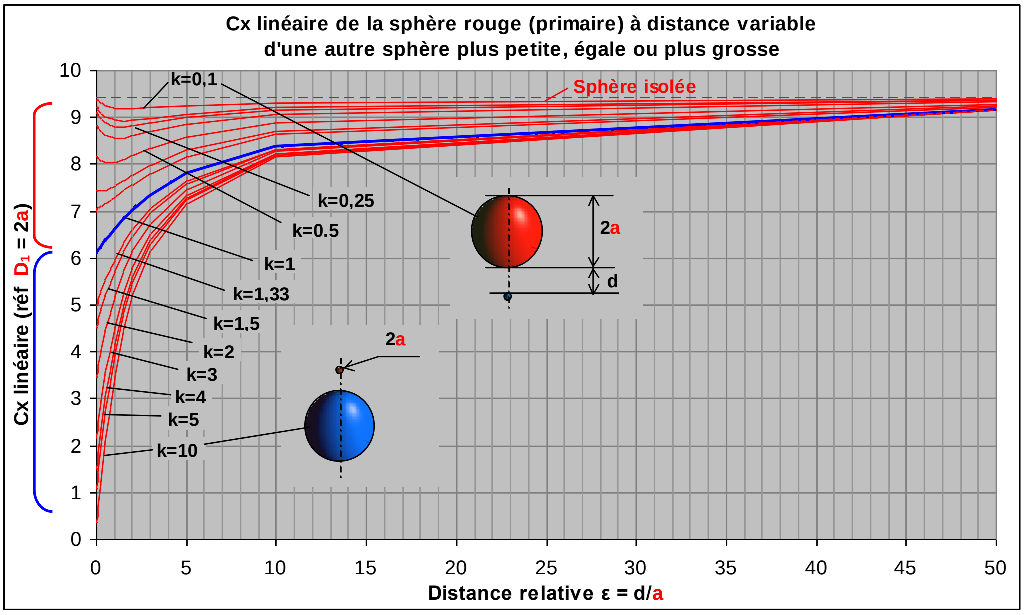


La distance **d** existant entre les deux sphères est déterminée par le paramètre **ε** qui vaut **d/a**. Cette distance est donc variable selon **ε** mais fixe lors de chaque calcul (en quoi les deux sphères forment alors un couple virtuel dont chaque membre se déplace à la même vitesse en régime de Stokes).

Cooley et O'Neil ont fait varier la distance adimensionnée **ε** depuis **0** jusqu'à **50**.

Notre saisie des tableaux de valeurs de ces auteurs nous a permis le calcul du $\mathbf{C_x}$ linéaire de chaque sphère en référence à son propre diamètre, mais selon les valeurs d'**ε** (la distance entre les deux sphères adimensionnée par le rayon **a** de la sphère primaire)…

Voici en rouge les évolutions du $\mathbf{C_x}$ linéaire de la sphère primaire (rouge également sur nos schémas) selon la valeur du quotient des diamètres **k** :



Les courbes qui aboutissent à l'axe vertical dans l'emprise de l'accolade rouge représentent le $\mathbf{C_x}$ linéaire de sphères primaires rouges plus grosses que les sphères bleues secondaires en présence des quelles elles sont mises. Par exemple, pour la valeur

0,1 de ce paramètre **k**, par exemple, la sphère secondaire bleue est **10** fois plus petite que la rouge (la primaire) ce qui dessine à peu près le dessin du haut sur le graphe.

Au contraire, les courbes qui aboutissent à l'axe vertical dans l'emprise de l'accolade bleue représentent le C_x linéaire de sphère primaire rouges en présence de sphères secondaires bleues plus grosses. Par exemple, pour la valeur **10** de ce paramètre **k**, c'est l'autre schéma (à gauche en bas) qui représente le rapport des diamètres : la sphère secondaire bleue est **10** fois plus grosse que la rouge.

L'une des courbes (correspondant à la valeur unitaire de **k**) a été colorée par nous en bleu parce que, bien qu'elle donne la C_x linéaire de la sphère primaire rouge, elle donne également celui de la sphère secondaire bleue (nous revenons sur le C_x linéaire de cette sphère secondaire bleue plus bas).

En abscisse est la distance adimensionnée (ou relative au rayon **a** de la sphère primaire) $\varepsilon = d/a$.

L'horizontale rouge tiretée en partie haute du graphe donne le C_x linéaire de la sphère isolée (**3 π**).

Il est patent que pour les grandes distance relative **ε**, toutes les courbes prennent cette horizontale comme asymptote. Cependant, même pour la courbe bleue relatant le C_x linéaire de deux sphères égales (**k = 1**) il faut une distance entre ces deux sphère de **50** rayons **a** pour que l'asymptote soit vraiment approchée.

Pour les **k** faibles (courbes rouges du haut), c.-à-d. sphère secondaire très petite à petite, le C_x linéaire de la sphère primaire rouge reste assez proche de **3 π** : la petite sphère a peu d'influence sur l'écoulement de la grosse (et d'autant moins d'influence qu'elle est petite) ; c'est un phénomène que nous avons déjà vu plus haut avec les sphères en contact.

Cependant, une curieuse oscillation des courbes se produit pour les faibles distances relatives **ε** : à valeur de **k** donnée, lorsque la sphère bleu secondaire s'écarte de la rouge (primaire et beaucoup plus grosse) il se produit une légère baisse du C_x linéaire de la sphère primaire (et donc une légère baisse de sa Traînée).

On peut donc dire qu'en se décollant de la grosse sphère la petite sphère réalise "un certain carénage" de la grosse sphère.

Ainsi, lorsque le mouvement des sphères (à distance **ε** donnée) se produit petite sphère en avant, on peut voir la diminution du C_x linéaire de la grosse sphère comme due à la présence du corps précurseur que constitue la petite sphère : si ce phénomène de carénage par corps précurseur existe aux hauts Reynolds (et est utilisé sur certains missiles lancés de sous-marins), il faut évidemment le considérer dans ce cas des deux sphères comme une aide mnémotechnique car les lois qui président au régime de Stokes sont évidemment toutes autres que celles qui président aux haut Reynolds.

Si par contre le mouvement des sphères (toujours à distance **ε** donnée) se produit petite sphère à l'arrière, on sait que, par raison de symétrie, le gain en Traînée de la grosse sphère sera le même et on peut alors voir la présence de la petite sphère comme créant une sorte de carénage de culot (au moins du point de vue mnémotechnique)…

Il faut noter que ces points bas des courbes près de l'abscisse nulle n'existent plus pour la valeur unitaire de **k** (sphère de même diamètre) : Cooley et O'Neil notent même que ce point bas n'existe que si la sphère étudiée a un diamètre supérieur aux **10/7ème** du diamètre de l'autre sphère.

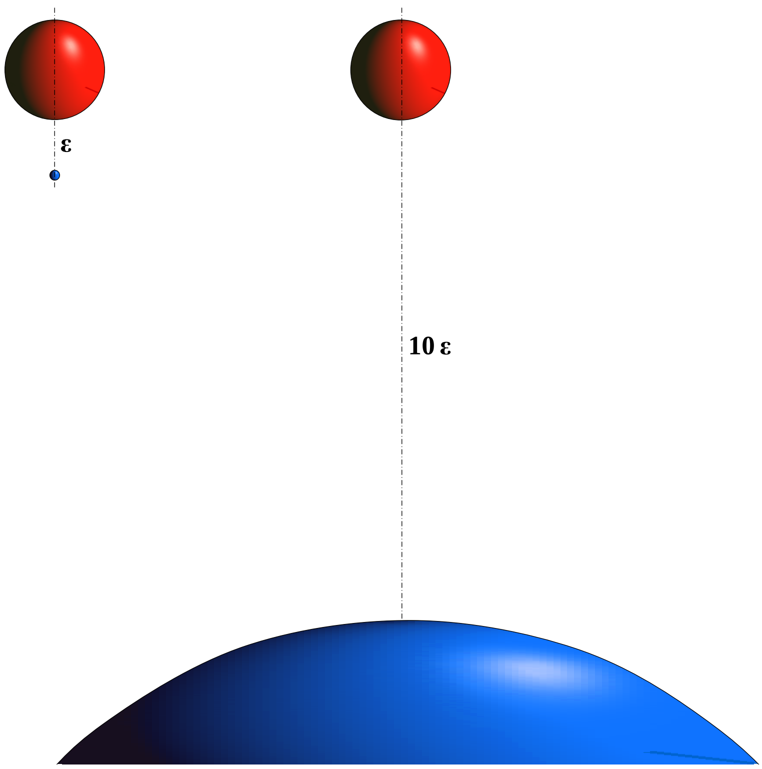
Nous verrons d'ailleurs plus bas que de tels points bas (cuvettes de Traînée minimale) existe également pour les corps composites constitués d'une sphère et d'un ellipsoïde se déplaçant à la même vitesse à une distance fixée l'une de l'autre…

Mais revenons à nos sphères inégales :

Pour les plus fortes valeurs de **k** et les faibles **ε**, la sphère bleue (devenue grosse) est prépondérante et son écoulement submerge celui se produisant sur la (petite) sphère rouge qui voit alors son C_x linéaire baisser (à presque rien pour **k = 10** et **ε** faibles, en bas à gauche du graphe) même si ce même C_x linéaire de la sphère rouge (petite) rejoint naturellement celui de la sphère isolée quand elle est très éloignée de l'autre sphère (forts **ε** à droite du graphe).

D'un façon générale, cependant, l'écoulement sur les couples de sphères créés par toutes les valeurs de **k** et **ε** étant symétrique, il est possible, au vu du tableau de nombres fourni par Cooley et O'Neil (nombres qui ont donné les courbes de C_x linéaires de la sphère primaire –ou rouge- du graphe ci-dessus), de connaître également les C_x linéaires de la sphère bleue pour les mêmes distances relatives **ε** (distance adimensionnée par référence au rayon **a** de la sphère primaire).

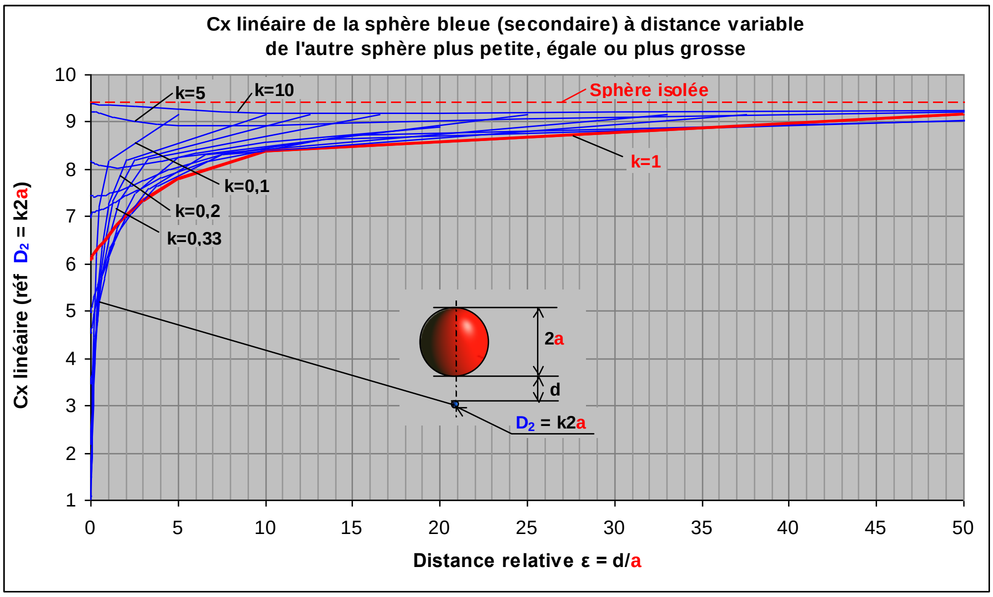
En effet, sur le schéma ci-dessous et du point de vue des écoulements de Stokes, la toute petite sphère bleue de gauche est à la sphère rouge au-dessus d'elle ce que la sphère rouge de droite est à la très grosse sphère bleue (représentée ici incomplètement) :



Les deux membres du premier couple de sphères sont espacés de **ε**, alors que les deux membres du deuxième couple sont espacé de **10 ε**, mais il faut cela pour que la géométrie des deux couples soit parfaitement homothétique…

Bref, la Traînée des sphères bleues est exprimée implicitement par la famille de courbes rouges du graphe précédent.

On peut donc en déduire les courbes donnant le C_x linéaire des sphères secondaires (bleues) pour presque toutes les valeurs possibles :



Sur ce graphe la courbe rouge correspond à la valeur unitaire de **k** (sphère de même diamètre).

On peut cependant trouver curieux que ce graphe bleu ne dessine pas exactement les mêmes courbes que le précédent puisque le problème de la Traînée des sphères rouges et bleues admet la symétrie *implicite* que nous venons d'énoncer.

Mais c'est que la distance relative **ε** qui sépare les sphères est resté ci-dessus adimensionné par quotient avec le rayon **a** de la sphère primaire (puisque **ε = d/a**) et non par quotient avec le rayon de la sphère secondaire bleue : il en résulte une homothétie en **1/k** des abscisses.

Si l'on en doute, on peut constater que les points bas existant sur le graphe précédent existe également ici, mais à une abscisse d'autant plus décalée que **k** est distant de l'unité.

Par contre, toujours sur le graphe ci-dessus, l'aboutissement des courbes bleues sur l'axe des ordonnées (aux ordonnées **7,1**, **7,4**, **8,2**, **8,8**, **9,1**, par exemple) est bien le même que celui sur le graphe précédent car pour les ordonnées nulles, l'homothétie en **1/k** des abscisses ne produit aucun changement.

La symétrie implicite des sphères primaire et secondaire dont nous venons de faire état peut s'exprimer de la façon suivante :

Dès lors que le C_x linéaire de la sphère primaire rouge (en référence à son propre diamètre) est donné pour un certain quotient **k** des diamètres et un certain écart relatif **ε** par notre premier graphe, il est possible de tirer de ce même graphe le C_x linéaire de la sphère secondaire bleue (en référence à son propre diamètre) : il suffit de chercher ce $\mathbf{C_x}$ linéaire à la valeur **1/k** du quotient des diamètres et à l'espacement relatif **ε /k**.

Autrement dit, si l'on appelle ① la sphère primaire et ② la sphère secondaire :

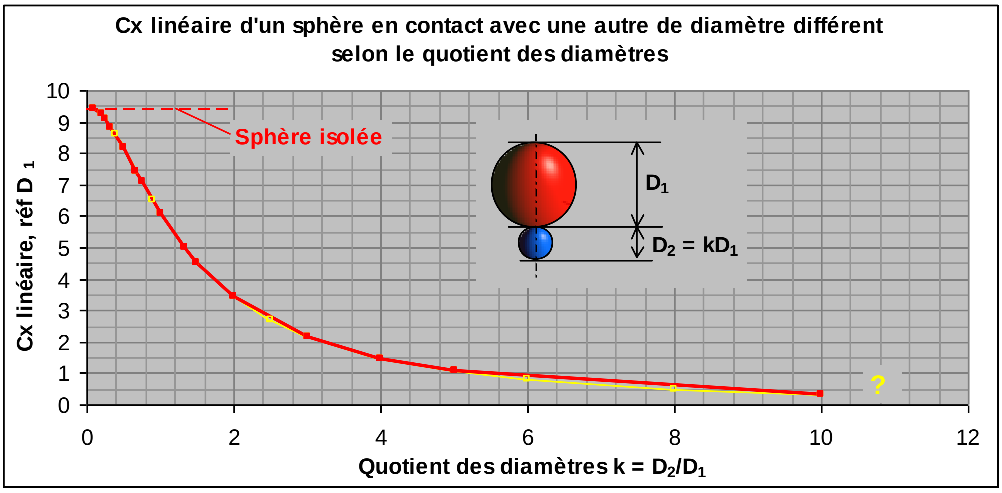
$\mathbf{C_{xLin\ D2}}$ de ② pour [**k** ;**ε**] = $\mathbf{C_{xLin\ D1}}$ de ① pour [**1/k** ;**ε/k**]

Ainsi, pour le quotient des diamètres **k = 0,1** et pour l'espacement relatif **ε** :

→ le $\mathbf{C_X}$ linéaire de la sphère primaire (rouge), en référence à son propre diamètre, se situe sur le graphe à [**0,1** ;**ε**].

→ le $\mathbf{C_X}$ linéaire de la sphère secondaire (bleue), en référence à son propre diamètre, devra être pris sur le même graphe à [**1/k = 10** ; **ε /k = 10ε**]

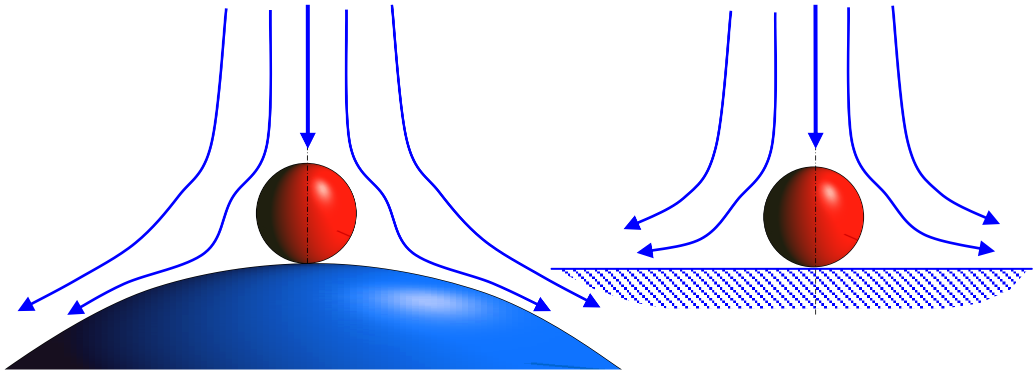
Se pose à présent la question de la valeur qu'atteindrait le $\mathbf{C_x}$ linéaire d'une extrêmement petite sphère au contact d'une sphère extrêmement grande (l'ensemble toujours en mouvement axial) : ce $\mathbf{C_x}$ linéaire est il nul ou s'approche-t-il d'une valeur asymptotique ? En ne nous intéressant, dans le tableau de valeurs de Cooley et O'Neil, qu'aux sphères en contact (de diamètres différents, bien-sûr) il est aisé de tracer la courbe rouge suivante, qui représente le $\mathbf{C_x}$ linéaire (en référence à son diamètre) de la sphère primaire au contact avec la sphère secondaire (de diamètre de plus en plus fort à mesure que **k**, pris ici comme abscisse, s'accroît) :



La courbe jaune, que l'on aperçoit derrière la rouge, apporte la précision de marques supplémentaires : elle est tirée du même texte de Cooley et O'Neil dans sa partie consacrée aux sphères inégales en contact (tableau 1 de ce même texte).

Ainsi que le symbolise notre point d'interrogation jaune à l'abscisse **10,8**, il est difficile d'extrapoler les courbes pour les très forts quotients de diamètres **k**.

En tout état de cause, la logique voudrait que le $\mathbf{C_x}$ linéaire d'une sphère au contact d'une autre sphère beaucoup plus grande soit le même que celui d'une sphère en contact d'un plan infini sur lequel soufflerait un flux perpendiculaire (cas de droite ci-dessous, que l'on nomme écoulement hyperbolique ou écoulement de stagnation) :



Sur ce dernier schéma, le mouvement relatif du fluide visqueux est symbolisé par les ligne de courant bleues…

Lors d'une modification d'échelle (ce qui correspond à une modification du diamètre de la sphère posée sur le plan), la forme des lignes de courant (ici dessinées en bleu) ne change pas sur le schéma de droite. Par contre la vitesse de l'écoulement à l'approche de la sphère rouge se fera de plus en plus faible à mesure que la sphère deviendra petite ; on donc en droit de penser que le $\mathbf{C_x}$ linéaire d'une sphère de très petite taille posée sur un plan en écoulement hyperbolique (ou de stagnation) tend vers un asymptote nulle.

Dans le même genre de situation, mais s'agissant d'un écoulement transverse (écoulement parallèle au plan), O'Neill a calculé analytiquement en 1968 [210] le $\mathbf{C_x}$ quadratique de la sphère posé sur le plan (cette situation correspond à une sphère posée sur un plan dans un écoulement à Couche Limite évoluant linéairement par rapport à la distance au plan) : Ce $\mathbf{C_x}$ quadratique est :

$$\mathbf{C_{xQuad} = 1{,}7009\ \frac{24}{R_{eD}}}$$

…le Reynolds $\mathbf{R_{eD}}$ étant calculé à partir du diamètre de la sphère, de la vitesse de l'écoulement à la hauteur du centre de la sphère et de la viscosité dynamique. On en déduit que le $\mathbf{C_x}$ linéaire de la sphère dans cet écoulement transverse (en référence à son diamètre **D**) vaut **1,7009** fois celui d'une sphère en décantation libre, ce qui fait $\mathbf{C_{xLin\ réf\ D} = 16{,}03}$ (la vitesse prise pour déterminer ce $\mathbf{C_x}$ linéaire étant la vitesse à la hauteur du centre de la sphère).

Coefficient d'Interférence de deux sphères inégales plus ou moins distantes :

Comme l'avons fait plus haut à propos des sphères inégales en contact, on peut définir un Coefficient d'Interférence qui clarifiera la diminution de Traînée totale des deux sphères inégales en présence l'une de l'autre, même si ici elles ne sont pas en contact.

Ce *Coefficient d'Interférence* sera toujours le quotient de la Traînée totale de deux corps proche l'un de l'autre par la Traînée totale des deux corps supposés très loin l'un de l'autre.

Si l'on exprime la longueur de Traînée du corps composite, on obtient :

---

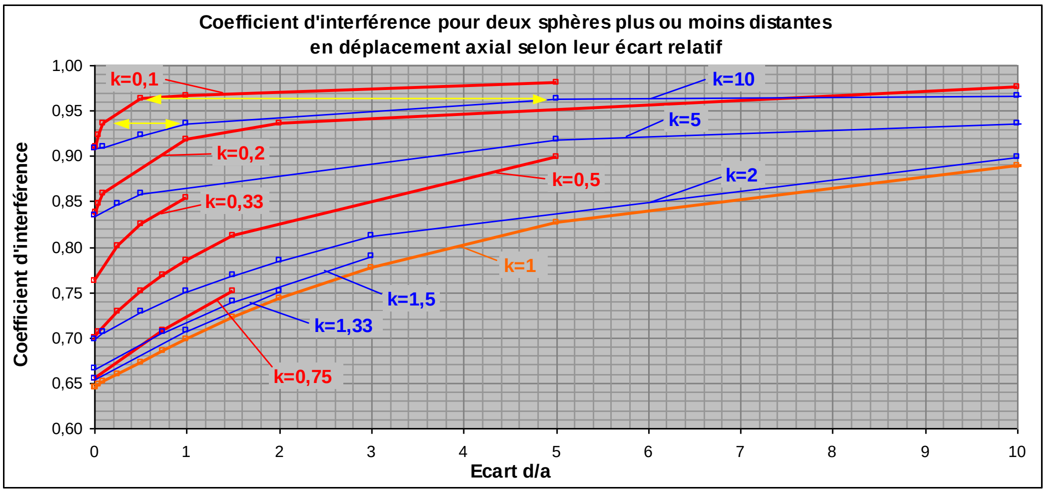
[210] …cité par Liu, Chien, Lo, Lin, Chen et Tsai dans « Drag Coefficient of a Spherical Particle Attached on the Flat Surface ».

$[C_{xLin ①}*D_1 + C_{xLin ②}D_2] / [3\pi D_1 + 3\pi D_2]$,

…ce qui, après simplification et si l'on se souvient que **$D_2 = k D_1$,** donne :

$[C_{xLin ①} + k C_{xLin ②}D_2] / [3\pi (1 + k)]$

Ce Coefficient d'Interférence peut alors être dessiné par un tableur, à partir des données que Cooley et O'Neil ont mis en notre possession [211] :



Il est important de réaliser que, la proximité de deux corps en régime de Stokes diminuant leur Traînée totale (c.-à-d. la somme de leur Traînée), le Coefficient d'Interférence sera d'autant plus faible que les deux corps interfèreront plus les uns sur les autres. [212]

L'observation de ce graphe montre que la valeur du Coefficient d'Interférence est d'autant plus faible que l'écart entre les deux sphères est faible ; mais il est aussi d'autant plus faible que les sphères sont plus proche en diamètres.

Si l'on observe les courbes rouges, on note qu'à mesure que le coefficient **k** augmente, la courbe qui représente le Coefficient d'Interaction s'abaisse, jusqu'à donner la courbe orange pour la valeur **k = 1**.

Puis, pour les **k** plus grand que l'unité, les courbes du Coefficient d'Interaction s'élèvent à nouveau (nous les avons colorés en bleu pour ces **k** > **1**).

Comme précédemment, on peut s'étonner que le dessin des courbes bleues ne reproduise pas les courbes rouges (le Coefficient d'Interaction sur le couple de sphères formé par une certaine valeur de **k** à une certaine distance étant le même que celui sur le couple de sphère formé par le coefficient **1/k** à la même distance).

Mais, comme précédemment aussi, la disparité des courbes bleues et rouges est due à l'adimensionnalisation des abscisses (l'écart **d/a**) par le rayon **a** de la sphère primaire…

---

[211] Les facettes de ces courbes sont dues au fait que les données publiées par Cooley et O'Neil sont limitées…

[212] Dans les hauts Reynolds, inversement, le fait d'approcher deux corps fuselés l'un de l'autre augmentera la somme de leur Traînée. Mais le fait de disposer certains autres corps l'un à la suite de l'autre pourra diminuer la somme de leur Traînée (au moins pour certains espacements).

De fait, ainsi que le montre la flèche jaune à double fer du haut, l'interférence pour l'écart **k = 0,1** (courbe rouge) et **d/a = 0,5** est bien la même que celle pour **1/k = 10** (courbe bleue) et pour **0,5/k = 5**.

Le lecteur attentif aura à cœur de justifier de même la présence de la deuxième flèche jaune à double fer…

Quelques corps composites virtuels de Cooley et O'Neil :

Le données numériques fournies par Cooley et O'Neil nous permettent de proposer le $\mathbf{C_x}$ linéaire de quelques corps composites virtuels formés de deux sphères se déplaçant de conserve (donc à distance constante) suivant une ligne parallèle à leur centre et en régime de Stokes.

Nous avons choisi pour former ces corps composites des écarts relatifs allant de **0,1** à **1 fois** le diamètre de la sphère principale.

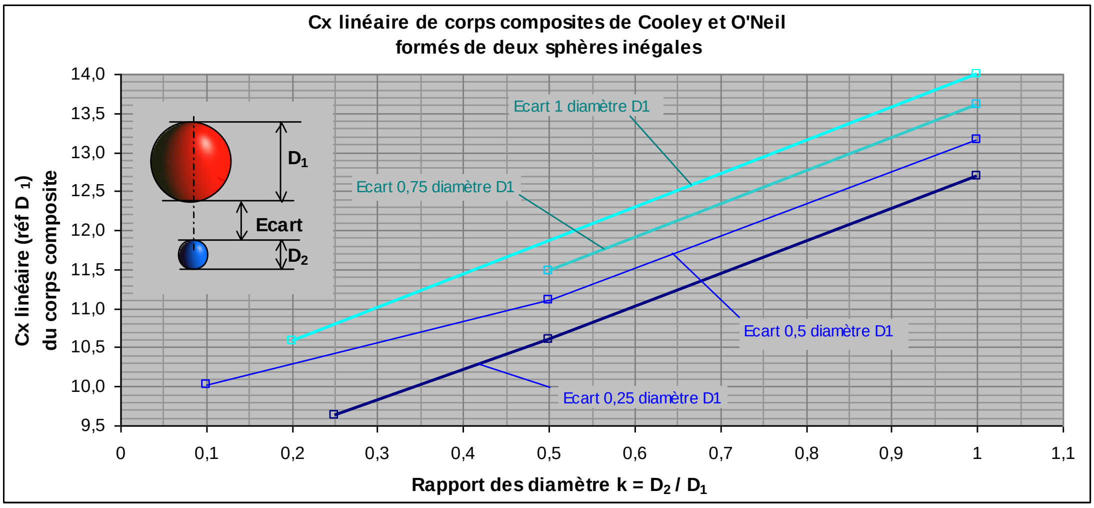
Lors d'expérimentations pratiques, ces écarts pourront rester immatériels (c'est facile pour le corps composite formé de deux sphères égales puisque, abandonné à cet écart, elles devraient décanter de conserve, c.-à-d. sans faire varier l'écart initial) ; mais dans les autres cas (sphères inégales) sauf à doser soigneusement la masse volumique des deux sphères, l'écart gagnera à être matérialisé (et donc maintenu) par une tige du plus faible diamètre possible.

Voici une petite collection de corps composites que nous avons nommés « de Cooley et O'Neil » (quatre d'entre eux sont représentés plus bas) :

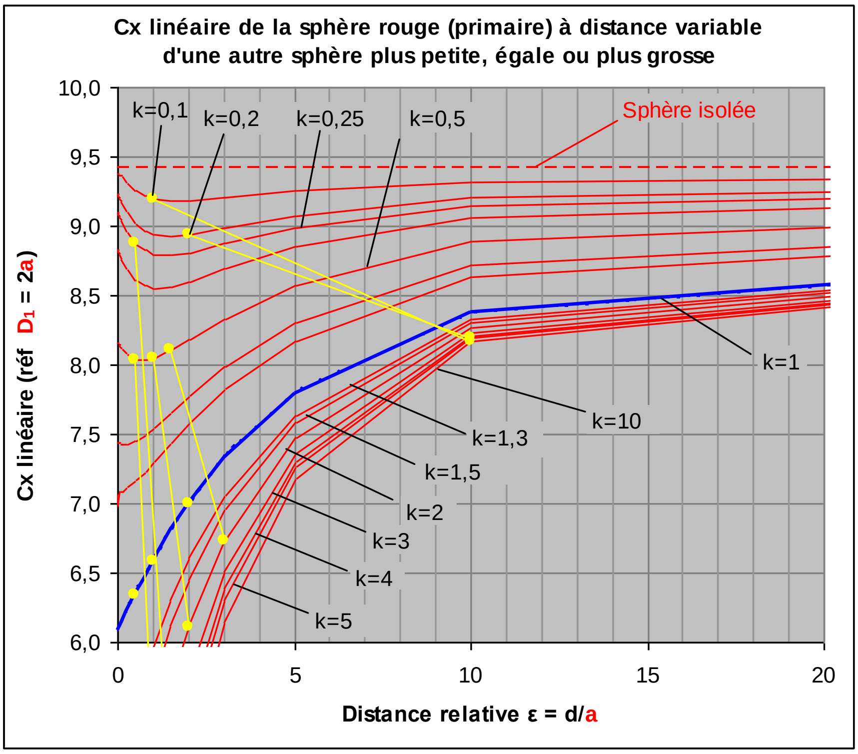
Notre collection de corps composite possibles			
K	Écart	$\mathbf{C_x}$ lin réf L_{tot}	$\mathbf{C_x}$ lin réf D_1
0,25	$0,25D_1$	6,419	9,628
0,5	$0,25D_1$	6,063	10,610
1	$0,25D_1$	5,637	12,684
0,1	$0,5D_1$	6,260	10,016
0,5	$0,5D_1$	6,344	11,102
1	$0,5D_1$	5,265	13,163
0,5	$0,75D_1$	5,098	11,470
1	$0,75D_1$	4,945	13,599
0,2	$1D_1$	4,807	10,575
1	$1D_1$	4,664	13,991

La première colonne de ce tableau donne le coefficient **k** permettant de passer du diamètre de la sphère primaire à la sphère secondaire. La deuxième colonne donne l'écart en fonction du diamètre primaire $\mathbf{D_1}$. Les deux autres colonnes donnent les $\mathbf{C_x}$ linéaire des corps composites en référence diamètre maximal (soit $\mathbf{D_1}$ dans tout les cas) et en référence à la longueur totale du corps composite.

On retrouve les enseignements de cette dernière colonne ($\mathbf{C_x}$ linéaire en référence **D** maximal, soit toujours $\mathbf{D_1}$) dans le graphe suivant, établi en prenant **k** comme abscisse :



Un défaut de régularité est visible sur la courbe des écarts **0,5 D**$_1$. Il ne faut pas s'en étonner puisque les courbes donnant les C_x linéaire des sphères comportent des points bas (à la fameuse distance de Traînée minimale). Voici d'ailleurs en jaune les marques (reliées par un segment également jaune) qui ont permis de calculer ces C_x linéaires totaux (ces marques étant les C_x linéaires des deux sphères primaire et secondaire), ceci pour chaque **k** et chaque distance relative des sphères :



Pour expliquer la position de ces marques jaunes sur les courbes, on peut rejouer au jeu assez entêtant que nous avons déjà évoqué plus haut :

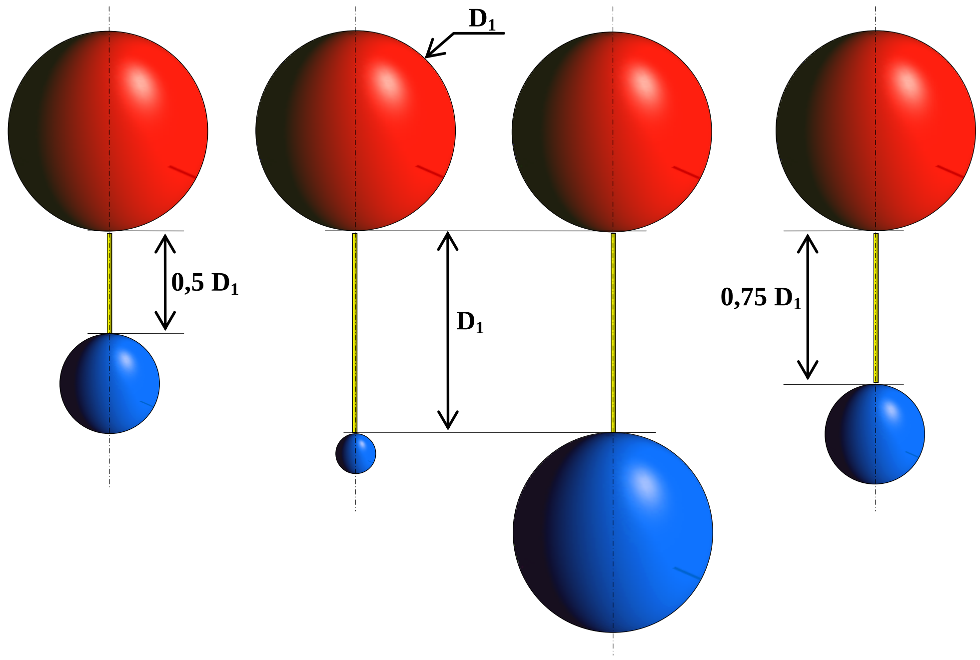
Par exemple, le corps composite formé par le couple **k = 0,1** et **ε = 1** (soit **ε** égale un rayon de la sphère primaire) est sujet, sur sa sphère primaire, à un C_x linéaire (en référence à son propre diamètre) de **~9,25** (c'est le point jaune à cet ordonnée et à l'abscisse **1**, évidemment sur la courbe **k = 0,1**), alors que sa sphère secondaire est sujette à un $\mathbf{C_x}$ linéaire (en référence à son propre diamètre, soit **0,1** $\mathbf{D_1}$) de **~8,2** (à trouver à l'abscisse **ε/k**, soit **10**, évidemment sur la courbe **K= 10**).

La somme des Longueurs Équivalente de Traînée de ce corps composite est donc **~9,25*** $\mathbf{D_1}$ **+ ~8,2*0,1** $\mathbf{D_1}$ **= 10,07** $\mathbf{D_1}$ ce qui lui donne un $\mathbf{C_x}$ linéaire en référence à son diamètre maximal (qui est $\mathbf{D_1}$) de **~10,07** !

Notre tableau de chiffres ci-dessus où l'écart est exprimé en diamètre $\mathbf{D_1}$ et non en rayon **a** comme sur le graphe annonce, pour ce couple [**k = 0,1** ; **ε = 1**], la valeur plus exacte **10,016** (c'est le nombre coloré en bleu du tableau)…

Mais une question importante se pose : si l'on fabrique de tels corps composites avec des sphères matériellement maintenues à distance constante par un broche métallique :

Quelques corps de Claeys et Brady



…cette broche n'influera-t-elle pas trop sur le $\mathbf{C_x}$ linéaire du corps (annoncé ci-dessus évidemment comme sans broche métallique) ?

S'agissant d'une telle broche métallique, il faut songer évidemment qu'une épingle de couturière mesure **0,5 mm** de diamètre.

En prenant un couple de sphère de **6 mm**, par exemple (**k = 1**), et un écart entre ces deux sphères de **1** diamètre (**ε = 2**), la broche métallique qui unirait ces deux sphères aurait un élancement **λ** de **6 mm / 0,5**, soit **λ** = **12** (en prenant comme diamètre celui d'une épingle de couturière).

Le $\mathbf{C_x}$ d'un tel bâtonnet isolé, donné par la formule :

$$\mathbf{C_{x\text{Lin L}}} = \frac{\mathbf{2\pi}}{\mathbf{Ln(2\lambda) - 0,5}}$$

…serait **2,35**.

Sa longueur étant de **6 mm**, sa Longueur Équivalente de Traînée est de **~14 mm**.

Le **C_x** linéaire du corps composite virtuel [**k = 1** ; **ε = 2**] est à la dernière ligne de notre tableau ci-dessus : c'est, en référence diamétrale, **13,991**. La Longueur Équivalente de Traînée est donc : **13,991*6 mm ~84 mm**, soit **~6 fois** plus que celui de la broche métallique considérée comme un bâtonnet isolé.

Bien-sûr, cette broche métallique n'est pas isolée. Elle est tout à fait baignée par l'écoulement des deux sphères.

Chaque sphère, au lieu de posséder un **C_x** linéaire de 3 **π** en possède un de **13,991/2**, c.-à-d. que son **C_x** linéaire est pondéré par **~0,75** : c'est une valeur que l'on peut tirer, à l'abscisse **2 (**pour deux rayon **a**) de la courbe orange de notre graphe du Coefficient d'Interférence montré un peu plus haut.

À tout le moins, on doit pondérer la Longueur Équivalent de Traînée du bâtonnet par ce facteur. Il passe alors de **~14 mm** à **10,4**, soit **0,12 %** de celui des sphères sans broche de liaison…

Cependant la broche de liaison est beaucoup plus proche des sphères que chaque sphère de l'autre ce qui doit diminuer sa Traînée.

De plus, par sa présence, cette broche de liaison doit elle-même diminuer le **C_x** linéaire des deux sphères. On peut donc penser qu'elle n'augmente pas plus que de **4** ou **5 %** le **C_x** linéaire des deux sphères considérées comme formant un attelage virtuel…

Ces derniers calculs ont été effectués en partant d'un diamètre de broche métallique de **0,5 mm** mais un diamètre plus faible diminuera légèrement sa Traînée [213].

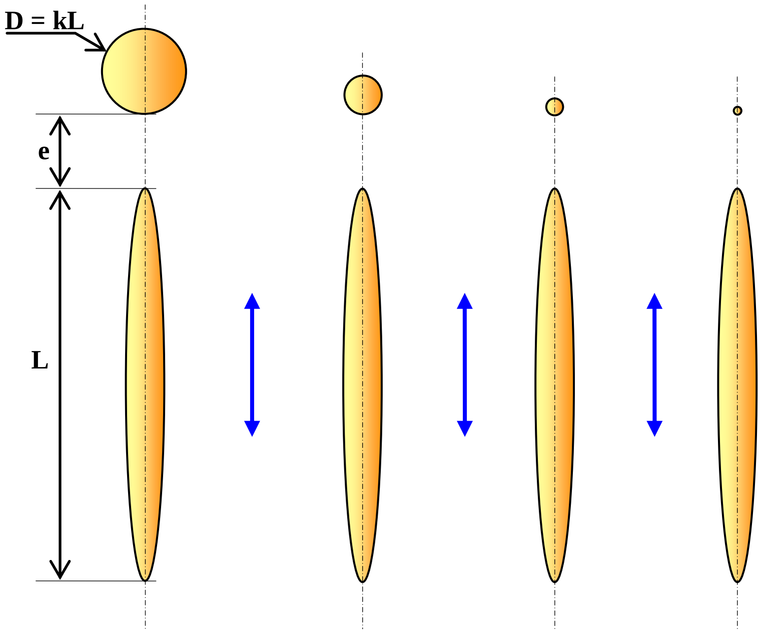
Le **C_x** linéaire des corps composites réels peut donc être approché par ce genre de calculs, mais ils resteront évidemment à démontrer par l'expérience…

Les mêmes expériences permettront d'ailleurs, en faisant varier la longueur et le diamètre des broches de liaison entre les sphères, d'estimer leur influence sur la Traînée de l'ensemble…

Corps composites virtuels de Claeys et Brady

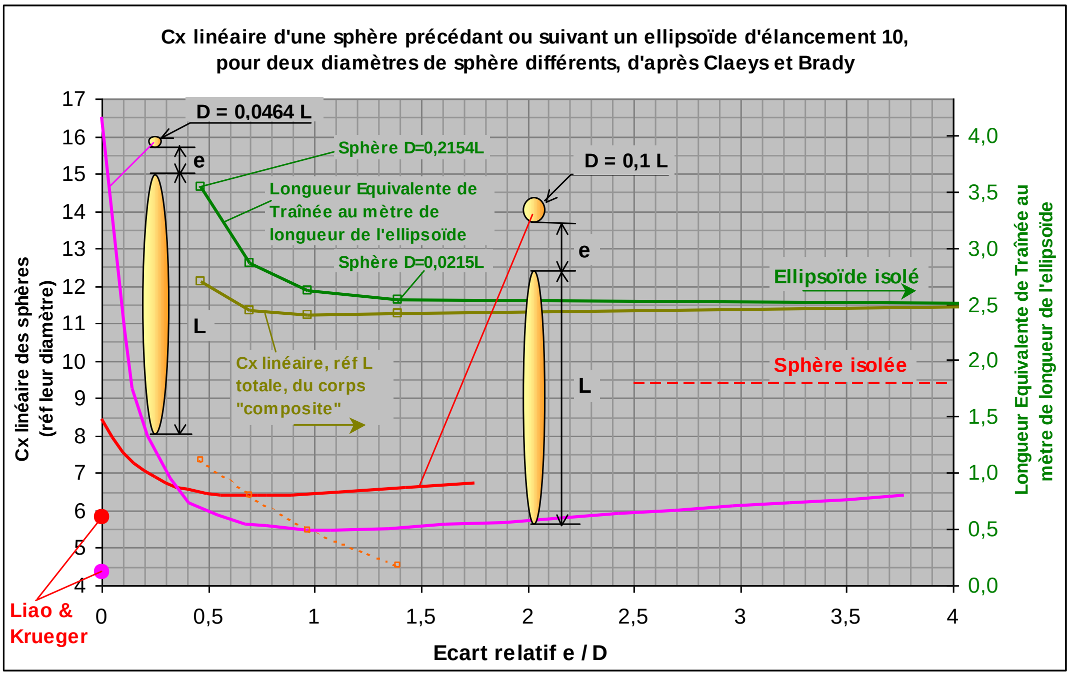
Claeys et Brady ont calculé la Traînée d'une sphère plus ou moins grosse se déplaçant à une distance donnée fixe d'un ellipsoïde d'élancement **10** :

[213] Par exemple, le **C_x** linéaire de cette broche (en référence longueur) devient **~1,86** (au lieu de **~2,35**) pour un diamètre de **0,25 mm** puisque son élancement est double.



Le diamètre de la sphère est défini par rapport au grand diamètre **L** de l'ellipsoïde à l'aide d'un facteur multiplicateur **k**, de sorte que **D = k L**.

Claeys et Brady publient deux courbes montrant la Traînée de deux sphères (pour **k = 0,0464** et **k = 0,1**) selon leur écart avec l'ellipsoïde ; voici en traits fuchsia et rouge continus le **C_x** linéaire (en référence diamétrale) qu'il est aisé d'en tirer, selon l'écart relatif **e/D** :



Au vu de ces deux courbes, on remarque qu'elles présentent un point bas pour lequel le **C_x** linéaire de la sphère est nettement plus faible que lorsqu'elle est en contact avec l'ellipsoïde.

Ce genre de cuvette de $\mathbf{C_x}$ linéaire est un phénomène que nous avons déjà rencontré pour les sphères de diamètres inégaux de Cooley et O'Neil se déplaçant également à la même vitesse et à distance fixe (mais paramétrable) en régime de Stokes.

Dans la cas présent, cependant, la cuvette est plus marquée : il y a une très forte différence entre le $\mathbf{C_x}$ linéaire de la sphère en contact avec l'ellipsoïde et celui de la sphère à une certaine distance de l'ellipsoïde et ceci spécialement pour la plus petite sphère (courbe fuchsia) où le $\mathbf{C_x}$ linéaire "au contact" est trois fois plus fort qu'à l'écart relatif **e/D ≈ 1**.

Comme Claeys et Brady donnent également la Traînée s'exerçant sur l'ellipsoïde pour les écarts entre les deux corps qui minimisent la Traînée, nous avons pu calculer la Traînée totale que subit le corps composite *virtuel* constitué de la sphère et de l'ellipsoïde d'élancement **10** à cet écart optimum (pour les quatre diamètres de sphère spécifiés par les auteurs) ; nous qualifions de *virtuel* ce corps composite puisque aucun dispositif matériel ne réunit la sphère et l'ellipsoïde.

En vert sur le graphe ci-dessus, nous donnons la Traînée de ce corps composite à l'écart de Traînée minimale sous la forme (originale pour le présent texte) de *Longueur Équivalente de Traînée au mètre de longueur de l'ellipsoïde* : On comprend assez facilement que pour en tirer la Traînée ~(en **N**), il faudra multiplier cette quantité par le produit **µV** (ceci classiquement) et par la longueur en mètre de l'ellipsoïde (par exemple $\mathbf{1\ 10^{-3}}$).

Les ordonnées de cette courbe sont à lire sur l'axe de droite.

Il est visible que cette Traînée *minimale* décroit à mesure que la sphère perd de son diamètre (les diamètres sont, de gauche à droite, **0,2154 L**, **0,1 L**, **0,0464 L** et **0,0215 L**). C'est normal dans la mesure où la Traînée de la sphère compte dans la Traînée de ce corps composite.

Nous avons d'ailleurs prolongé cette courbe verte vers la Longueur Équivalente de Traînée de l'ellipsoïde d'élancement **10** au mètre de longueur de celui-ci quand il est isolé (**2,495 m**) [214] : cette prolongation nous montre que finalement, du moins à cette distance de Traînée minimale, les plus petites sphères (de diamètres **0,0464 L** et **0,0215 L**) n'augmentent que très peu la Traînée du corps composite virtuel, bien qu'elles présentent un diamètre valant **0,454** et **0,215** fois le petit diamètre de l'ellipsoïde (peut-être réalisent-elles un carénage de l'ellipsoïde en tant que corps avant coureur, ce qui serait à étudier plus longuement).

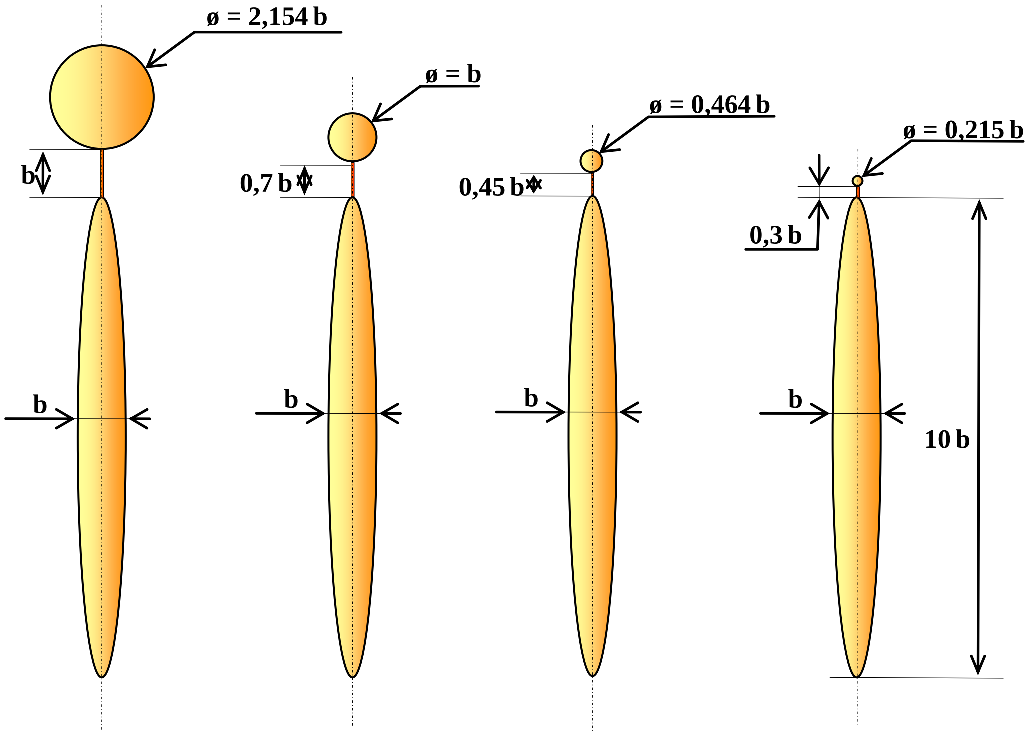
Sur le même graphe, nous avons porté en kaki le $\mathbf{C_x}$ linéaire du corps composite à la distance de Traînée minimale, en référence à sa longueur totale (**L+e+D**), les ordonnées de cette courbe kaki étant à lire également sur l'axe de droite ; nous ne connaissons pas l'écart relatif optimal **e/D** qui séparerait les sphères de plus petit diamètre que **0,215 L**, mais nous avons prolongé quand-même la courbe kaki jusqu'au $\mathbf{C_x}$ linéaire de l'ellipsoïde isolé supposé à l'abscisse **5**.

Au bas de l'axe des ordonnées de gauche, nous avons porté le $\mathbf{C_x}$ linéaire des deux sphères de diamètres **0,0464 L** et **0,1 L** tels qu'établis par Liao et Krueger : ils sont très différents de ceux déterminés par Claeys et Brady (quoique du même ordre de grandeur) : ces derniers auteurs s'en expliquent dans leur texte.

Apparaissent également sur le même graphe, en tireté orange, la courbe des minimaux de Traînée pour les quatre diamètres de sphères donnés par Claeys et Brady…

[214] Nous avons ici placé ce point à l'abscisse **5**, mais on peut voir que c'est sans importance…

Nous pouvons donc tirer du texte de Claeys et Brady les quatre propositions de corps composites suivantes :



Les deux corps élémentaires formant chacun de ces corps composites sont maintenus à la distance de Traînée minimale (établie par Claeys et Brady) par une broche.

L'enjeu de l'utilisation de tels corps sera :

→ d'une part de justifier les C_x linéaire correspondant à ces Traînées minimales données par Claeys et Brady (à savoir, en référence longueur <u>totale</u> du corps composite : **2,694**, **2,443**, **2,397**, **2,408** en allant de la gauche vers la droite sur le schéma ci-dessus [215]).

→ d'autre part de montrer dans quelle mesure les broches interviennent dans la Traînée de ces corps composites…

Malheureusement Claeys et Brady ne donnent pas de renseignements permettant de calculer le C_x linéaire des corps composites formés par une sphère <u>en contact</u> avec l'ellipsoïde d'élancement **10** [216].

---

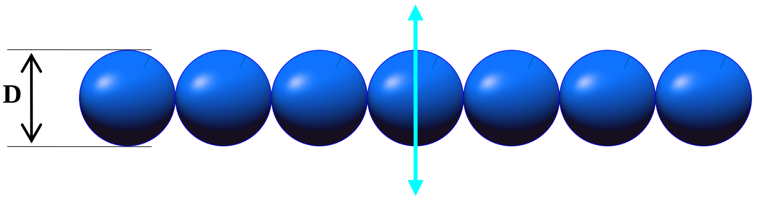
[215] Le C_x linéaire de l'ellipsoïde d'élancement **10** est **2,495**, en référence à sa longueur.

[216] Ils ne donnent que la Traînée de la sphère dans ce cas de la sphère en contact, et seulement pour deux diamètres relatifs de sphère…

Cx linéaire de chaîne rectiligne de sphères identiques en régime de Stokes :

1) Chaînes rectilignes de sphères en déplacements transverses :

Divers auteurs se sont penchés sur la détermination de la traînée de chaînes de sphères identiques alignées en déplacements transverses :



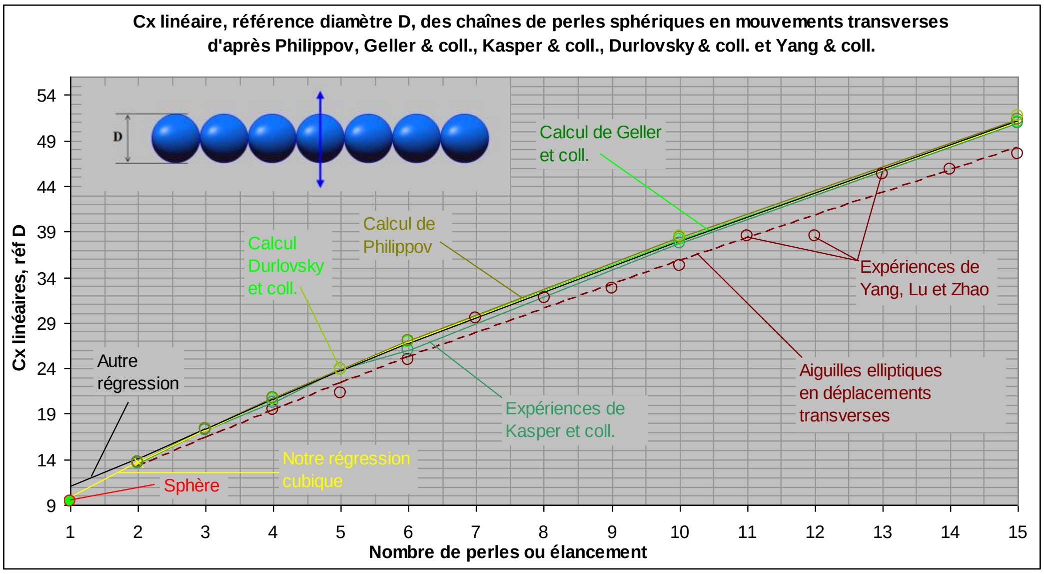
Nous avons déjà donné plus haut les résultats de Stimson & Jeffery pour une chaîne de **2** sphères.

Dans sa thèse, où il propose un mode de calcul particulier pour les chaînes et conglomérats de particules, Wenxiao PAN cite les résultats des calculs de Philippov, de ceux de Geller, Mondy, Rader & Ingber ainsi que les résultats d'expérimentations de Kasper, Niida & Yang. Nous avons ajouté les résultats de Durlofsky, Brady & Bossis :

Les résultats de ces quatre sources, portant sur des chaînes de **2** à **15** sphères, sont assez unanimes (nous les exprimons ici sous forme de $\mathbf{C_x}$ linéaires en référence au diamètre d'une seule sphère) :

Nombre de perles ou élancement de la chaîne	Philippov	Geller et coll.	Kasper et coll.	Durlovsky&coll.
2	13,656	13,620	13,537	
3	17,345	17,290	17,263	
4	20,736	20,661	20,197	
5	23,932	23,852	23,852	23,939
6	26,991	26,836	26,031	
10	38,356	38,072	37,767	38,453
15	51,345	50,996	50,903	51,742

Sur le graphe ci-dessous, ce sont les courbes et marques de diverses couleurs vertes :



Le C_x linéaire de ces chaînes de sphères est ici exprimé en référence au diamètre **D** de la sphère élémentaire.

Les marques marron sont les résultats d'expérimentations nouvelles de Yang ; Lu et Zhao ; ceux-ci on mesuré le déplacement de chaînes de sphères *superparamagnétiques* de diamètre **2,8 µm** se déplaçant en lévitation magnétique dans un fluide au repos.

Sur ce même graphe, nous avons porté également en marron le C_x linéaire des aiguilles elliptiques en déplacement transverses dont on peut rappeler le libellé :

$$C_{xLin\ Réf.D} = \frac{4\pi\lambda}{Ln[2\lambda] + 0,5}$$

…λ étant bien-sûr l'élancement **L/D** des chaînes de sphères, soit ici également le nombre de sphères.

Il est patent que l'évolution du C_x linéaire des chaînes dessine une courbe parallèle à celle des aiguilles ellipsoïdales (bien qu'il soit difficile d'en tirer des certitudes sur le comportement de chaînes d'un plus grand nombre de sphères).

Une régression cubique (en jaune ci-dessus) décrit assez bien ce C_x linéaire ; c'est :

$$C_{xLin\ Réf.D} = 0,0034\ \lambda^3 - 0,126\ \lambda^2 + 4,14\ \lambda + 5,84$$

Elle est précise à mieux que **1 %** pour les élancements λ allant de **2** à **15** (ces bornes comprises) et ne rate que de **4,6 %** le C_x linéaire de la sphère unique.

Une autre régression (en noir ci-dessus) vient également à l'esprit ; son libellé prend comme modèle celui des aiguilles elliptiques. Cela donne :

$$C_{xLin\ Réf.D} = \frac{13,3\ \lambda}{Ln[2\lambda] + 0,5}$$

…où λ est toujours l'élancement **L/D** des chaînes de sphères (ou le nombre de sphères).

Comparée à la moyenne des valeurs de Philippov, Geller & coll. et Kasper & coll., cette régression est précise à **0,64 %** entre les élancements **3** et **15** (ces bornes comprises).

Comme il faut toujours s'y attendre avec les régressions polynomiales, notre régression cubique *fouette* quelque peu au-dessus de l'élancement **15** : c'est donc plutôt cette dernière régression en **13,3 λ** qu'il conviendra d'utiliser si l'on se risque à l'extrapolation du $\mathbf{C_x}$ linéaire au-delà de l'élancement **15**.

Une autre façon intéressante de raisonner est de chercher à isoler dans l'évolution du $\mathbf{C_x}$ linéaire des chaînes ce qui tient à leurs extrémités.

On trouve alors (droite bleu clair sur le graphe ci-dessous) que les dix premières sphères créent un $\mathbf{C_x}$ linéaire de **38,7** (qu'on peut imaginer comme dû aux cinq sphères d'une extrémité et aux cinq sphères de l'autre extrémité) et que toute sphère ajoutée entre ces dix sphères d'extrémités augmente ce $\mathbf{C_x}$ linéaire de **38,7** de **2,45**.

L'équation du $\mathbf{C_x}$ linéaire en devient :

$$\mathbf{C_{xLin\ Réf.D} = 2{,}45*(\lambda - 10) + 38{,}7}$$

…cette régression linéaire devant bien-sûr être réservée aux élancements **λ** supérieurs à **10**.

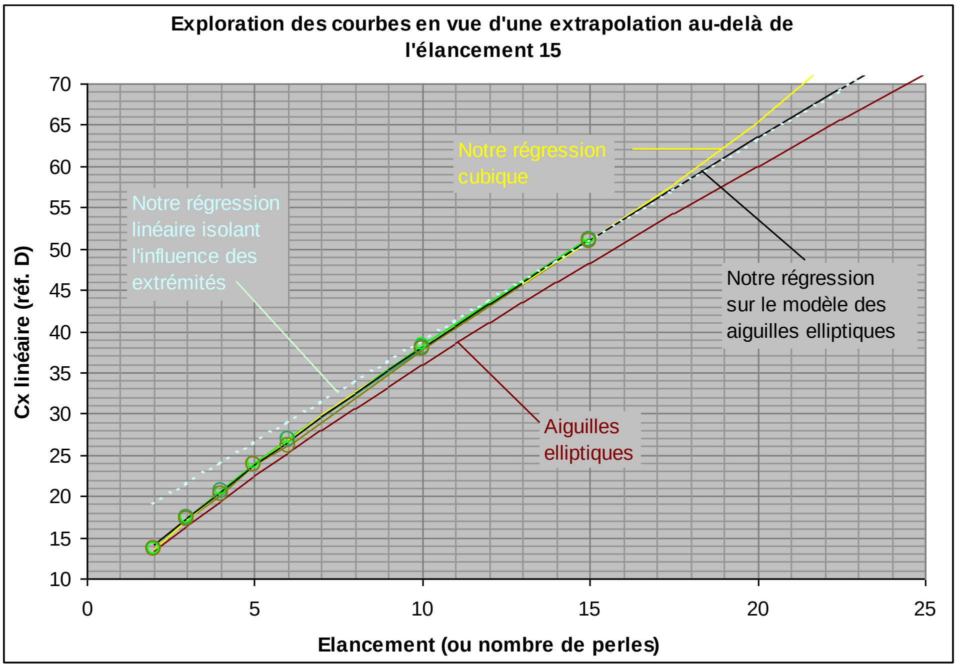
La même régression linéaire peut bien-sûr également s'écrire :

$$\mathbf{C_{xLin\ Réf.D} = 2{,}45\ \lambda + 14{,}2}$$

…mais elle est toujours réservée au élancement **λ** > **10**.

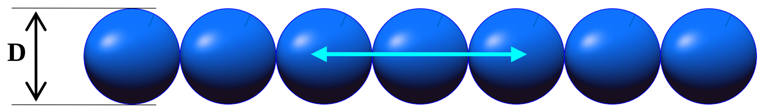
Cette linéarisation vaut surtout par la tentative de *forfaitairisation* de l'influence des extrémités qu'elle représente. Elle pourrait également être calculée plus près de l'abscisse unitaire.

Les trois régressions évoquées à l'instant apparaissent sur le graphe suivant :



On y note qu'appliquer la régression linéaire bleu clair revient à considérer que la pente de la régression noire (évolution du libellé pour les aiguilles elliptiques) tend vers une valeur constante (ce qui n'est admissible que localement).

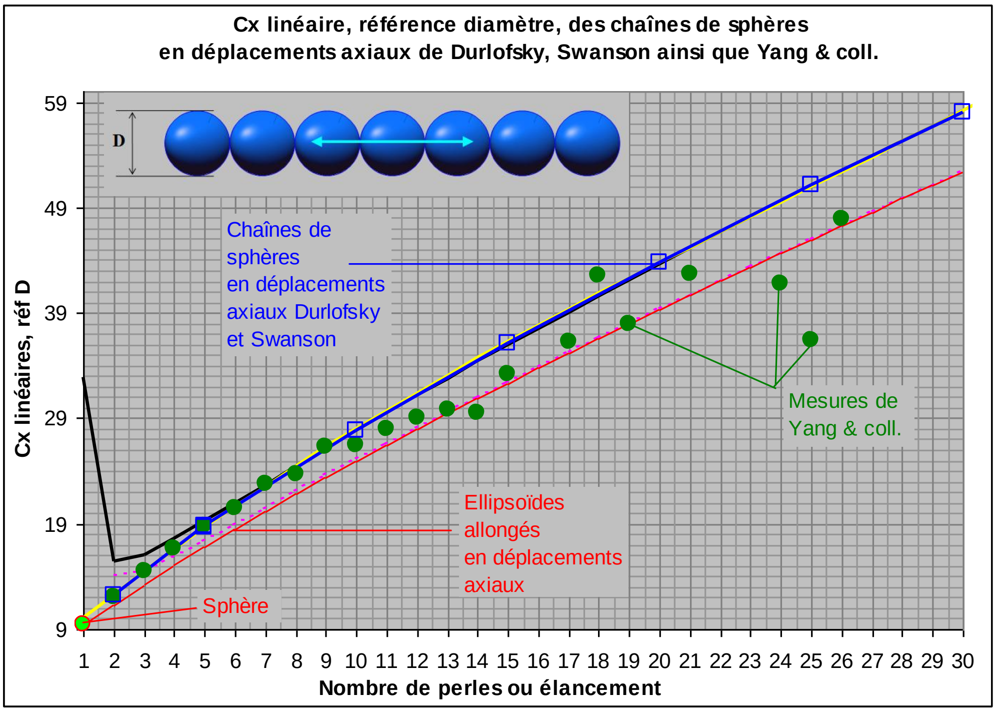
2) Chaînes rectilignes de sphères en déplacements axiaux :



Nous n'avons trouvé, pour ces déplacements axiaux, que les résultats de calculs de Durlovsky et coll., cités également par Yang et coll. dans un article expliquant leur nouvelle méthode de mesures de particules en sustentation magnétique.

Voici les résultats de Durlofsky (courbe et marques carrées bleu dense), complétés, pour la chaîne de deux sphères, par le résultat de Swanson, Teller & de Haën [217] :

[217] Les valeurs de Swanson & coll. pour les deux sphères en contact sont très proches de celles que nous avons données plus haut.



Pour comparaison, nous avons porté en rouge le $\mathbf{C_x}$ linéaire (référence **D**) des ellipsoïdes allongés (par la formule d'Oberbeck) et en tiretés fuchsia celui des aiguilles elliptiques (l'ensemble évidemment en déplacements axiaux).

Les marques vertes circulaires sont les résultats d'expériences de Yang et coll..

La courbe bleu dense de Durlofsky et Swanson & coll. admet une régression cubique assez fidèle dont on remarque le trait jaune. Son équation est :

$$\mathbf{C_{xLin\ Réf.D} = 0{,}000537\ \lambda^3 - 0{,}039\ \lambda^2 + 2{,}369\ \lambda + 7{,}68}$$

Elle est précise à mieux que **0,9 %** sur la plage d'élancements **λ** allant de **2** à **30** (ces bornes comprises).

Comme on le voit elle rate de peu la marque de la sphère isolée.

Ainsi qu'on pouvait le craindre, une telle équation cubique (courbe jaune, toujours) *fouette* à l'extérieur de son domaine de définition. S'il s'agit d'extrapoler les résultats de Durlofsky aux plus grands élancements, il sera donc plus sûr d'utiliser un libellé construit sur le modèle des aiguilles elliptiques ; ce pourrait être :

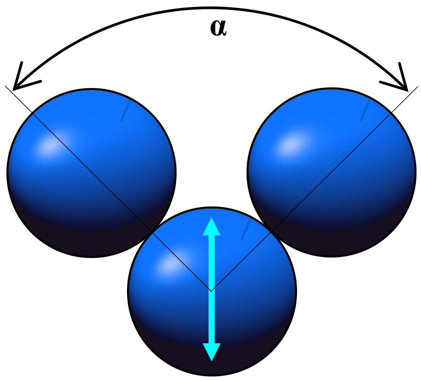
$$\mathbf{C_{xLin\ Réf.D}} = \frac{7\ \lambda}{\mathrm{Ln}\left[2\lambda\right] - 0{,}48}$$

…ce libellé étant acceptable, comme on le montre la courbe noire qui le représente sur le graphe, à partir de l'élancement **10**.

Il faut cependant garder en mémoire que ces deux dernières régressions ne sont issues que des travaux de Durlofsky.…

C_x linéaire de trois sphères en contact d'après leur angle au centre :

Dans leur texte de 2006, Maria L. EKIEL-JEZEWSKA et Eligiusz WAJNRYB présentent le résultat de leurs calculs des caractéristiques de Traînée de trois sphères en contact deux à deux selon l'angle **α** défini comme ci-dessous :

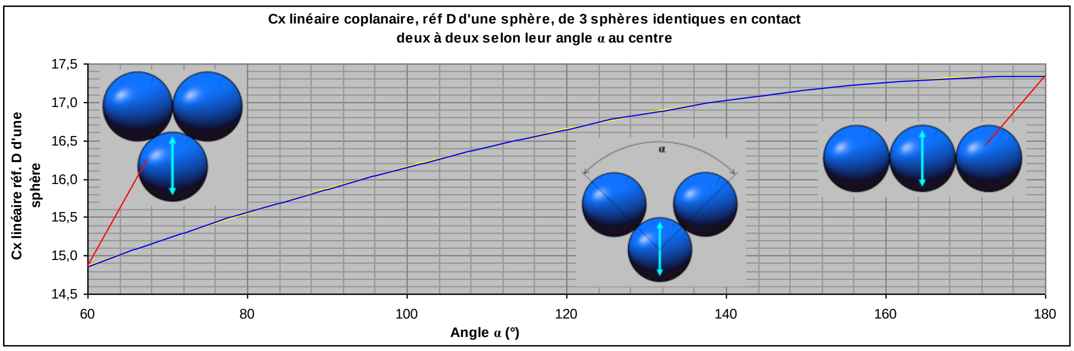


Lorsque cet angle **α** vaut **π/3**, les trois sphères sont toutes trois en contact et le **C_x** linéaire annoncé par les auteurs est **14,8635**, en référence au diamètre **D** de la sphère unitaire (nous annoncerons **14,865** plus bas).

Lorsque l'angle **α** vaut **π**, les trois sphères sont alignées et opposent aux déplacements perpendiculaires à leur alignement un **C_x** linéaire, toujours réf. **D**, de **17,3413** (nous annoncions plus haut **~ 17,30** sur la foi de trois textes différents).

Les résultats de ces auteurs (que nous n'avons pu confronter avec aucun autres) sont cités ici par nous à cause des possibilités qu'ils offrent de construire des corps composites d'angle **α** quelconque et de les tester en cuve de décantation.

L'un des graphes des mêmes auteurs peut être aisément transformé pour donner le **C_x** linéaire de ces arrangements de trois sphères selon l'angle **α** :

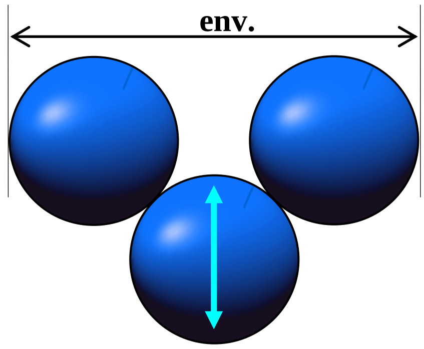


La courbe de ce **C_x** linéaire (en bleu dense) possède une régression cubique (en jaune derrière la courbe bleue) précise à mieux que **0,05 %** :

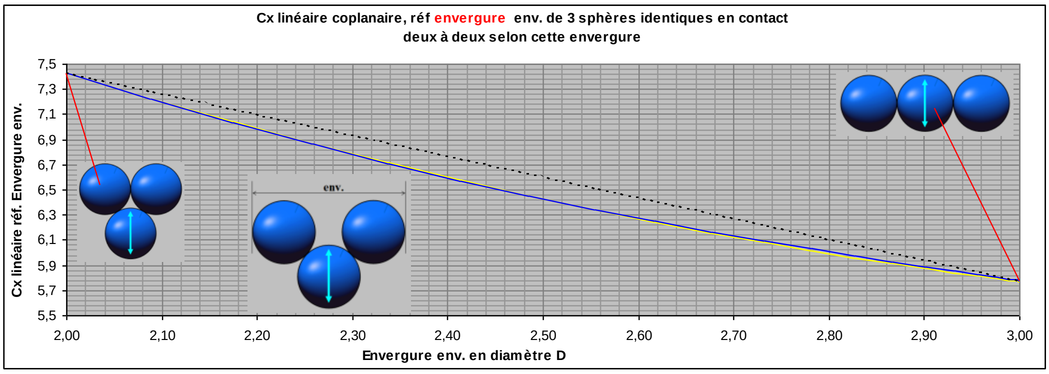
$$\mathbf{C_{xLin\ Réf.D} = 12{,}435 - 3{,}37\ 10^{-7}\ \alpha^3 - 3\ 10^{-5}\ \alpha^2 + 0{,}0436\ \alpha}$$

…**α** étant exprimé en degrés.

Il peut venir à l'esprit d'exprimer le $\mathbf{C_x}$ linéaire des même trois sphères en référence à une autre caractéristique géométrique que l'angle **α**. Ainsi, si on choisit comme longueur de référence l'envergure **env.** du corps formé par ces trois sphères :



…on peut dessiner la courbe bleu dense sur le graphe suivant (dont les abscisses sont également l'envergure, exprimée en diamètre **D** de la sphère unitaire) :



Il apparaît sur ce graphe que cette courbe est assez tendue, de sorte que la linéariser (droite tiretée noire) ne ferait commettre qu'une erreur de **3 %** en son milieu.

Une régression parabolique est cependant possible :

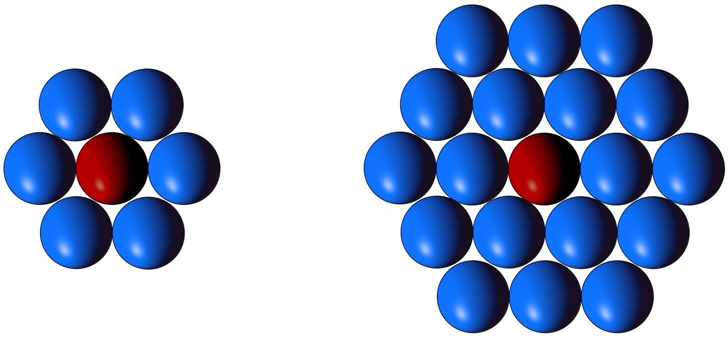
$$\mathbf{C_{xLin\ Réf.env.} = 0{,}68\ env.^2 - 5{,}06\ env. + 14{,}83}$$

…cette régression étant précise à mieux que **0,26 %**.

Cx linéaire de conglomérats de sphères identiques en régime de Stokes, par Cichocki et Hinsen :

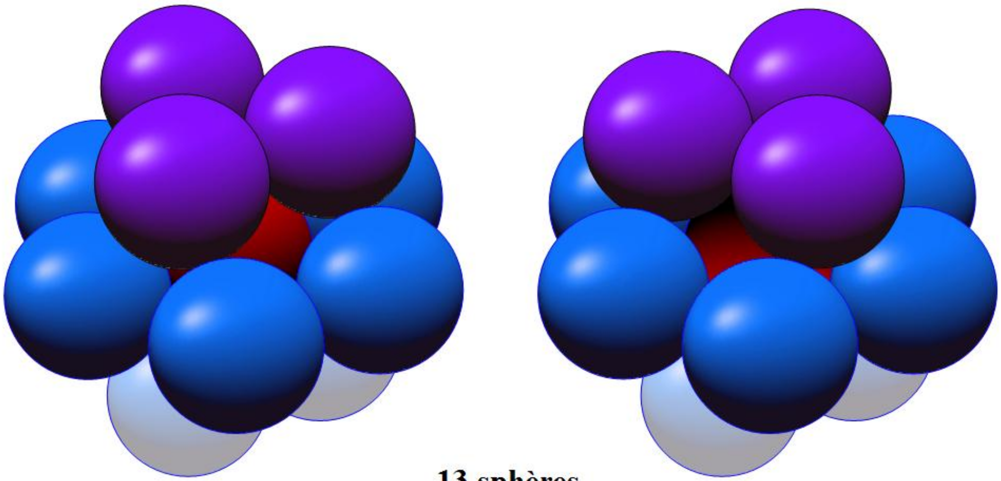
Bogdan CICHOCKI et Konrad HINSEN ont réalisé le calcul de conglomérats de sphères identiques arrangées de façon compacte, le nombre de sphère allant de **2** à **167**.

Ces conglomérats, sur les modèles de Lasso et Weidman, sont formés autour d'un plan médian de sphères organisées en structure dite *hexagonale* (structure la plus compacte) sous la forme d'un hexagone :



…ce plan médian étant ensuite complété par d'autres sphères *tombant* (par dessous et par dessus) dans les creux du plan médian (chaque nouvelle sphère étant donc en contact avec trois sphères du plan médian).

Ainsi le groupe de **7** sphères du schéma de gauche ci-dessus peut être complété des deux façons suivantes par un groupe de trois sphères grises (par en-dessous, deux seulement étant visibles) et un groupe de trois sphères fuchsia (par-dessus) :



13 sphères

Il existe donc, pour le groupe des trois sphères fuchsia, deux positions (décalées de **60°** par rapport aux trois sphères du bas), mais Cichocki et Hinsen indiquent qu'ils ont opté, conformément aux choix initiaux de Lasso et Weidman, pour des conglomérats symétriques par rapport au plan médian (ce qui correspond au schéma de gauche ci-dessus).

Les calculs des mêmes Cichocki et Hinsen sont exprimés sous le forme d'un certain quotient de coefficients de friction (ledit coefficient étant le quotient **F/V** de la Traînée de chaque conglomérat par sa vitesse de décantation, quotient dont nous avons vu qu'il possède la dimension d'un débit).

Quant à nous, nous les donnerons bien-sûr sous forme de $\mathbf{C_x}$ linéaires référencés soit au diamètre **D** d'une sphère élémentaire, soit à la racine cubique du volume total des conglomérats (ce dernier volume étant **N** fois le volume de la sphère élémentaire s'il y a **N** sphères).

Nous appellerons ce dernier $\mathbf{C_x}$ linéaire $\underline{\mathbf{C_x}}$ linéaire *volumique*.

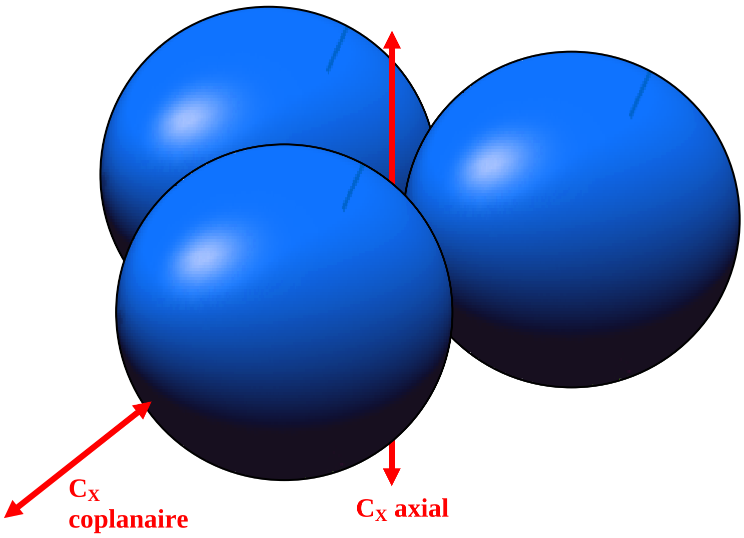
Le choix de cette dernière longueur de référence peut paraître curieux, mais il est nécessaire pour unifier les résultats ; d'autre part, on parle souvent de *Reynolds volumique* pour les dirigeables, ledit Reynolds étant basé sur la racine cubique du volume desdits dirigeables ; toujours pour les dirigeables, on utilise également parfois un $\mathbf{C_x}$ quadratique *volumique* [218] : nous ne faisons donc rien d'original.

Il faut noter que notre $\mathbf{C_x}$ linéaire volumique est lié par un coefficient **1,24** au $\mathbf{C_x}$ linéaire référence **D** de la sphère de même volume que le conglomérat. Ainsi, pour une sphère unique, si le $\mathbf{C_x}$ linéaire diamétral vaut $\mathbf{3\,\pi = 9{,}425}$, le $\mathbf{C_x}$ volumique vaut $\mathbf{3\,\pi * 1{,}24 = 11{,}6933}$

Pour les conglomérats les plus simples, comme les deux sphères tangentes, les calculs de Cichocki et Hinsen vérifient les $\mathbf{C_x}$ linéaires indiqués par nous plus haut.

De même, ces calculs vérifient les $\mathbf{C_x}$ linéaires du conglomérat de trois sphères tangentes (en triangle équilatéral) donnés par Lasso et Weidman, ceux-ci ayant corrigé une erreur de calcul de Kim : En référence au diamètre de la sphère élémentaire, ce $\mathbf{C_x}$ linéaire est **16,256** en mouvements axiaux (c.-à-d. ici perpendiculairement au plan formé par les centres des sphères) et **14,865** pour les mouvements *coplanaires* (dans le plan défini à l'instant).

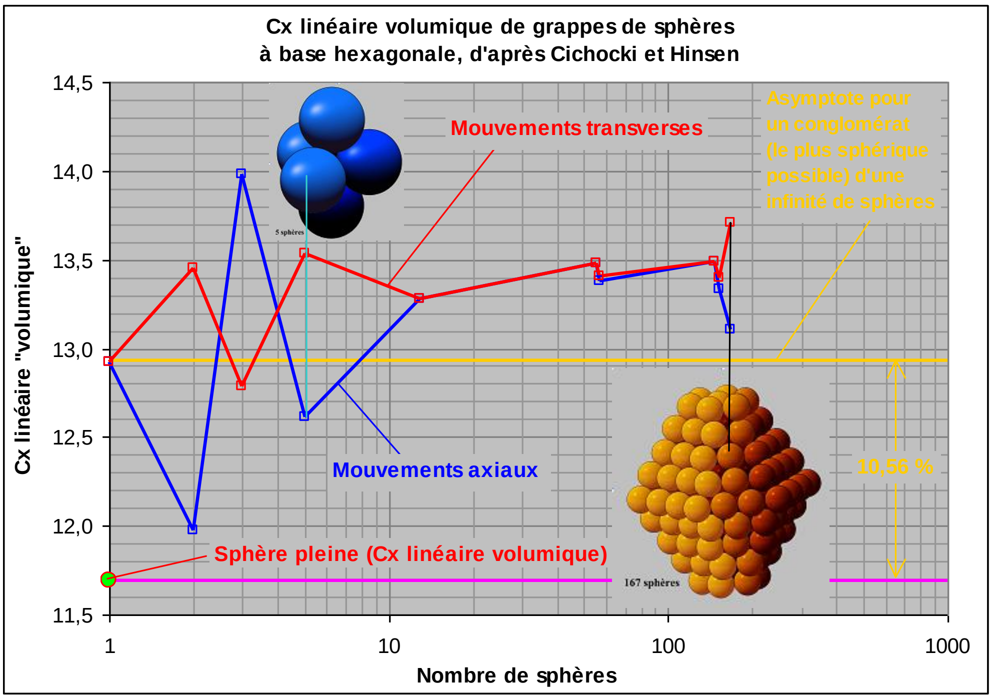
En référence à la racine cubique du volume cumulé des trois sphères, ces $\mathbf{C_x}$ linéaires (*volumiques*, donc) sont **13,984** et **12,788** (pour les mêmes sens de déplacements, respectivement) [219].



Nous retrouvons d'ailleurs ces derniers $\mathbf{C_x}$ linéaires volumiques à l'abscisse **3** sur le graphe suivant qui résume les calculs de Cichocki et Hinsen :

[218] La surface de référence de ce $\mathbf{C_x}$ volumique est alors la puissance **2/3** du volume du dirigeable…

[219] Il y a ici ambigüité sur la direction exacte des mouvements coplanaires, mais on peut penser que ceux-ci se font *au carré*, c.-à-d. perpendiculairement au segment de droite reliant les centres de deux sphères…

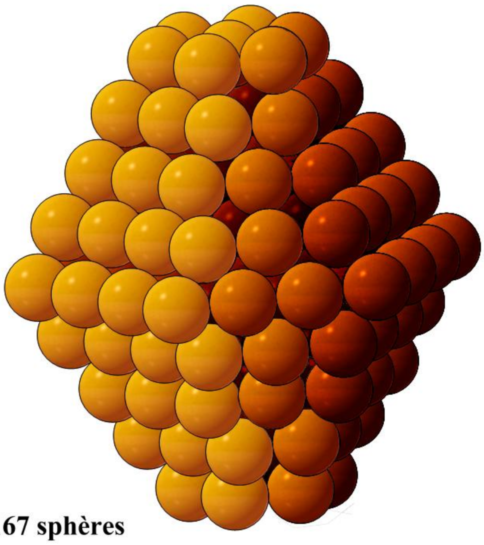


Pour le corps composite formé par les trois sphères en triangle équilatéral (à l'abscisse **3**), on note que les mouvements axiaux sont générateurs de plus de Traînée que les mouvements coplanaires (ou *transverses*, ici) : c'est normal dans la mesure où pour ces derniers mouvements, l'une des sphères vient *caréner* les deux autres (soit devant, soit derrière)…

À l'abscisse **13** est représenté le $\mathbf{C_x}$ linéaire volumique du conglomérat de **13** sphères déjà rencontré et défini plus haut à gauche :

La forme extérieure de ce conglomérat est assez proche de celle d'une sphère. Ses $\mathbf{C_x}$ linéaires volumiques (**13,279** pour les mouvements axiaux et **13,277** pour les mouvements transverses) sont à très peu près identiques même s'ils sont encore **2,71 %** au-dessus de l'asymptote jaune représentant le $\mathbf{C_x}$ linéaire volumique d'une sphère idéale formé d'une infinité de petites sphères identiques : on pourrait attribuer ces **2,71 %** à l'aspect bosselé de ce conglomérat (nous revenons plus bas sur cette asymptote jaune).

Le plus gros conglomérat étudié par Cichocki et Hinsen comporte, quant à lui, **167** sphères :



167 sphères

Notre graphe ci-dessus dévoile qu'il présente deux **C_x** linéaires selon qu'il se déplace en direction axiale (verticale, sur le schéma ci-dessus) ou transverse (horizontale) [220] ; cela ne correspond cependant qu'à une différence de **4,4 %**.

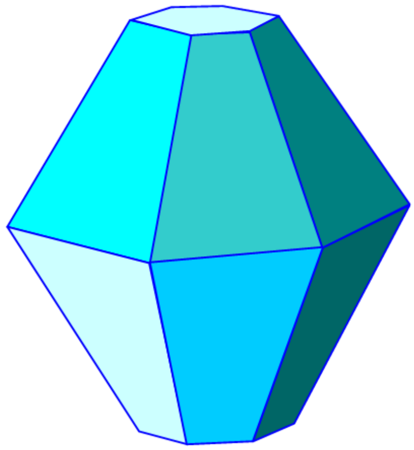
Pour comparaison, nous avons porté sur ce même graphe le **C_x** linéaire volumique de la sphère pleine (**11,6933**, marque verte ceinte de rouge) ; mais cette valeur ne constitue pas l'asymptote vers laquelle tendent les **C_x** linéaires volumiques de nos conglomérats :

En effet, Cichocki et Hinsen notent, suivant en cela Lasso et Weidman, que le conglomérat le plus sphérique possible formé d'un nombre infini de sphères ne peut atteindre que la densité relative de **$\pi/(3*\sqrt{2}) = 0{,}7405$**, ceci du fait des creux qui subsistent entre les sphères. Le volume de l'infinité des très petites sphères formant une sphère idéale est donc **0,7405** fois plus faible que le volume de cette sphère idéale. Sur notre graphe ci-dessus, cette limitation donne le **C_x** linéaire volumique de **12,928** qui dessine l'asymptote jaune [221]. Il y a donc un écart de **10,56 %** entre les deux horizontales jaune et fuchsia.

On remarque que les deux **C_x** linéaires volumiques du conglomérat de **167** sphères se trouvent bien au-dessus de l'asymptote jaune : ce conglomérat n'épouse d'ailleurs pas, loin s'en faut, la forme sphérique : au contraire, il doit s'approche d'une forme *en lanterne* composée de deux pyramides tronquées à base hexagonale collées par ces bases :

[220] Il subsiste également une ambiguïté sur la direction exacte de ces déplacements horizontaux.

[221] Le **C_x** linéaire volumique de ce conglomérat sphérique idéal est donc **$11{,}6933*(0{,}7405)^{(1/3)}$= 12,928**.



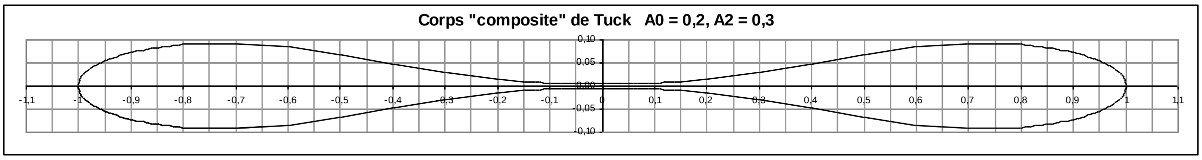
D'après nos calculs, la hauteur de cette *lanterne* est **7,928 D** (**D** étant le diamètre de la sphère élémentaire ; la largeur entre plats de sa section médiane est **6,196 D** alors que sa cote entre sommets opposés est **7 D**.

Si l'aspect bosselé de ce conglomérat de **167** sphères ne devait pas trop compter dans sa Traînée, ainsi que le passage interne du fluide entre les sphères, on pourrait tirer de ses $\mathbf{C_x}$ linéaires volumiques une première approximation de ceux d'une lanterne pleine de la même forme extérieure.

Pour obtenir cette approximation, les $\mathbf{C_x}$ linéaires volumiques de **13,708** et **13,109** de ce conglomérat en lanterne doivent évidemment être corrigés pour tenir compte des vides laissés par l'empilement *hexagonal* des sphères entre elles. C.-à-d. que les $\mathbf{C_x}$ linéaires volumiques d'une telle lanterne d'élancement unitaire pleine (sans vide intérieur aucun) seraient proches de ($\mathbf{0{,}7405^{(1/3)}}$***(13,708** et **13,109)**, soit ≈ **12,40** (mouvements transverses) et ≈ **11,86** (mouvements axiaux), soit un peu plus fort que le $\mathbf{C_x}$ linéaire volumique de la sphère pleine (qui vaut **11,6933**).

C_x linéaire d'un couple de corps « en massue » de Tuck en opposition :

Par couple de corps « en massue », nous voulons signifier le couple de corps suivant :



Les massues auquel le nom fait référence sont plutôt, comme on le voit, des massues de jongleur réunis par le manche …

Nous avons ici donné aux paramètres A_0 et A_2 utilisés par Tuck dans ses calculs les valeurs précises **0,2** et **0,3**.

L'équation définissant le corps « en massue » est donc :

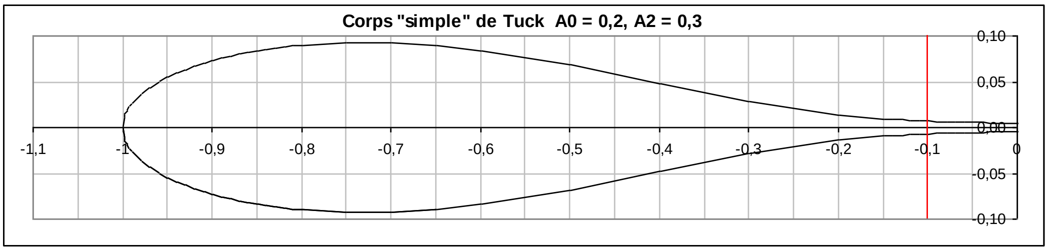
$$\mathbf{R(x)} = 2\sqrt{1-x^2}\ \mathbf{Exp}\left[-\frac{1+\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}\right)}\right]$$

(attention au signe moins qui précède le quotient dans l'exponentielle)

Nous plaçons ce corps de Tuck dans ce chapitre consacré aux corps composites car l'isthme (ou le pédoncule) qui sépare ses deux parties fait bien-sûr penser à une broche qui servirait à relier deux corps élémentaires ressemblant à des massues de jongleur.

Le diamètre de ce pédoncule mesure **5,35 %** du diamètre maximum des massues, ce qui fait que si les massues mesurent **6 mm** de diamètre, ils sont reliés par un pédoncule de diamètre **~ 0,32 mm**, ce qui est physiquement envisageable (du point de vue de la résistance mécanique de l'ensemble).

Chaque massue présente cette forme :

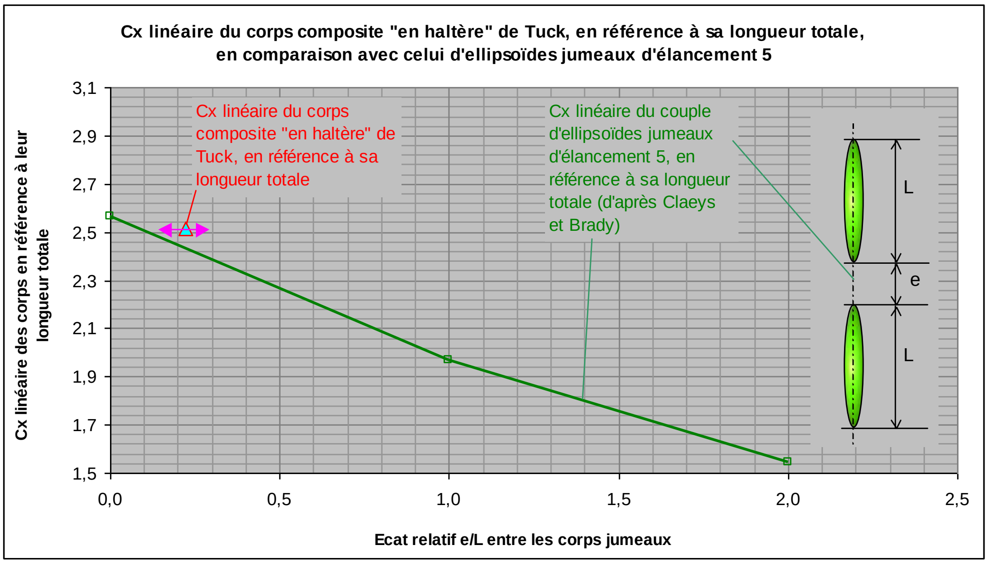


Nous avons porté sur cette silhouette l'abscisse à laquelle on peut estimer que cette massue se termine et que commence la broche qui le relie à l'autre massue. Cette option attribue à chaque massue un élancement **L/D** de **4,86**.

Par symétrie, on peut considérer la longueur de la broche comme valant **0,2**, soit le dixième de la longueur du corps composite formé par les deux massues et la broche.

Les calculs de Tuck donnent à ce corps composite (nos deux massues en opposition par le manche et la broche qui les relie) le **C_x** linéaire (en référence à la longueur totale du corps) de **2,513** lorsqu'il se déplace axialement en régime de Stokes.

Ci-dessous, nous avons comparé ce **C_x** linéaire avec celui du corps virtuel formé par deux ellipsoïdes jumeaux de même grand axe et d'élancement **5** et séparé par une distance **e** (ce couple, en vert dans la vignette du graphe, est virtuel parce qu'aucune pièce mécanique ne relie les deux ellipsoïdes) :



La Traînée de ces deux ellipsoïdes a été donnée, souvenons-nous-en, par Claeys et Brady et nous l'avons déjà montrée ici.

Les abscisses de ce dernier graphe ont ici été modifiées par nous pour représenter l'écart relatif **e/L** entre les deux ellipsoïdes et entre les deux masses (du moins, s'agissant de ces derniers corps, en considérant la broche comme longue du dixième du corps composite, comme déjà explicité à l'instant.

Comme la longueur de cette broche est une estimation, la marque à l'ordonnée **2,513** (qui représente le $\mathbf{C_x}$ linéaire du corps composite en massues, en référence à sa longueur totale) peut ne pas être à la bonne abscisse et donc devoir être décalée horizontalement (d'où la flèche à deux pointes fuchsia) ; sur le graphe, l'abscisse de cette marque est **0,2 / 0,9** qui est l'écart entre les deux massues relativement à la longueur d'une seule massue…

> À titre de révision, explicitons le calcul que nous avons effectué pour dessiner la courbe verte (ou plutôt ses trois marques) :
>
> La *Longueur Équivalente de Traînée* d'un ellipsoïde est $\mathbf{C_{xLin\,L}*L}$, $\mathbf{C_{xLin\,L}}$ étant respectivement le $\mathbf{C_x}$ linéaire d'un seul ellipsoïde en référence à sa propre longueur et **L** sa longueur (les trois valeurs de Claes et Brady sont dessinées ici pour l'élancement **5** qui nous intéresse).
>
> La Longueur Équivalente de Traînée du couple d'ellipsoïdes (fût-il virtuel) est le double, soit $\mathbf{2\ C_{xLin\,L}*L}$.
>
> La longueur totale du couple d'ellipsoïdes virtuel est (voir schéma dans la vignette du graphe ci-dessus) **2L + e**, soit **(2 + e/L) L** , **e/L** étant l'écart relatif précédemment pris comme abscisse sur le graphe révélant les travaux de Claeys et Brady.
>
> Le quotient de la Longueur Équivalente de Traînée $\mathbf{2\ C_{xLin\,L}*L}$ par **(2 + e/L) L** produit les trois marques vertes du $\mathbf{C_x}$ linéaire des couples virtuels d'ellipsoïdes en référence à leur longueur totale tel que nous l'avons dessiné ci-dessus.

La connaissance du $\mathbf{C_x}$ linéaire de ce corps composite en haltère de Tuck est intéressante en elle-même puisqu'elle pourra donner lieu à des vérifications dans des bassins de décantation. Cependant, plus intéressante encore serait la connaissance du $\mathbf{C_x}$ linéaire d'une seule de ces massues de Tuck qui forment ce corps composite et <u>en situation isolée</u> (c.-à-d. à l'écart de tout autre corps ou paroi.

Les lois du régime de Stokes font que le $\mathbf{C_x}$ linéaire d'une seule de ces massues est la moitié du $\mathbf{C_x}$ linéaire du corps composite formé de ces deux massues réunies par leur manche. <u>Mais ce $\mathbf{C_x}$ linéaire moitié est malheureusement celui d'une massue en présence (et à courte distance) de l'autre massue !</u> Ce $\mathbf{C_x}$ linéaire n'est en rien celui d'une massue de Tuck isolée.

Est-il cependant possible d'estimer le $\mathbf{C_x}$ linéaire d'un tel corps isolé ?

Nous le pensons, si l'on peut se satisfaire d'une approximation :

Quand on connaît la Traînée d'un couple de corps jumeaux proches l'un de l'autre, peut-on en tirer la Traînée d'un seul de ces corps isolés ?

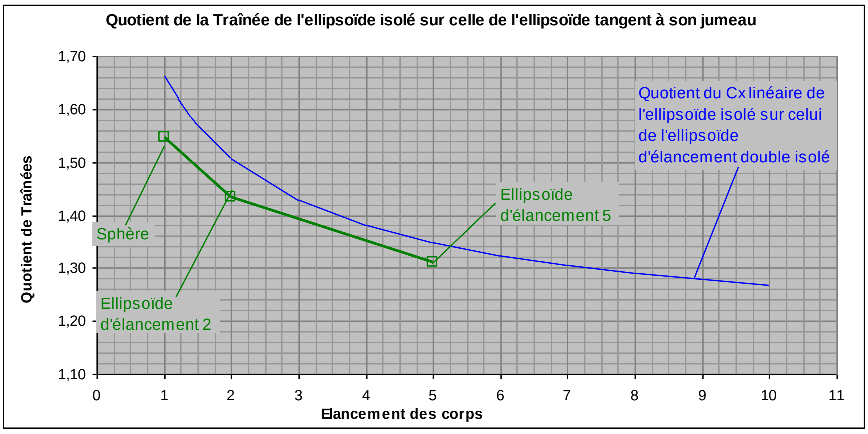
Nous pensons pouvoir approcher le $\mathbf{C_x}$ linéaire d'un corps jumeau isolé.

Pour l'établissement de cette approximation, il nous semble utile de faire dessiner à notre tableur le quotient, qu'on pourrait nommer *Quotient des Traînées Propres*, de la Traînée d'un ellipsoïde isolé sur la Traînée du même ellipsoïde lorsqu'il est en contact avec un ellipsoïde identique placé en aval de son mouvement (selon les données, précédemment exploitées, de Stimson et Jeffery et de Claeys et Brady).

Pour la sphère isolée, par exemple, le $\mathbf{C_x}$ linéaire (en référence à son diamètre, c.-à-d. sa longueur dans le sens du mouvement) est $\mathbf{3\,\pi = 9{,}425}$. Mais lorsque la sphère est en contact avec une autre sphère identique, son $\mathbf{C_x}$ linéaire se réduit à **6,088**. Le quotient de ces deux $\mathbf{C_x}$ est de l'ordre de **1,55**. [222]

Ce même *Quotient des Traînées Propres* diminue lorsque l'élancement de l'ellipsoïde augmente.

Voici en vert cette évolution pour les trois élancements évoqués (d'après Claeys et Brady :



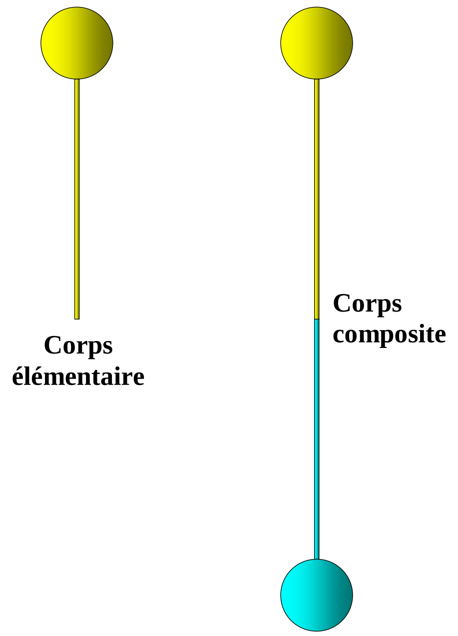
Ces trois marques vertes reprennent, bien-sûr, présentées de manière différente, des informations déjà illustrées par l'un de nos graphes précédents.

En bleu sur le graphe ci-dessus, nous avons fait figurer la courbe de l'évolution du quotient de la Traînée d'un ellipsoïde isolé d'un élancement donné $\boldsymbol{\lambda}$ sur la Traînée d'un ellipsoïde d'élancement double $\mathbf{2\lambda}$ puisque nous prenons cette dernière Traînée comme proche de celle de l'ellipsoïde d'élancement $\boldsymbol{\lambda}$ en contact avec son ellipsoïde jumeau (rappelons-nous que nous avons fait ce constat à l'occasion de la construction de ce graphe) : cette dernière courbe bleue donne donc un modèle vraisemblable pour la prolongation de la courbe verte vers la droite.

Mais nous avons fait mieux.

La courbe verte ci-dessus ne saurait représenter l'évolution du Quotient des Traînées Propres des corps de toutes formes : en effet, moins un corps possède des sections volumineuses du côté où il est mis en contact avec son corps jumeau et moins sa Traînée devrait se ressentir de la présence de ce corps jumeau ; ainsi, ci-dessous, la Traînée du corps à antenne jaune doit être peu diminuée par la présence de son jumeau bleu disposé symétriquement :

[222] Faire le quotient des $\mathbf{C_x}$ linéaires (en référence à la même longueur) de la sphère dans ces deux situations revient à faire le quotient des Traînées de la sphère dans ces deux situations.



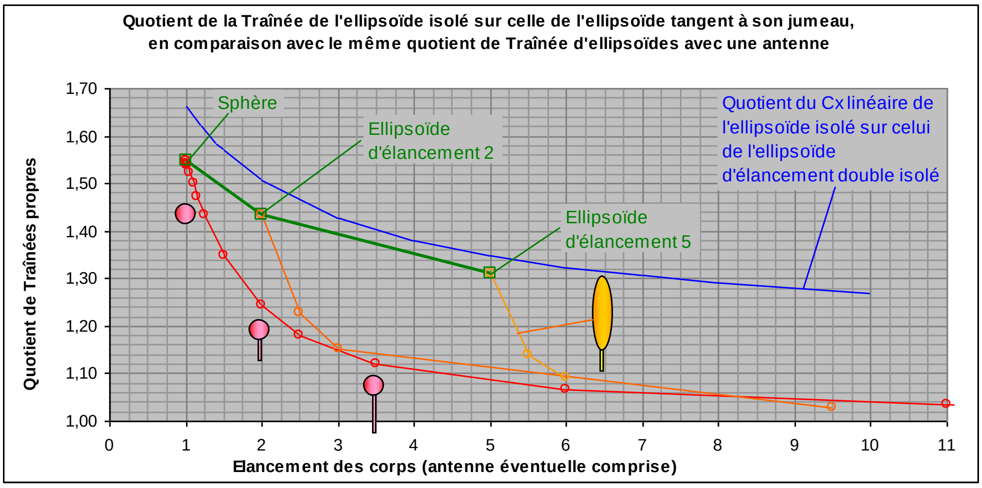
Cette dernière intuition reste sans doute à démontrer mathématiquement mais nous avons démontré à minima plus haut que si un corps possède une antenne de diamètre relatif très faible, la contribution à la Traînée de cette antenne est négligeable.

Dans le cas présent, donc, si l'antenne qui prolonge la sphère est de diamètre relatif suffisamment faible, la Traînée de ces corps doit être celle de la sphère seule.

Les antennes du corps composite jaune et bleu de droite, bien que n'apportant qu'une Traînée négligeable, endossent alors le rôle d'entretoises empêchant les parties vraiment volumiques des corps (ici les sphères) de s'approcher l'une de l'autre : la Traînée du corps composite (corps jaune + corps bleu) en ressort comme celle de deux sphères notablement éloignés, donc assez proche de celle du corps élémentaire isolé (le corps jaune, par exemple, donc la sphère).

On est d'ailleurs en droit de penser que c'est parce que les ellipsoïdes finissent par ressembler à des antennes que la courbe verte ci-dessus (qui représente leur Quotient des Traînées Propres) s'abaisse vers l'unité à mesure que les abscisses augmentent : la longueur accrue de ces ellipsoïdes maintient alors l'essentiel de leur volume (et de leur surface) à distance suffisante de l'ellipsoïde jumeau avec le quel ils sont pourtant en contact…

Dans cet état d'esprit, nous avons fait dessiner à notre tableur (d'après les informations de Stimson et Jeffery et Claeys et Brady, déjà présentées plus haut) le *Quotient des Traînées Propres* de corps composites formés d'une sphère ou d'un ellipsoïde muni(e) d'une antenne de longueur variable.



L'évolution du Quotient des Traînées Propres de la sphère à antenne plus ou moins longue (en rouge) reprend bien-sûr la forme de la courbe rouge du graphe déjà présenté (quoiqu'ici les ordonnées de ce dernier graphe se retrouvent au dénominateur du Quotient des Traînées Propres. Pour plus de clarté, nous avons représenté sous cette courbe des petites sphères avec antenne ou non.

À l'ordonnée **5**, on peut traduire l'ordonnée de cette courbe rouge par la phrase suivante : Un corps composite formé d'une sphère de diamètre **D** et d'une antenne de longueur **4 D** (ce corps ayant donc un élancement de **5**) présente un Quotient de Traînée Propres de **~1,08**.

Comme par ailleurs un corps ellipsoïdal de même élancement **5** présente un Quotient des Traînées Propres de **~1,32** nous pouvons dire qu'un corps qu'un corps plus plein à l'une de ses extrémités qu'une antenne et moins plein qu'un ellipsoïde aura un Quotient des Traînées Propres entre **1,08** et **1,32**…

Sur ce dernier graphe, la courbe orange représente l'évolution du Quotient des Traînées Propres d'un ellipsoïde d'élancement **2** avec une antenne de longueur variable et la courbe orange claire celle du Quotient des Traînées Propres d'un ellipsoïde d'élancement **5** (nous avons symbolisé en orange clair cet ellipsoïde avec une antenne).

On note que les trois courbes rouge, orange et orange clair rejoignent les marques de la courbe verte pour l'élancement **1**, **2** et **5** : c'est normal puisque à ces élancements la sphère ou les ellipsoïdes arborent des antennes de longueur nulle.

On note aussi que, malheureusement, ces trois courbes se croisent quelque peu et, à tout le moins, se regroupent en une sorte d'asymptote pour les grands élancements.

Ce croisement de courbe dégage alors un espace vide en-dessous de la marque verte à l'abscisse **5** que nous allons utiliser plus loin…

Il nous semble quand-même que l'on peut utiliser la tendance générale de ces courbes pour approcher (d'assez loin) le $\mathbf{C_x}$ linéaire du corps élémentaire de Tuck en massue (dont nous avons déjà montré la silhouette), en adoptant pour lui la longueur moitié du corps composite de Tuck. Sur le graphe ci-dessus, son Quotient des Traînées Propres, pour son élancement proche de **5**, doit se situer entre **1,08 et 1,32** (et avoisiner plutôt les **1,25** [223]).

Puisque le $\mathbf{C_x}$ linéaire du corps composite est calculé par Tuck comme valant **2,513** (en référence à sa longueur totale), le $\mathbf{C_x}$ linéaire d'une massue (en référence à sa propre longueur qui est moitié de celle du corps composite) est le même, soit **2,513** (la

[223] Cette dernière valeur est évidemment sujet à caution…

Longueur Équivalente de Traînée est moitié, mais la longueur de la massue également la moitié).

Ce donne comme fourchette de la valeur approchée du C_x linéaire de la massue de Tuck isolée (en référence à sa longueur) de **1,08*2,513** à **1,32*2,513**, soit de **2,71** à **3,32** (en référence à sa propre longueur).

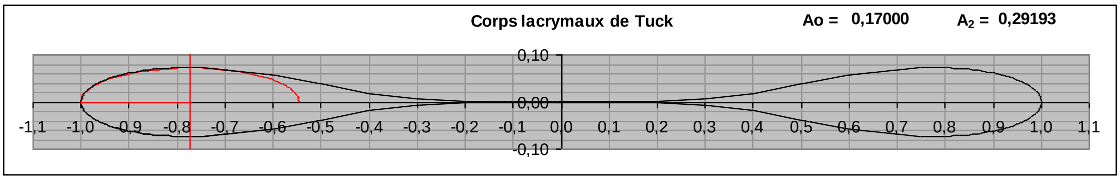
Pour comparaison, sur ce graphe (établi en référence à la longueur également), cette fourchette de C_x linéaire pour la massue de Tuck se trouve juste dessous la courbe bleue traitant des ellipsoïdes, à l'élancement **5** : que notre fourchette touche cette courbe est normal puisque sa limite supérieure a été calculée d'après notre courbe verte qui relate justement le Quotient des Traînées Propres des ellipsoïdes.

On peut évidemment penser que le vrai C_x linéaire de la massue de Tuck isolée se situe autour du milieu de ladite fourchette, même si manquent un critère objectif de choix de ce C_x linéaire à l'intérieur de cette fourchette…

Étude des corps lacrymaux jumeaux de Tuck :

Nous poursuivons ci-dessous l'étude de corps de Tuck déjà rencontrés plus haut et assez proches des massues symétriques placés en opposition par leur poignée

Voici une image d'un couple de ces corps *lacrymaux* de Tuck :



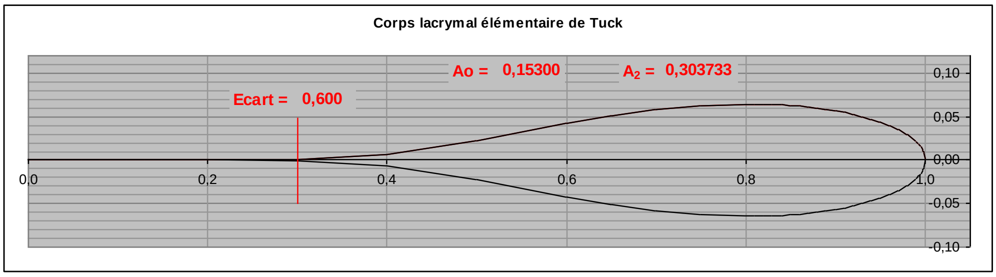
Ces corps sont évidemment toujours dessinés par l'équation de Tuck à deux paramètre que nous avons présentée plus haut, la valeur de ces deux paramètres étant indiquée dans le titre de ce dernier graphe.

La forme de la partie arrondie de ces corps lacrymaux (partie arrondie que l'on pourrait nommer *bord d'attaque* par analogie avec la partie avant d'une aile) est toujours très proche d'une ellipse, comme le montre la représentation de l'ellipse rouge.

Nous avons eu l'impression, en faisant jouer dans notre tableau les curseurs qui donnent leur valeur au paramètres $\mathbf{A_0}$ et $\mathbf{A_2}$, que la forme de ces corps lacrymaux ne variait que très peu.

Nous avons donc eu l'idée de copier la silhouette d'un des corps lacrymaux élémentaires dessinés par le couple de paramètres [$\mathbf{A_0}$ **= 0,153** ; $\mathbf{A_2}$ **= 0,3037333**] afin de vérifier si d'autres couples [$\mathbf{A_0}$; $\mathbf{A_2}$] dessinaient des formes homothétiques.

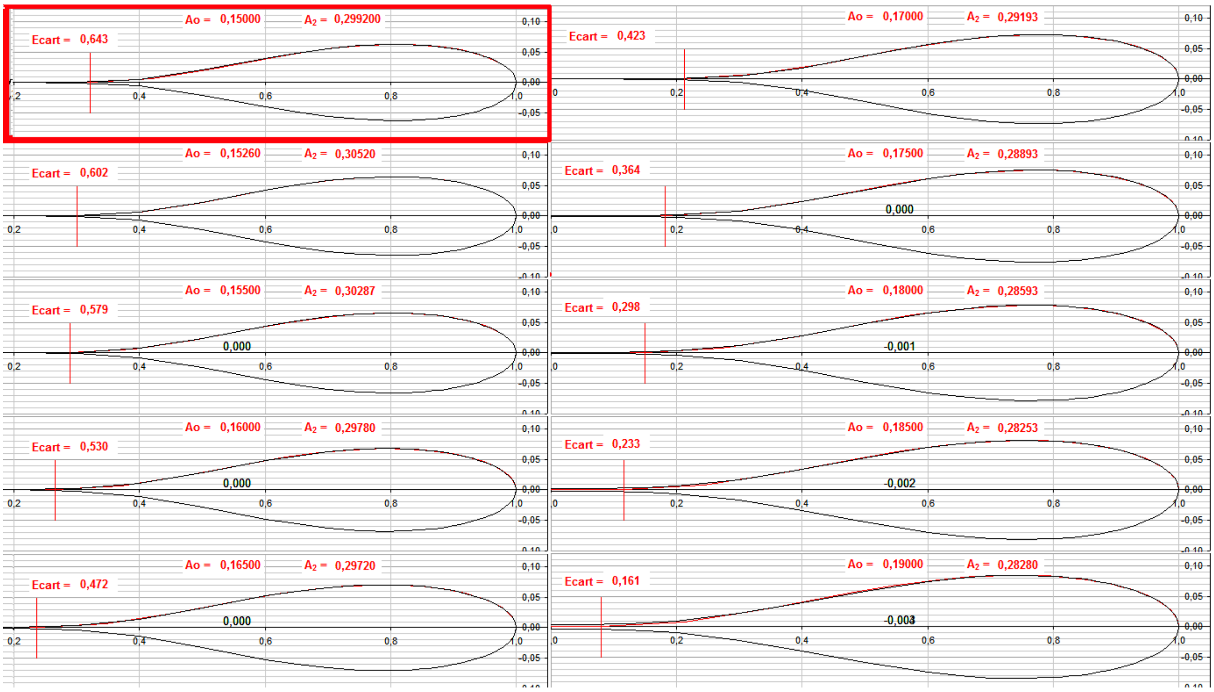
Voici la silhouette dessinée par ce couple [**0,153** ; **0,3037333**] :



En plus de saisir toutes les ordonnées et abscisses de cette silhouette afin d'en réaliser des homothéties, nous avons pris la décision de considérer que ce corps élémentaire lacrymal s'arrêtait à l'abscisse **0,3**, c.-à-d. qu'il mesure en longueur **0,7** et qu'il est séparé de son jumeau symétrique par une distance **2*0,3 = 0,6** (ce qui est indiqué ci-dessus par un segment vertical rouge).

Ce segment vertical (qui fixe l'élancement du corps à **5,43**) est bien-sûr destiné à être également pris en compte dans l'homothétie de la silhouette générale du corps.

Et, bingo ! voici quelques exemples des corps (toujours très proches dans leurs formes) que nous avons obtenus en faisant varier les paramètres $\mathbf{A_0}$ et $\mathbf{A_2}$ de l'équation de Tuck :



Nous avons procédé de la façon suivante : Nous avons donné une valeur au coefficient $\mathbf{A_0}$ (valeur souvent ronde, sauf en limite de la plage possible) puis nous avons fait varier la valeur de $\mathbf{A_2}$ afin de faire disparaître la silhouette homothétique rouge (automatiquement dessinée d'après le rayon maximal du corps) derrière le tracé normal (en noir) du corps « actif ».

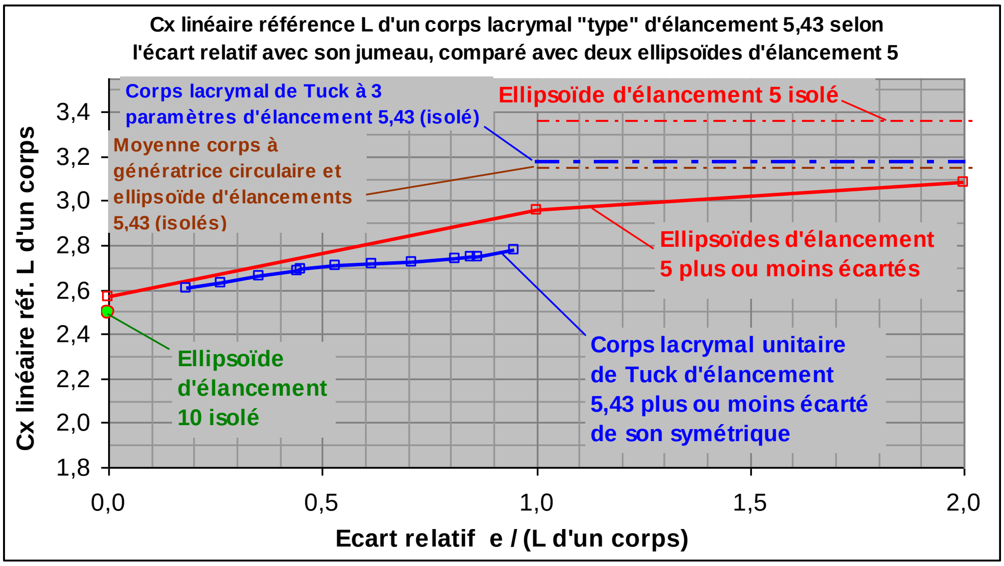
Comme on le voit, spécialement sur la dernière captation d'écran en bas à droite, nous avons cherché à équilibrer les dépassement vers la gauche de la courbe rouge par ses dépassement vers la droite, bien qu'une autre stratégie soit bien-sûr possible et spécialement une stratégie qui minimiserait une quantification calculée de ces dépassements.

À titre de contre-exemple, la première captation d'écran en haut à gauche (ceinte de rouge) montre les plus mauvais résultat en matière de recouvrement des courbes rouge et noire : il n'est pas catastrophique !

Ceci étant, si l'on considère, comme souvent, que la forme des corps influe peu en régime de Stokes sur leur Traînée, on peut admettre qu'il y a vraiment une quasi homothétie entre les corps lacrymaux de Tuck formés par un grand nombre de couples [$\mathbf{A_0}$; $\mathbf{A_2}$].

Cette quasi homothétie étant constatée, il n'a pas été difficile d'enregistrer le $\mathbf{C_x}$ linéaire de chaque corps (en référence à son diamètre [224]), puis en référence à sa longueur (l'élancement de notre silhouette étant de **5,43**).

Ces enregistrements produisent la courbe bleu dense sur le graphe suivant :



Sur ce même graphe, nous avons fait figurer en rouge le $\mathbf{C_x}$ linéaire d'un ellipsoïde d'élancement **5** (en référence à sa longueur **L**) en présence d'un ellipsoïde jumeau à un certain écart relatif **e / L** : ce $\mathbf{C_x}$ linéaire est de même ordre que celui de notre corps lacrymal aux écarts relatifs renseignés…

Notre courbe bleu dense est assez régulière, sauf aux plus fort écarts relatifs (en particulier la marque la plus à droite qui correspond au couple [**0,15** ;**0,2992**] qui est entouré de rouge sur la compilation des captations d'écran déjà présentée).

La tendance à un quasi-palier que montre cette courbe après l'abscisse **0,5** est troublante : à notre sens, l'asymptote (c.-à-d. le $\mathbf{C_x}$ linéaire pour le corps lacrymal unitaire de Tuck qui serait <u>isolé</u>) doit se situer notablement plus haut que **2,8**, sauf à penser que des corps comme ceux-ci, très fuselés du côté de leur jumeau, se ressentent mutuellement comme très éloignés l'un de l'autre (nous pensons lever ce doute à l'instant).

Nous avons fait dessiner sur le même graphe à notre tableur le $\mathbf{C_x}$ linéaire calculé par moyenne entre celui du corps à génératrice circulaire d'élancement **5,43** (tel

---

[224] C'est la moitié du $\mathbf{C_x}$ linéaire (en référence diamétrale) du corps complet (qui est formé des deux corps jumeaux), du moins si l'on admet que les *antennes* qui prolongent les « bord » de fuite » des deux corps n'occasionnent aucune Traînée. Ce $\mathbf{C_x}$ linéaire en référence diamétrale est directement donné par notre tableau d'après la valeur de Tuck.

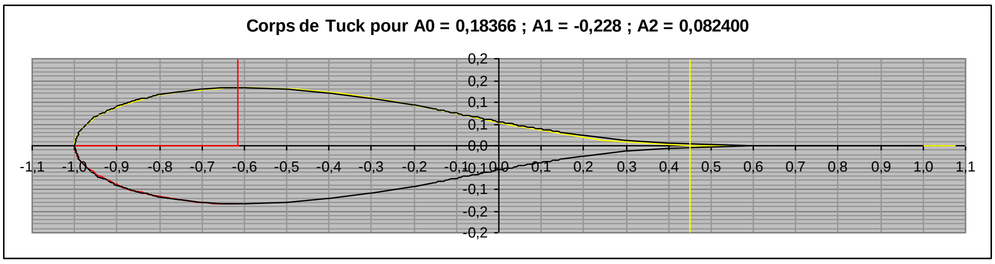
que calculé par notre proposition de régression jaune pour ce type de corps), soit **3,08** et celui d'un ellipsoïde d'élancement **5,43** (en trait d'axe marron) ;

Il est en effet de bonne ingénierie de penser que le $\mathbf{C_x}$ linéaire de notre corps lacrymal unitaire de Tuck isolé se situera entre celui d'une corps à génératrice circulaire (qui ressemble à la forme de *l'arrière* de notre corps lacrymal, bien que celui-ci y possède une génératrice plus concave) et celui de l'ellipsoïde qui, on l'a vu, épouse presque parfaitement ses formes *avant*…

Ce type de *composition proportionnelle de Traînées* (par composition des Traînées de parties élémentaires) mérite d'ailleurs qu'on s'y attarde : nous y revenons à l'instant.

Sur notre graphe apparait égalent le $\mathbf{C_x}$ linéaire de l'ellipsoïde de même élancement **5,43**, soit **3,234** (en trait d'axe rouge).

Mais il faut ici se souvenir que nous avons étudié plus haut ce corps lacrymal de Tuck à trois paramètres :

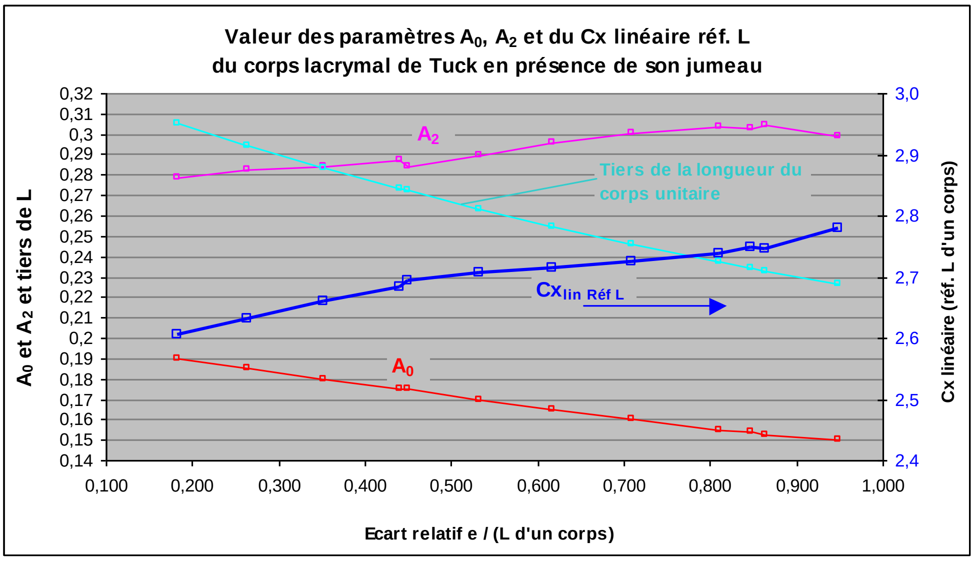


Sa silhouette est ici comparée à l'ellipse (en rouge dans les ordonnées négatives de gauche) et à la silhouette de notre corps type (ici en jaune).

Nous avons trouvé à ce corps lacrymal unique de Tuck un $\mathbf{C_x}$ linéaire de **3,18** (en référence à sa longueur physique). Ce $\mathbf{C_x}$ linéaire est utilisé pour dessiné l'asymptote bleue dense, à cette ordonnée.

La courbe bleue dense de nos corps lacrymaux jumeaux adopte très certainement cette asymptote.

La tendance au quasi-palier de notre courbe bleu dense ci-dessus vers son milieu ne manque pas, cependant de nous interpeler ; nous avons cherché toutes les raisons possibles de cette discontinuité dans sa pente. Voici à ce sujet un graphe montrant l'évolution conjointe des différents paramètres ayant dessiné la même courbe bleu dense :



Sur ce graphe apparaissent :

→ en rouge les valeurs du paramètre $\mathbf{A_0}$ que nous avons posé en premier lors de la détermination de chaque corps ;

→ en fuchsia les valeurs du paramètre $\mathbf{A_2}$ que nous avons fait varier à l'aide d'un curseur afin de donner au corps lacrymal la silhouette la plus proche de notre silhouette type (rouge sur les captations d'écran) ;

→ en bleu dense la valeur résultante du $\mathbf{C_x}$ linéaire de notre corps lacrymal (en référence à sa longueur, à lire sur l'échelle de droite) : c'est la même courbe que sur le graphe précédent.

→ en bleu clair, à lire sur l'échelle de gauche, l'évolution <u>du tiers</u> de la longueur unitaire du corps lacrymal (le tiers pour que cette donnée puisse apparaître dans l'échelle d'ordonnées du graphe) : On peut constater la régularité de cette courbe qui, rappelons-le, a été dessiné à partir de nos estimations de la valeur de $\mathbf{A_2}$ qui donne au corps lacrymal la silhouette la plus proche de la silhouette type choisie.

Cela n'apparaît pas clairement sur ce dernier graphe, mais les ordonnée **Y** des courbes rouge, bleu dense et bleu clair sont liées par la relation :

$$\mathbf{Y}_{\text{Bleu dense}} = \mathbf{k^*Y}_{\text{Rouge}} \,/\, \mathbf{Y}_{\text{Bleu clair}}$$

…relation ou **k** est un coefficient constant (mais attention au fait que les ordonnées bleu dense sont à lire sur l'axe de droite)…

Ce qui revient à dire que les irrégularités de la courbe bleu dense sont celles de la rouge exacerbées par celles de la bleu clair et par la pente générale de cette même dernière…

Estimation de la Traînée d'un corps par *composition proportionnelle* des Traînées de parties élémentaires :

Ce type de composition est utilisé dans la Mécanique des Fluides des hauts Reynolds : par exemple, pour connaître la Trainée d'une fusée en subsonique, on sommera la Traînée de son cône d'ogive avec celle de sa partie cylindrique et celle de son culot.

Bien-sûr, une telle pratique se justifie plus facilement pour des corps d'élancement assez fort (**10** ou **15**).

De plus, il convient de prendre, pour la Traînée du cône d'ogive celle d'un cône mesurée en présence d'une partie cylindrique prolongeant ce cône (sinon l'écoulement sur les épaules du cône se fait plus rapide par anticipation de l'absence de partie cylindrique).

De même, l'estimation de la Traînée de Friction de la partie cylindrique et de la Traînée du culot sont liées aux parties de la fusée qui les précèdent (voir à ce sujet nos textes LE $\mathbf{C_X}$ DES FUSÉES et LE $\mathbf{C_X}$ DE CULOT D'HOERNER).

S'agissant de la Traînée en régime de Stokes, cette méthode d'estimation comporte évidemment de grands risques, mais c'est à peu près la seule dont nous disposions pour des corps dont la Traînée n'a été ni calculée par des mathématiciens ni mesurés par des physiciens en bassin de décantation.

À titre d'exemple, on peut se livrer à une estimation de la Traînée d'un hémisphère :

Approche de la Traînée d'un hémisphère :

La Traînée d'un tel corps devrait tenir à la fois de celle d'un court cylindre (d'élancement **0,5**, proche du disque) et de celle d'un ellipsoïde également d'élancement **0,5** :

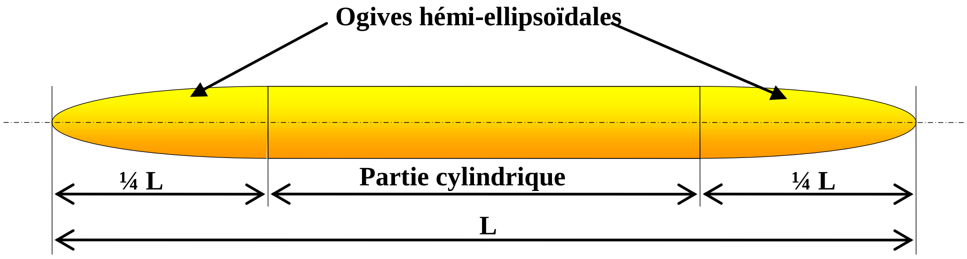
Son $\mathbf{C_x}$ linéaire, en référence diamétrale, pourra donc être pris comme la moyenne de celui du cylindre d'élancement **0,5** et de celui d'un ellipsoïde d'élancement **0,5**.

Le $\mathbf{C_X}$ linéaire (réf. diamétrale) du cylindre d'élancement **0,5** peut être pris dans ce tableau (disons **9,75**) et celui de l'ellipsoïde sur celui-là (soit à peu près **8,5**).

Le $\mathbf{C_x}$ linéaire d'un hémisphère en référence diamétrale pourrait donc s'approcher de la moyenne de ces deux nombres, à savoir **9,12**…

Toute personne capable de donner un autre $\mathbf{C_x}$ linéaire apportera une merveilleuse nouvelle !

Nous avons rencontré plus haut des corps de Tuck formés, par exemple, d'une partie centrale quasi cylindrique et de deux *ogives* quasi hémi-ellipsoïdales comme celui-ci :



Ce corps d'élancement **11,91** présente, d'après Tuck, un **C_x** linéaire (en référence à sa longueur) de **2,513**, donc **2,513*11,91 = 29,92** en référence diamétrale.

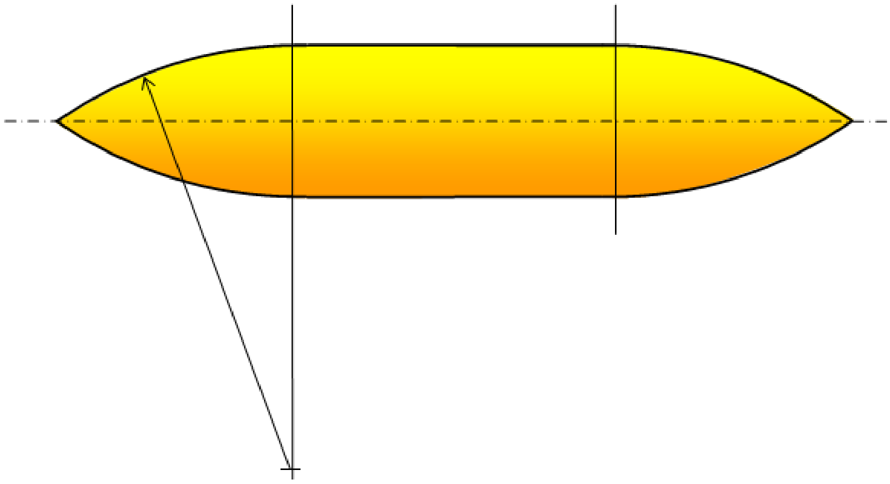
Plus loin dans l'étude des corps *ellipsoïdo-cylindriques* de Tuck, nous avons pu vérifier que la Traînée de tels corps d'élancement **λ** se trouvait très proche de la moyenne pondérée entre :

→ la Traînée du bâtonnet cylindrique d'élancement **λ** (selon la formule de Cox, à savoir celle-ci avec au dénominateur le reliquat **–0,80685**)

→ et la Traînée d'un ellipsoïde également de même élancement **λ**

…la pondération de cette moyenne se faisant selon l'importance de la partie cylindrique (une partie cylindrique de longueur relative **50 %** correspondant à une moyenne simplement arithmétique [225])…

L'étude d'autres corps de Tuck, nous pensons aux corps à génératrice recto-circulaire :



…nous a également confronté à la même réalité [226]…

Il nous paraît au demeurant que cette méthode de composition proportionnelle s'applique avec plus de précision à des corps dont les différentes parties (cylindriques, ellipsoïdales, à génératrice circulaire) se raccordent tangentiellement l'une aux autres.

---

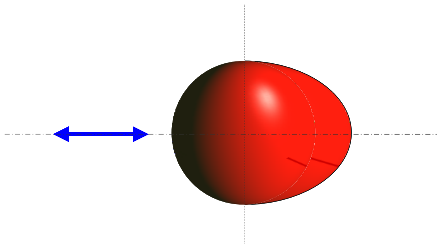
[225] Dans le cas d'une partie cylindrique valant **n** fois la longueur du corps (**n** étant compris entre **0** et **1**) le **C_x** résultant est **n $C_{xBâtonnet\,\lambda}$ + (1-n)$C_{xEllipsoïde\,\lambda}$**, l'indice **λ** rappelant ici que les deux **C_x** fondateurs sont à prendre pour des corps d'élancement **λ**.

[226] Le **C_x** résultant étant de même : **n $C_{xBâtonnet\,\lambda}$ + (1-n)$C_{xGénéCirc\,\lambda}$**

De même, la précision de cette méthode de composition proportionnelle diminuera sans doute pour les corps de faibles élancements…

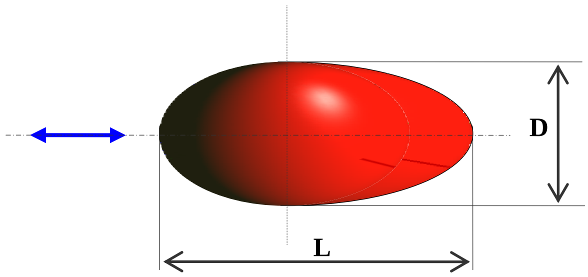
Approche de la Traînée d'un œuf :

En l'absence d'autres informations un œuf en déplacement axial pourra être considéré comme composé d'un hémisphère raccordé à un demi ellipsoïde d'élancement **1,5**, ce qui dessine le corps :



Le Cx linéaire de ce corps tiendra évidemment de celui de la sphère (**3 π**) et de celui de l'ellipsoïde d'élancement **3**, à savoir **13,2** (en référence diamétrale) si l'on se fie à ce graphe, mais évidemment plus près de **13,2** que de **3 π**. La moyenne pondérée (par les élancements individuels) de ces deux **C_x** linéaires donne de fait le **C_x** linéaire **~12,26** (en référence diamétrale).

La même démarche d'approximation peut évidemment être utilisée pour les corps constitués de deux hémi-ellipsoïdes d'élancements différents en déplacements axiaux :



Ceci étant dit, dès qu'un mathématicien ou un chercheur aurons calculé ou évalué par essais la Traînée de tels corps, il sera fort enrichissant de calculer à postériori ce que cette Traînée doit à chaque hémi-ellipsoïde [227]…

Dans les réflexions qui précèdent, nous n'avons envisagé que les déplacements axiaux de ces corps en œufs (d'ailleurs nous avons utilisé la courbe du **C_x** linéaire des ellipsoïdes en déplacement "polaire") ; il nous paraît cependant que cette approche par sommation de **C_x** élémentaires peut s'appliquer de la même façon à des <u>déplacements normaux</u> de tels corps (et sans doute d'autres corps)…

[227] Nous imaginons ici de déterminer une autre loi de pondération de la moyenne des Traînées…

Quelques autre corps particuliers :

Les calculs mathématiques de nos brillants mathématiciens n'ont pas épuisé, pour le moment, toutes les formes possibles pour des corps décantant en régime de Stokes.

Un corps aussi simple (et fréquent dans l'industrie) que la rondelle n'a pas été étudié (à notre connaissance) :

En première approximation l'utilisation du Rayon Équivalent de Stokes, ou plutôt du *Diamètre Stokésien* (que nous avons évoqué plus haut) pourrait rendre service. Celui-ci, si on le nomme $\mathbf{D_{St}}$, est défini comme valant :

$$\mathbf{D}_{St} = \mathbf{2}\sqrt{\frac{\mathbf{S}}{\boldsymbol{\pi}}}$$

...**S** étant la surface frontale du corps considéré (trou central décompté).

Dans notre cas de la rondelle, $\mathbf{D}_{St}$ sera donc le diamètre d'un cercle offrant la même surface frontale **S** que la rondelle.

On multipliera ensuite ce diamètre $\mathbf{D}_{St}$ par le $\mathbf{C_x}$ linéaire d'un disque (**8**) pour approcher la Longueur Équivalente de Traînée de la rondelle en mouvement axial (mouvement vertical sur l'image ci-dessus).

Nous revenons à l'instant sur l'utilisation de ce D*iamètre Stokésien*

Cependant, il s'avère, en particulier à la lecture des travaux aussi bien de Sunada et coll. que de Roger et Weidman sur les cylindre creux (dont des disques percés) que cette méthode du diamètre Stokésien ne peut rendre compte du cas des corps troués (les rondelles, par exemple), ceci parce que l'augmentation de la vitesse du fluide autour des arêtes de ce corps (que ce soit les arêtes extérieures ou les lèvres du trou central) occasionne une forte montée en pression (visqueuse) de ce fluide.

Cette forte montée en pression dans la zone des arêtes s'oppose à la diminution de la surface soumise à la pression (en déplacements frontaux, le disque comme le disque troué ne doivent leur Traînée qu'à la pression, la friction ne disposant d'aucune surface convenablement orientée pour se faire sentir dans la Traînée).

Des constats de Roger et Weidman nous tirons la valeur du $\mathbf{C_x}$ linéaire du disque troué d'un trou de diamètre moitié en déplacement frontal : c'est **7,848** (en référence à son diamètre) ;

Puis d'après les constats de Sunada et coll. sur la plaque carrée perforée d'un trou également carré en déplacement coplanaire et après une comparaison que nous expliquons ici, nous tirons le C_x linéaire de la plaque carrée d'un trou également carré de côté moitié en déplacement coplanaire : c'est **5,23**.

Cas du tore de section carrée :

Nous verrons plus bas comment, d'après les travaux de Roger et Weidman, nous avons pu réaliser une excellente estimation du C_x linéaire du tore de section carrée.

Approche de la Traînée d'un corps par utilisation du Diamètre Stokésien :

Répétons-le, le Diamètre Stokésien permet une approche des caractéristiques de Traînée d'un corps par usage d'une loi empirique qui prescrit que deux corps qui décantent en régime de Stokes ont une Traînée de même ordre de grandeur si ils présentent la même surface frontale ou le même volume.

Toutes les valeurs de C_x linéaire annoncés dans le présent texte s'inscrivent évidemment en faux contre cette loi empirique (ou ces deux lois selon que l'on base le Diamètre Stokésien sur le volume du corps ou sa section frontale).

Cependant, lesdites lois empiriques donnent bien l'échelle de la Traînée, dans la mesure où un grain de sable globalement sphérique décantera bien à une vitesse proche de celle déterminée à partir de son Diamètre Stokésien.

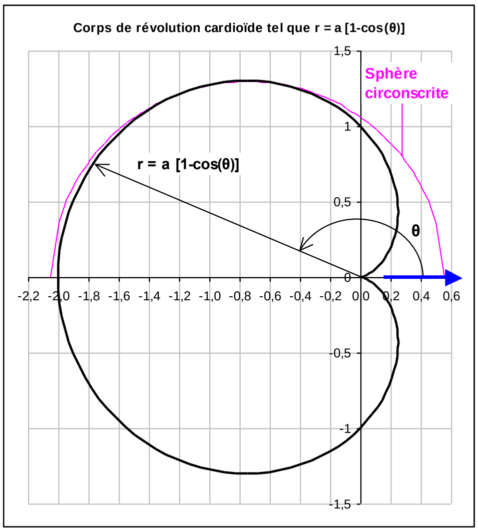
De même, ainsi que nous l'avons déjà écrit plus haut, une plaque carrée montrera bien, dans un mouvement normal à son plan, une Longueur Équivalente de Traînée proche de celle d'un disque circulaire de même section frontale.

Cette loi donne bien l'échelle des phénomènes, mais elle est évidemment approchée (ce serait trop simple). Pour s'en convaincre, on peut calculer la longueur de Traînée d'un cube de côté **a** : c'est, nous le savons **4 π a = 12,57 a**.

Le diamètre d'une sphère de même volume est $\mathbf{a}\sqrt[3]{\frac{6}{\pi}}$ **= 1,24 a** ce qui implique que cette sphère de même volume montrera une Longueur Équivalente de Traînée de **1,24 3 π**, soit **11,69 a** qui est **0,93** fois la Traînée exacte du cube.

Cette approximation est donc intéressante (pour un corps simple comme le cube), mais elle reste une approximation.

Cx linéaire de la cardioïde de révolution en mouvement axial :



Pour le corps cardioïde de révolution d'équation **r = a[1–Cos(θ)]** se déplaçant selon son axe de révolution, Bourot (en 1975) et Richardson (en 1977), cités par Hasimoto et Sano, ont obtenu la longueur de Traînée **7,68474 π a**.

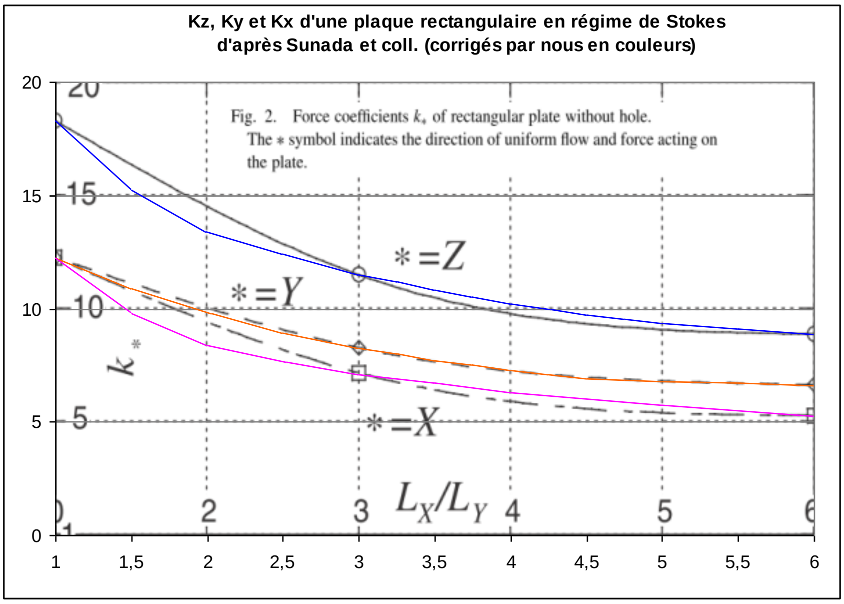
En référence au diamètre de la sphère circonscrite (en fuchsia sur notre schéma), diamètre qui est le diamètre frontal, on trouve un $\mathbf{C_x}$ linéaire de **9,29238** [228].

Ce $\mathbf{C_x}$ linéaire est donc un peu plus faible que celui de ladite sphère circonscrite (**3π = 9,425**), malgré l'invagination à l'origine de rayons)…

Cx linéaire de la plaque rectangulaire de Sunada, Tokutake et Okada :

Dans une note de recherche de 2009, ces auteurs font état des résultats de leur calculs analytiques de la Traînée, en régime de Stokes, de plaques rectangulaires, ces plaque de dimensions variables étant percées ou non d'un trou rectangulaire de dimensions et d'emplacement également variables.

Pour ce qui est de la plaque rectangulaire sans trou, ils proposent ce graphe de ses caractéristiques de Traînée selon le rapport L_x / L_y de ses deux côtés :



Ce graphe est protégé par un copyright et nous ne nous permettons de le reproduire que pour en critiquer certaines erreurs (les courbes bleue, rouge et fuchsia sont nos corrections) :

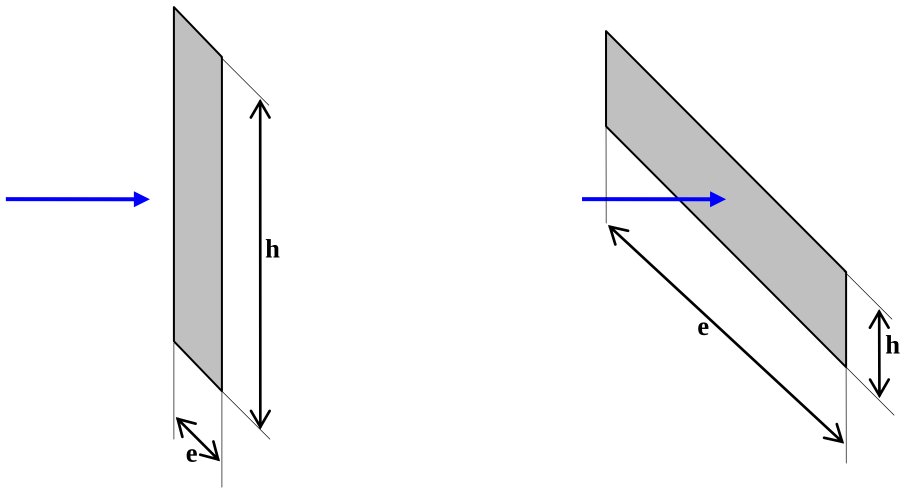
Les marques rondes, losangiques et carrées représentent, à notre sens, les résultats des calculs des auteurs, aux rapports L_x / L_y **1**, **3** et **6**. En s'appuyant sur ces marques les auteurs japonais ont tracé tout à fait honnêtement leurs trois courbes noires.

Cependant, ce faisant, ils avaient oublié une caractéristique assez classique s'agissant des plaques rectangulaires exposées frontalement à l'écoulement : observons la courbe supérieure de ce graphe, par exemple (courbe marquée * = Z) : cette courbe représente, à un coefficient près, le $\mathbf{C_x}$ linéaire de la plaque rectangulaire exposée frontalement.

Or cette plaque rectangulaire offre évidemment la même Traînée qu'elle soit orientée comme sur le schéma de gauche ci-dessous ou comme le schéma de droite :

---

[228] C'est aussi la valeur annoncée par Ui.



En conséquence de quoi, donner, comme l'ont fait Sunada et coll., le $\mathbf{C_x}$ linéaire en référence **h** de la plaque de droite de rapport **h/e = 3**, par exemple, permet de connaître le $\mathbf{C_x}$ linéaire (en référence **e** puis **h** [229]) de la plaque de rapport **h/e = ⅓** (plaque représentée dans notre schéma de droite).

<u>On verra que ce simple constat impose des modifications conséquentes à leurs courbes.</u>

Le processus qui conduit à ces modifications peut en être démontré facilement en écrivant que la longueur de Traînée des deux plaques (ou plutôt de la plaque dans ses deux présentations) est la même.

Diviser cette longueur de Traînée par **h** produit le $\mathbf{C_x}$ linéaire en référence **h** de la plaque de gauche :

$$\mathbf{L_{Traînée}/h = \underline{C_{xLin\ Réf.h}}}$$

Ce $\mathbf{C_{xLin\ Réf.h}}$ est donné par Sunada et coll. Nous l'avons souligné pour le rappeler.

Pareillement, diviser cette longueur de Traînée par **e** produit le $\mathbf{C_x}$ linéaire en référence **e** de la plaque de droite :

$$\mathbf{L_{Traînée}/e = C_{xLin\ Réf.e}}$$

De ces deux égalités, on peut tirer :

$$\mathbf{\underline{C_{xLin\ Réf.h}} * h = C_{xLin\ Réf.e} * e}$$ [230]

D'où l'on tire enfin :

$$\mathbf{C_{xLin\ Réf.e} = \underline{C_{xLin\ Réf.h}} * (h/e)}$$

Or la plaque de droite à un rapport **h/e = ⅓**.

---

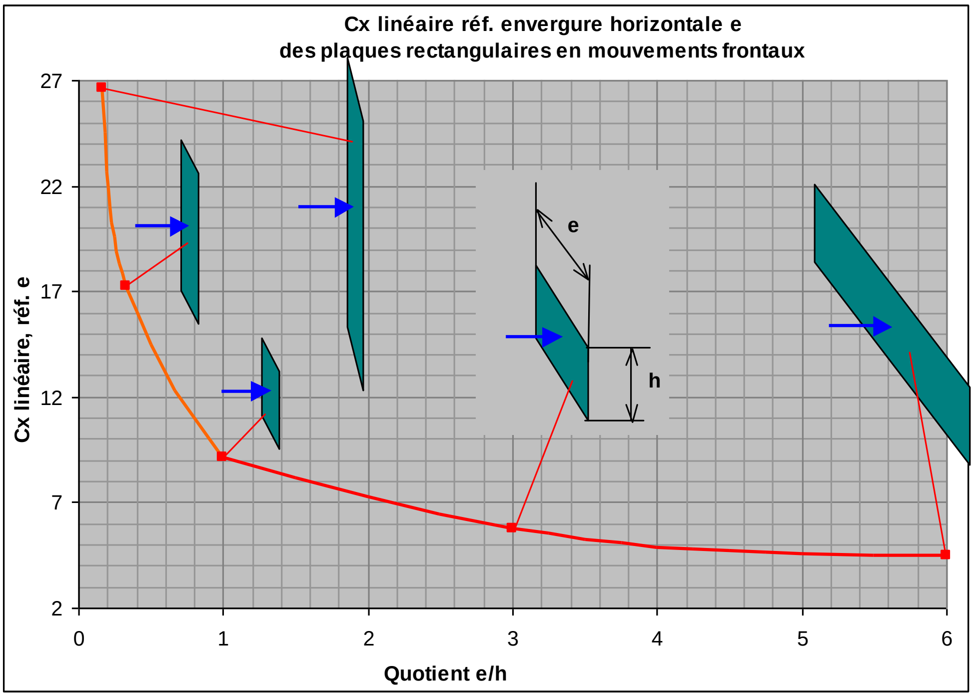
[229] Nous avons souvent effectué ce genre de changement de Longueur de référence…

[230] Nous venons simplement d'écrire que les Longueurs de Traînée des deux plaques sont les mêmes.

Si l'on représente les caractéristiques de Traînée des plaque rectangulaires, en général, on pourra donc y adjoindre un nouveau point, à gauche du quotient **h/e** unitaire auquel se sont arrêtés les auteurs japonais.

Le même raisonnement peut être tenu pour le $\mathbf{C_x}$ linéaire de la plaque de rapport **h/e = 6**, $\mathbf{C_x}$ linéaire qui est donné par les Sunada et coll. : ce $\mathbf{C_x}$ linéaire nous donne accès à celui de la plaque de rapport **h/e = ⅓**.

Faisons apparaître ces apports dans un graphe présentant le $\mathbf{C_x}$ linéaire de la plaque rectangulaire en mouvements frontaux :



Nous avons fait figurer sur ce graphe des vues cavalières montrant les plaques de divers allongement **e/h** et dans la position où leur $\mathbf{C_x}$ linéaire a été calculé.

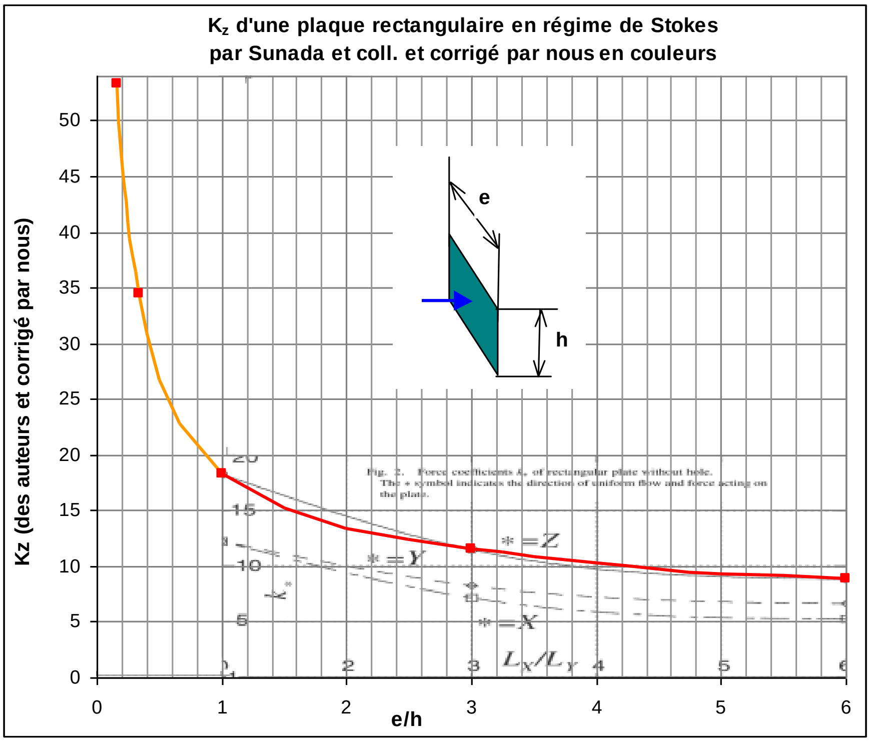
La courbe rouge est notre captation de la courbe supérieure du graphe de Sunada et coll..

La courbe orange a été tracée à partir des deux marques que nous avons déduites de la courbe rouge (une marque à l'abscisse **⅓ = 0,333**, et une autre à l'abscisse **1/6 = 1,666**).

Force est de constater que cette courbe orange ne raccorde pas tangentiellement avec la rouge.

Nous avons expliqué plus haut comment la courbe orange est liée à la courbe rouge. Si cette liaison est exprimée dans un tableur, modifier la courbe rouge modifie automatiquement la jaune.

Voici les corrections que nous avons effectuées en agissant manuellement sur les points *non dur* de la courbe rouge afin de la mettre en accord avec l'évolution de la courbe orange (elle-même possédant des *points durs*) :



Sur ce graphe les marques carrées rouges sont toujours les *points durs* déterminés par Sunada et coll..

Comme on le voit, ce simple apport de la logique modifie sensiblement la courbe *=Z des auteurs, tout en la prolongeant vers les bas **e/h**.

La caractéristique de Traînée K_z des auteurs est définie par rapport au $\mathbf{C_x}$ quadratique $\mathbf{C_{dz}}$ comme suit :

$$\mathbf{K_z = C_{dz} * R_{ez}}$$

Ce $\mathbf{C_{dz}}$ est lui-même définit comme valant :

$$\mathbf{C_{dz}} = \frac{\mathbf{F_z}}{\frac{1}{2}\rho \mathbf{V^2 S}}$$

…**S** étant la surface frontale de la plaque rectangulaire.

Le Reynolds $\mathbf{R_{ez}}$ est, quant à lui, défini comme :

$$\mathbf{R_{ez}} = \frac{\mathbf{V_z L_y}}{\nu}$$

…$\mathbf{L_y}$ étant le petit côté de la plaque, c.-à-d. **h** dans nos graphes pour les **e/h>1** et **e** pour les **e/h<1** [231].

Il résulte de ce qui précède que :

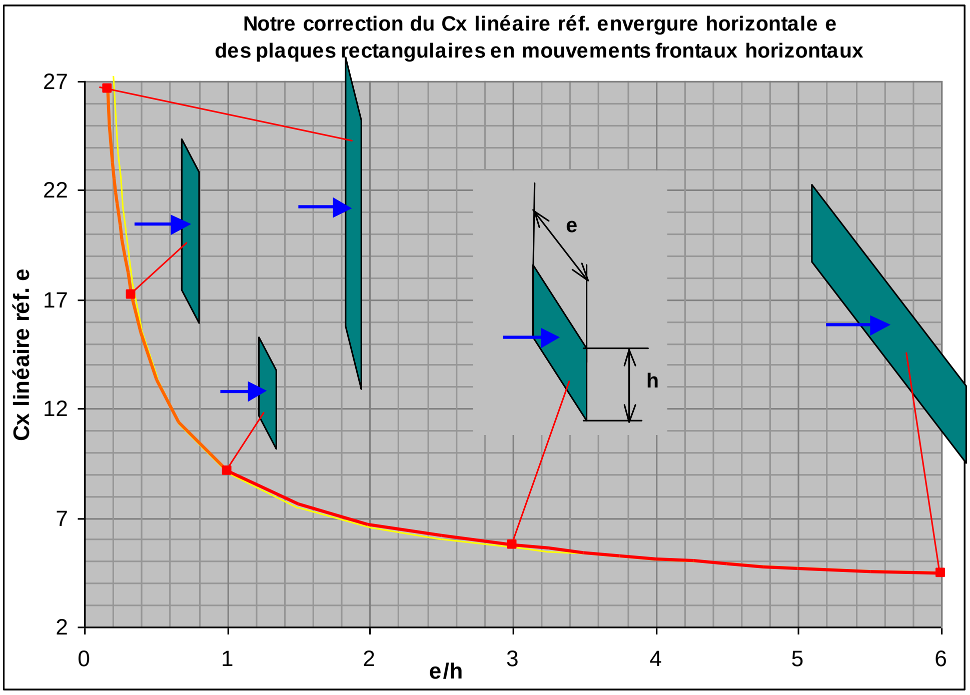
[231] Cette définition est tout à fait bonne puisque, dans ce cas de la plaque rectangulaire présentée frontalement à l'écoulement, on peut penser que l'écoulement s'organise principalement pour contourner la plaque dans sa plus faible dimension.

$\mathbf{K_z = 2\ C_{xLin\ Réf.e}}$

… égalité où **e** est le côté horizontal de la plaque.

Sunada et coll. ont donc utilisés un coefficient de Traînée qui ne diffère de notre $\mathbf{C_x}$ linéaire que par un coefficient **2**. On peut donc constater qu'ils sont en avance sur leur époque, époque où les chercheurs persistent à utiliser, pour le même usage, un $\mathbf{C_x}$ quadratique dénué de signification à ces Reynolds…

Notre correction de la courbe de Sunada et coll., ainsi que sont extension vers les faibles abscisses dessine donc le $\mathbf{C_x}$ linéaire (en référence **e**) suivant :



Pour plus de clarté, nous avons imaginé que l'écoulement est horizontal (flèches bleues) : **e** est alors la cote horizontale des plaques (donc leur *envergure*) et **h** leur cote de hauteur.

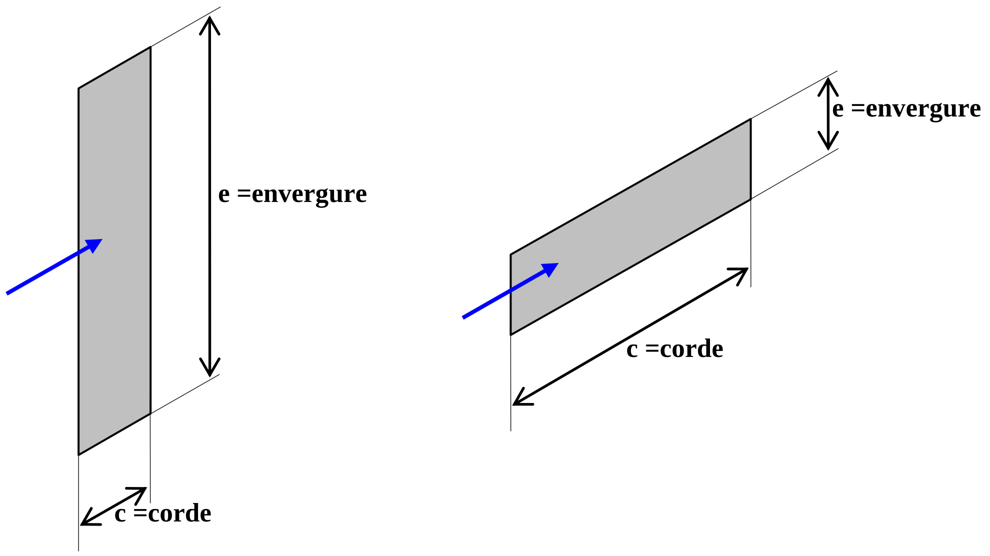
La régression jaune qui serpente sous ces courbes doit être réservée aux abscisses supérieure à **1**, plage dans laquelle elle n'est coupable que d'une erreur de **1,6 %** aux points dur d'abscisses **1**, **3** et **6** (mais **3,7 %** à l'abscisse **0,333**). Son équation est :

$$\mathbf{C_{xLin\ Réf.e}} = \frac{\mathbf{14{,}8}}{\mathbf{Ln}\left[2\left(\frac{\mathbf{e}}{\mathbf{h}}+0{,}2\right)\right]+0{,}764}$$

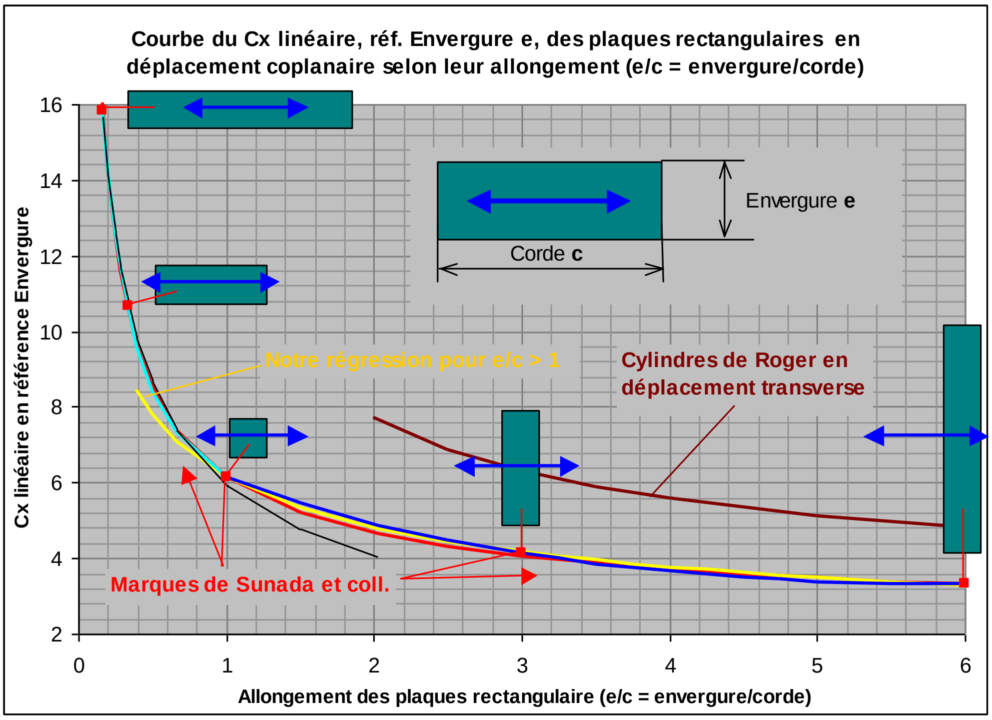
Nous verrons plus bas que cette régression ne peut guère être utilisée pour les allongements supérieurs à **6**.

Un travail critique peut également être mené sur les deux courbes les plus basses du graphe de Sunada et coll. qui concernent la Traînée des plaques rectangulaires en déplacement dans leur plan (ou déplacement coplanaire). Ce travail critique conduit à dessiner, sur le graphe des auteurs, les courbes de couleurs déjà montrée, sachant que ces courbes de couleurs respectent les marques calculées par ces auteurs.

Pour ce travail critique, il est souhaitable de nommer **corde** le côté de la plaque rectangulaire qui est parallèle à l'écoulement et **envergure** le côté qui lui est perpendiculaire (reprenant par là les habitudes en cours pour les ailes aux hauts Reynolds), ceci même si (comme sur le schéma de droite ci-dessous) l'envergure vient à être plus courte que la corde (ce qui n'est pas contraire à la définition de l'envergure) :



Le C_x linéaire qu'on peut tirer de ces réflexions est le suivant :



Comme précédemment, les courbes bleu dense et bleu clair respectent les *points durs* existant aux abscisses **1**, **3** et **6** ainsi que les nouveaux *points durs* (aux abscisses **1/3** et **1/6**) qu'il est possible de tirer, par la logique, des travaux de Sunada et coll..

La régression jaune qui vit sous la courbe bleue dense doit être réservée aux abscisses supérieures à **1**. Son équation est :

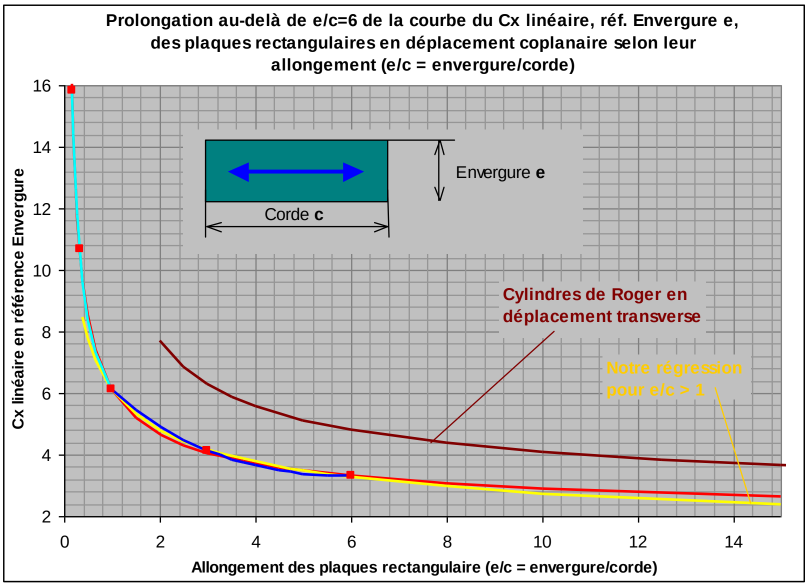
$$C_{xLin\ Réf.e} = 6{,}125*(e/c)^{-0{,}35}$$

Cette régression est exacte à l'élancement **1** et commet une erreur de **1,21 %** aux élancement **3** et **6**.

Une autre régression, visible çà et là en rouge sur le graphe est valide sur l'ensemble de la plage d'allongement **e/c** envisagée par les auteurs (de **0,166** à **6**) :

$$C_{xLin\ Réf.e} = \frac{11{,}74}{\mathrm{Ln}\left[2\left(\frac{e}{c}+0{,}203\right)\right]+1{,}034}$$

Elle n'est précise qu'à mieux que **1,45 %** pour tous les allongements **e/c** pris en compte par les auteurs (**0,166**, **0,333**, **1**, **3** et **6**). Elle s'éloigne un peu de notre correction de la courbe des mêmes auteurs (spécialement entre les allongements **1** et **3**) mais l'architecture classique de son libellé plaide en sa faveur. Nous verrons malheureusement plus bas que cette régression, comme celle du même type pour les déplacements frontaux, ne peut être utilisée pour les allongements supérieurs à **6**. Voici cependant l'extrapolation de cette régression (en rouge) au-delà de l'allongement **6** :



Pour une telle extrapolation, on choisira donc plutôt ce libellé rouge de préférence au libellé jaune.

Sur ce dernier graphe, comme sur le précédent, nous avons fait dessiner en fuchsia à notre tableur le C_x linéaire, en référence Longueur (donc *envergure*, ici), des cylindres de Roger en déplacements transverses : Le C_x linéaire de ces cylindres est un peu plus fort que celui des plaques planes, ce qui était attendu.

<u>Note sur l'estimation de la Traînée des bords marginaux d'une plaque rectangulaire en déplacement coplanaire :</u>

Supposons une plaque rectangulaire d'envergure **e** et de corde **c** se déplaçant dans son plan en régime de Stokes (schéma sur le graphe ci-dessous). Jones et Knudsen, suivant Janour, on s'en souvient, avaient utilisé, lors de leurs mesures, une Traînée forfaitaire de **3,2 c µV** pour les deux bords marginaux de ses plaques (c.-à-d. que les deux bords marginaux présentaient une longueur de Traînée **3,2 c**, **c** étant la longueur de chaque bord marginal).

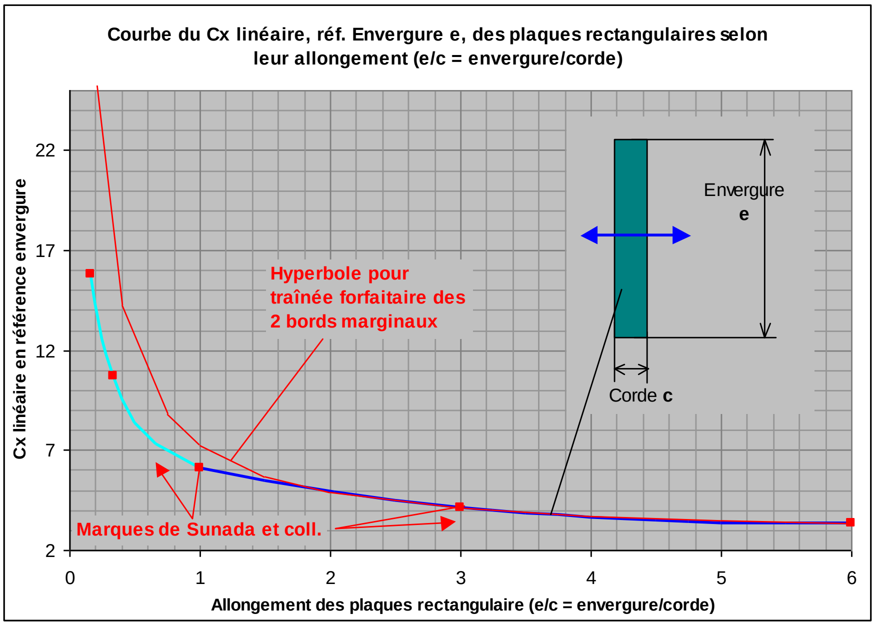
S'il existe une Traînée forfaitaire (et constante) pour les deux bords marginaux d'une plaque, on peut se risquer à écrire :

Traînée = **µV (Sc + Ce)**
…**e** étant l'envergure de la plaque (mesurée perpendiculairement à l'écoulement).

Pour écrire l'équation précédente, nous avons fait la supposition que la Traînée d'une plaque rectangulaire se décompose en la Traînée forfaitaire proportionnelle à la corde **c** et en une Traînée du reste de la plaque (toute sa surface), cette Traînée étant proportionnelle à l'envergure **e**.

Si l'on adopte (comme dans le graphe ci-dessous) **e** comme longueur de référence, le **C_x** linéaire, référence **e**, de la plaque est **S(c/e)+C**, soit **S/(e/c)+C**.

En choisissant convenablement les valeurs de **S** et de **C** par curseur, on peut alors dessiner l'hyperbole rouge sur le graphe ci-dessous :



Force est alors de constater que cette hyperbole épouse très bien la courbe bleu dense du **C_x** linéaire de la plaque en déplacements coplanaires pour les allongements **e/c** allant de **2** à **6** (et peut-être plus)…

Cette hyperbole rouge est dessinée par les valeurs **S = 4,68** et **C = 2,56.**

Il existe donc bien une possibilité d'attribuer en régime de Stokes un **C_x** linéaire forfaitaire aux bords marginaux d'une plaque rectangulaire en déplacement coplanaire. Nous trouvons ici un **C_x** linéaire (référence **c**) de **2,34** pour chaque bord marginal (Jones et Knudsen avaient adopté **1,6**, mais pour des plaques de dimensions différentes et d'ailleurs soumises fortement à l'effet des parois).

D'autre part, la partie courante de la plaque (hors ses bords marginaux) montre un **C_x** linéaire (référence **e**) de **2,56**. Cette valeur pourrait être considérée comme l'asymptote vers laquelle tends le **C_x** linéaire de la plaque d'envergure infinie **si la forme hyperbolique du C_x linéaire de la plaque rectangulaire était confirmée** (ce qui est loin d'être le cas [232]).

---

[232] Il faut cependant noter que les prismes à base carrée de Sunada et coll. (étudiés plus bas) montrent un tel comportement hyperbolique ; de même, dans sa thèse, Huner attribue le même comportement hyperbolique à ses cylindres en décantation transverse (il est vrai en régime d'Oseen et à des Reynolds tournant autour de **1**).

Ce calcul attribue **2*2,34+2,56 = 7,24** de **C_x** linéaire à la plaque carrée [233] (au lieu de **6,13**), ce qui reste dans le bon ordre de grandeur.

Un calcul identique peut être fait pour les plaques rectangulaires en déplacements frontaux. On trouve alors, pour des allongements **e/c** entre **3** et **6,** un **C_x** linéaire (référence **c**) de **3,7** pour chaque bord marginal et un **C_x** linéaire de **3,26** (référence **e**) pour la partie courante de la plaque.

Ces constations sont des constatations purement pragmatiques et gagneraient à être éclairées par une étude hydrodynamique.

C_x linéaire de la plaque carré par Sunada, Tokutake et Okada :

Venons-en à présent aux très intéressantes valeurs calculées par Sunada et coll. pour la plaque carrée.

La plaque carrée qui se déplace frontalement montre un **C_x** linéaire (en référence à son côté **a**) de **9,15**.

Mukherjee, Telukunta et Mukherjee avaient, quant à eux, calculé **9,136** : Cette valeur est vraiment très proche (notre captation *visuelle* de la valeur **9,15** de Sunada et coll. est peut-être d'ailleurs légèrement fautive).

Lorsque la même plaque carrée se déplace dans son plan, les mêmes auteurs Japonais trouvent un **C_x** linéaire de **6,13** (toujours en référence à son côté **a**).

Nous ne pouvons comparer ce **C_x** linéaire qu'à celui du disque en déplacement coplanaire : **5,333**. Mais ce dernier corps présente à la friction une surface inférieure (un *prorata* des surfaces fait passer le **C_x** linéaire du disque coplanaire de **5,333** à **6,79** et non **6,13**. pour le carré) [234].

Par contre il est appréciable que les quotients des **C_x** linéaires frontaux et coplanaires, à savoir **8 /5,333** et **9,15 /6,13**, valent tous deux **~1,5** : cela laisse penser que le **C_x** linéaire de l'hexagone d'épaisseur nulle en déplacement frontal donnera accès à celui du même corps en déplacement coplanaire…

Nous devons donc considérer, sur la foi des travaux de Sunada et coll., que **6,13** est bien le **C_x** linéaire de la plaque carrée en déplacements coplanaires.

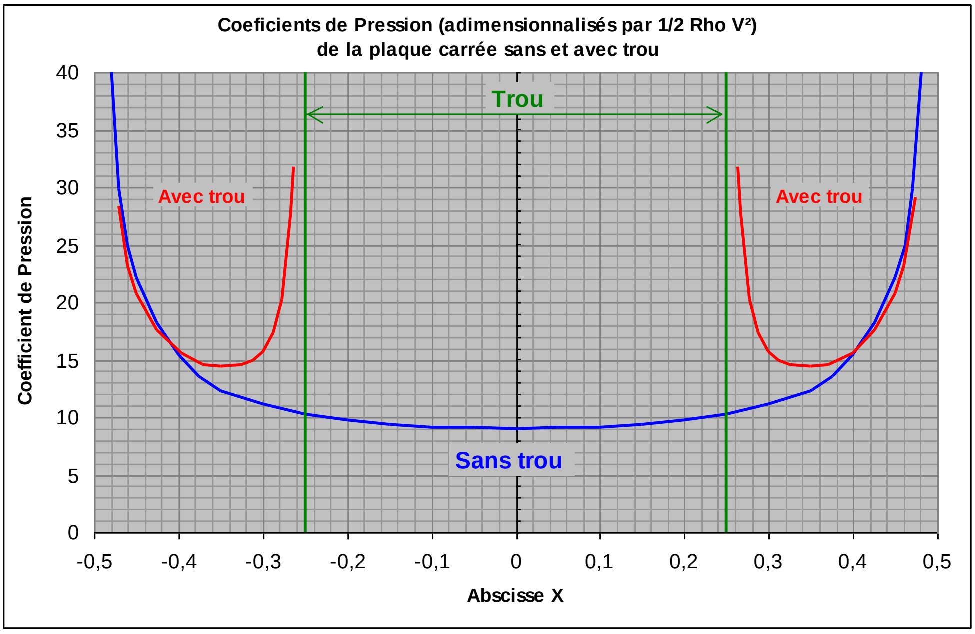
La plaque carrée trouée de Sunada, Tokutake et Okada :

Ces auteurs japonais ont poussé plus loin leurs calculs : ils ont déterminé les caractéristiques de Traînée des plaques rectangulaires plus ou moins perforée par un trou également rectangulaire…

Dans le cas où la plaque est carrée et où le trou est centré, les auteurs observent cette distribution des Coefficients de Pression, adimensionnalisés avec la Pression Dynamique ½ **ρV^2** :

[233] …ce qui se voit sur le graphe à l'ordonnée de l'hyperbole rouge pour l'abscisse **1**.

[234] Ce prorata des surfaces ne marche pas non plus pour les mouvements frontaux puisqu'il donne 10,19 pour le **C_x** linéaire du carré.



Ces relevés sont effectués à peu près au milieu de la plaque sans trou (en bleu) et avec trou (en rouge). Les coefficients de Pression décrivent la différence de pression entre les deux faces de la plaque.

Le côté du trou fait la moitié du côté extérieur (c'est la raison des verticales vertes sur le graphe).

Il apparaît que, comme les bords extérieurs de la plaque, les lèvres du trou sont le lieu d'un fort accroissement de la pression locale. Au moins mnémotechniquement, on peut noter que ce phénomène est l'inverse de ce qui se passe aux hauts Reynolds ou les lèvres d'un trou (et les bords d'une plaque) sont le lieu d'une diminution de la pression [235]…

L'utilisation de la Pression Dynamique comme référence par les auteurs japonais est assez peu usuelle concernant des corps en régime de Stokes. Cependant elle est licite. Il existe cependant une relation entre ces Coefficients de Pression *pour hauts Reynolds* (nommons les $\mathbf{k_p}$) et les Coefficients de Pressions plus fréquemment (ou plus logiquement) utilisés aux très bas Reynolds (nommons les $\mathbf{C_p}$), ces derniers étant adimensionnalisés par quotient avec $\boldsymbol{\mu V/a}$:

En effet, puisque la pression locale $\mathbf{P_{(x)}}$ vaut :

$$\mathbf{P_{(x)} = k_p \tfrac{1}{2} \rho V^2}$$

…on peut faire apparaître dans cette égalité le côté **a** du carré et la viscosité **μ** :

$$\mathbf{P_{(x)}} = \frac{\mathbf{k_p \frac{1}{2} \rho V a}}{\boldsymbol{\mu}} * \frac{\boldsymbol{\mu} \mathbf{V}}{\mathbf{a}}$$

Il est alors utile de reconnaître dans le premier quotient $\boldsymbol{\rho V c/\mu}$ qui est $\mathbf{R_{ea}}$, le Reynolds de la plaque carrée basé sur son côté. On tire donc de la dernière égalité :

[235] Ceci est conforme à la loi de Bernoulli puisque le fluide augmente sa vitesse pour contourner la plaque et pour s'engouffrer dans le trou.

$$P_{(x)} = \tfrac{1}{2}k_p * R_{ea} * \frac{\mu V}{a}$$

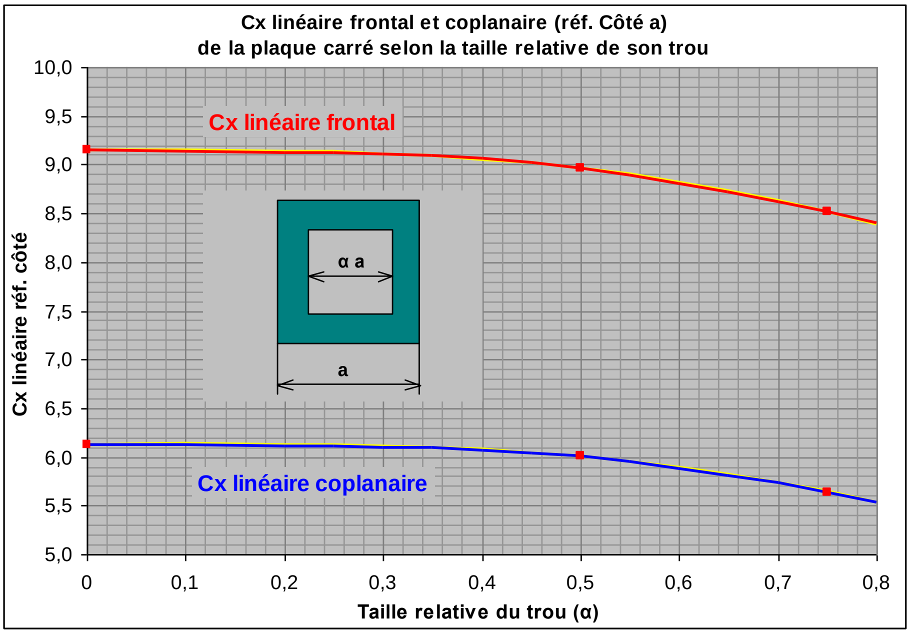
…ce qui donne :

$$\frac{P_{(x)}}{\left[\frac{\mu V}{a}\right]} = C_p = ½\,k_p{*}R_{ea}$$

Pour un Reynolds donné, on a donc bien proportionnalité entre le coefficient de pression C_p (adimensionnalisé par **μV/a**) et le coefficient de pression k_p (adimensionnalisé par **½ρV²**).

Ne doutons donc pas que le graphe de distribution des pressions produit par Sunada et coll. représente bien ce qui se passe avec les plaques trouées ou non trouées en régime de Stokes, ceci quelle que soit la définition des coefficients de pression.

Quoiqu'il en soit de ces réflexions sur le Coefficient de Pression local, les auteurs nous donnent les moyens de dessiner la courbe du C_x linéaire de la plaque carrée en déplacements frontaux ou coplanaires, ceci selon la taille relative du trou central (ce trou admettant le même centre que la plaque carrée) :



Nous avons capté pour **α = 0** (c.-à-d. la plaque non trouée) un C_x linéaire, réf. côté **a**, de **9,15** en déplacements frontaux et de **6,13** en déplacements coplanaires.
Comme nous pensons que Sunada et ses collègues n'ont calculés que les caractéristiques de Traînée pour **α** =**0**, **0,5** et **0,75** (ce qui est déjà magnifique), nous nous sommes senti à l'aise pour trouver aux courbes qu'ils ont dessinées des régressions honorant ces *points durs* (carrés rouges, ci-dessus) plus que le reste de leurs courbes : ces régressions sont les deux courbes jaunes qui cheminent sont les courbes rouge et bleue.

Leur libellé est, pour le C_x linéaire frontal réf. **a**, de la plaque carrée à trou :

$$C_{xLin\ Réf.a} = 9{,}15*(1 - 0{,}15\alpha^3 - 0{,}017\ \alpha^2 + 0{,}005\ \alpha)$$

…et pour le **C_x** linéaire coplanaire, réf. **a**, de la même plaque carrée à trou :

$$C_{xLin\ Réf.a} = 6{,}13*(1 - 0{,}22\ \alpha^3 + 0{,}016\ \alpha^2 + 0{,}006\ \alpha)$$

Ces deux régressions ne se rendent coupables que d'une erreur de **0,05** et **0,012 %** pour **α = 0,5** et de **0,1 %** pour **α = 0,75** (l'erreur pour **α = 0** étant bien-sûr nulle).

Comme on le lit, nous avons conservé à ces régressions un libellé faisant apparaître devant chaque parenthèse le **C_x** linéaire de la plaque carrée sans trou (pour **α = 0**), en déplacements frontaux ou coplanaires, puisque les valeurs de ces **C_x** linéaires (**9,15** et **6,13**) pourraient être légèrement améliorées par des données livresques ultérieures (par rapport à nos rustiques captations).

Il est intéressant de rapprocher le cas de la plaque carrée comportant un trou carré de côté moitié du cas du disque comportant également un trou de diamètre moitié.
On peut alors écrire :

→ pour les **C_x** linéaires en déplacements frontaux :

Carré / Carré troué (**α = 0,5) = 9,15/8,97 = 1,020**

Disque / Disque troué (**α = 0,5) = 8/7,848** [236] **= 1,019**

→ pour les **C_x** linéaires en déplacements coplanaires :

Carré / Carré troué (**α = 0,5) = 6,13/6,01 = 1,020**

Disque / Disque troué (**α = 0,5) = 5,333/ ?**

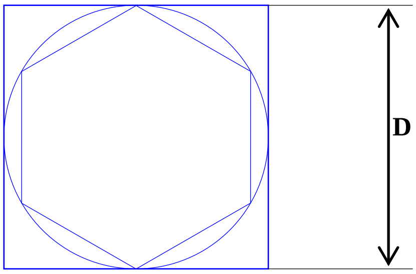
Nous n'avons trouvé nulle part le **C_x** linéaire du disque avec un trou de diamètre moitié en déplacements coplanaires, mais un étude des trois rapports renseignés à l'instant laisse à penser qu'il serait proche de **5,333/1,020 = 5,23**.

D'autres réflexions viennent à l'esprit concernant l'autre cas simple de la plaque hexagonale d'épaisseur nulle :

Dans un premier temps, on peut penser que la plaque hexagonale, par son nombre de côtés (**6**), se place entre le carré (**4** côtés) et le cercle (infinité de côtés) : ce constat semble alors lui promettre un **C_x** linéaire, (réf. côte entre sommets opposés) intermédiaire entre celui du carré (**9,15**) et celui du cercle (**8**).

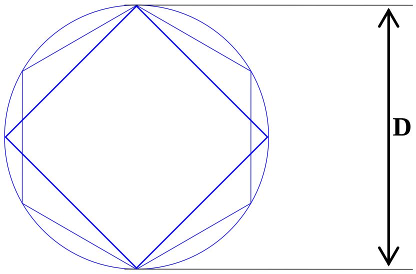
Mais lorsque l'on dessine ces trois corps simples de sorte qu'ils aient une même dimension caractéristique **D**, on obtient ceci :

[236] Cette valeur de **7,848** est due à Roger et Weidman.



Ce schéma montre bien que l'hexagone se place non pas entre le cercle et le carré mais dans le cercle et le carré. De ce point de vue, on peut juste dire que son $\mathbf{C_x}$ linéaire (en réf. **D**) est inférieur à **9,15** et à **8** (donc à **8**).

C'est une autre présentation des trois corps qu'il faut choisir :



Cette nouvelle présentation milite pour que la longueur de Traînée de l'hexagone se trouve entre celle de la plaque carrée et celle du disque circulaire.

Celle du disque est **8D** et celle de la plaque carrée $\mathbf{9{,}15\ D\ \sqrt{2}/2 = 6{,}47\ D}$ [237].

En référence à sa cote entre sommets opposés **D**, l'hexagone pourrait donc présenter un $\mathbf{C_x}$ linéaire situé entre **6,47** et **8**.

Nous verrons d'ailleurs vu plus bas que Wang et Ji ont dégagé **6,62** alors que List et Schemenauer ont dégagé **8,02**, ce qui apparaît ici un peu fort.

En 1949, s'appuyant sur des analogies électriques, Roscoe a proposé [238], une estimation pour cette même plaque hexagonale mince. Westbrook la cite sous cette forme :

« La Traînée d'un disque circulaire mince décantant horizontalement est légèrement supérieure à celle prédite pour une plaque mince hexagonale, le disque circulaire décantant 9 % plus lentement que la plaque hexagonale. » [239]

Cette estimation de Roscoe prédit donc à la plaque hexagonale mince en déplacement *à plat* un $\mathbf{C_x}$ linéaire de **7,33**.

[237] Dans ce dernier calcul, nous avons considéré que la plaque carrée en déplacements coplanaires possédait le même $\mathbf{C_x}$ linéaire même quand elle se présente en diagonale à l'écoulement. Une étude rapide, basée sur la linéarité des équations en régime de Stokes, confirme que c'est bien le cas.

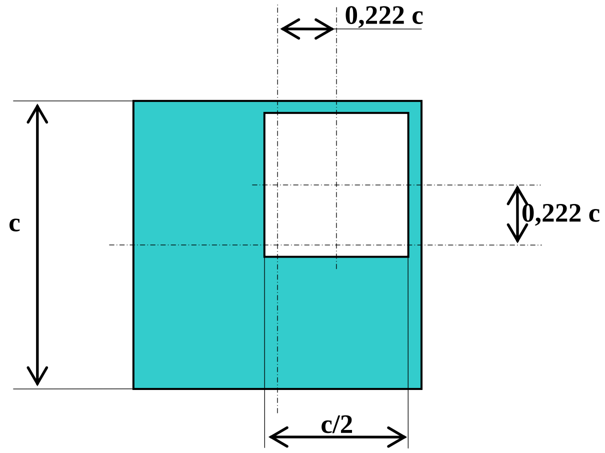
[238] THE ﬂOW OF VISCOUS ﬂUIDS ROUND PLANE OBSTACLES, de ROSCOE R., 1949.

[239] Ce propos n'a du sens que si les deux plaques sont mues par la même force (le poids efficient). La figure 1 de Westbrook lève d'ailleurs toute ambiguïté à ce propos.

Plaque carrée à trou non centré de Sunada, Tokutake et Okada :

Ces mêmes auteurs ont calculé la Traînée de la plaque carrée d'épaisseur nulle comportant un trou de dimensions moitié de celles de la plaque mais dont le centre n'est pas exactement en son centre.

Ils ont porté les décentrements du trou jusqu'à **+** ou **–** **22,2 %** du côté **c** de la plaque, ce qui dessine à peu près ceci :



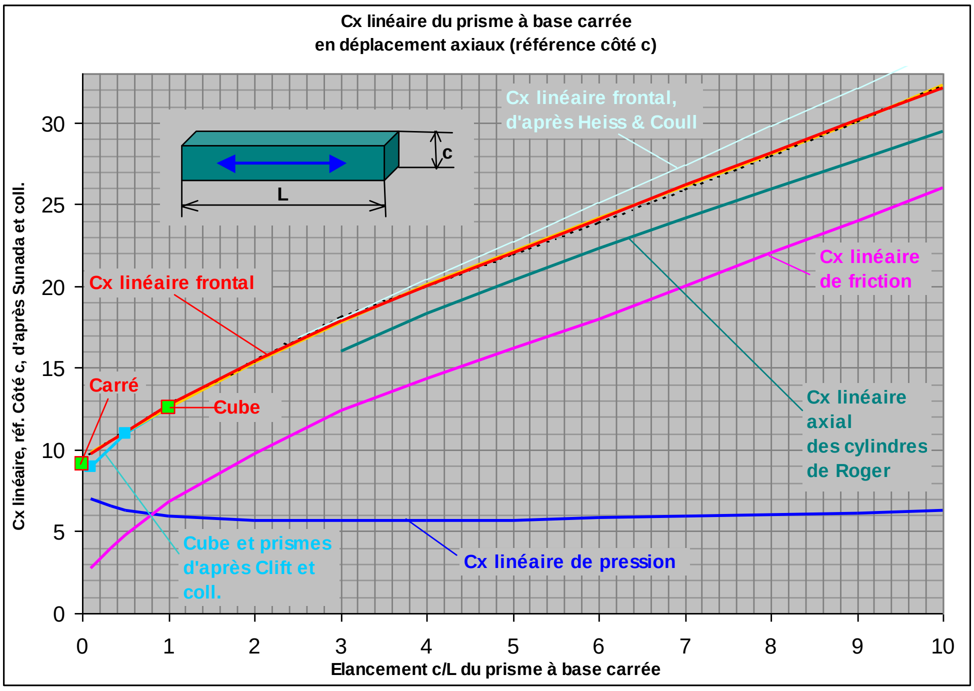
Même dans ce cas extrême [240], ils ont pu constater que les décentrements ne modifient pas la Traînée totale que de moins de **2 %** de la Traînée de la plaque avec le même trou centré. Ils en tirent la conclusion que « les effets sur la traînée de la position du centre du trou sont très faibles ».

Prismes à base carrée de Sunada, Ishida et Tokutake :

Nous avons eu accès à la première page de la Notes Techniques de Sunada, Ishida et Tokutake traitant de la Traînée du parallélépipède rectangle. Cette première page donne deux graphes de la Traînée des prismes à base carrée longs en déplacements axiaux ou courts en déplacements transverses.

Voilà notre captation du premier :

[240] Il ne reste sur deux bords du trou que **2,8 %** du côté **c**.



La courbe rouge représente les C_x linéaires du prisme (réf. côté **c** de sa section carrée). Cette courbe rouge honore à très peu près les C_x linéaires du cube (**4 π** d'après Clift, Grace et Weber) et de la plaque carrée étudiée à l'instant (**9,15**, d'après Sunada et coll.).

Les auteurs citent également sur leur graphe les valeurs annoncées par Clift et coll. pour des prismes à base carrée de longueur **L** inférieure à **1** (courbe bleu clair), valeurs qui se trouvent rater la marque du carré.

Nous avons fait dessiner à notre tableur le C_x linéaire réf. **D** des cylindres de Roger en déplacement axiaux (en bleu glauque) : ce C_x linéaire est un peu plus faible, comme escompté [241].

En bleu clair nous avons porté une régression linéaire (valable pour les élancements **2,5** à **20**) résumant les estimations de Heiss & Coull (étudiés plus haut) : cette droite nous semble disqualifiée par les travaux de Sunada et coll..

En fuchsia est la contribution au C_x linéaire du prisme de la friction (par définition sur les quatre surfaces latérales) : elle évolue de façon quasi linéaire au-delà de l'élancement **5**.

En bleu dense est la contribution au même C_x linéaire de la pression (par définition sur les deux faces extrêmes : il est notable qu'elle ne croît que très peu avec l'élancement.

En noir tireté est le somme de ces deux contributions (l'écart entre ces tiretés noirs et la coure rouge mettant en lumière le cumul de nos erreurs de captation [242]).

L'évolution de ces deux contributions fait forcément songer à un libellé approximatif simple pour le C_x linéaire des prismes à base carrée pour des élancements $\boldsymbol{\lambda > 5}$:

$$\mathbf{C_{xLinRéf.c} \approx 12 + 2\,\lambda}$$

---

[241] Mais pas dans le rapport **π /4** auquel on aurait pu s'attendre (à cause du rapport des surfaces frontales et des surfaces latérales).

[242] Et peut-être de faibles erreurs de dessin des auteurs.

…λ étant l'élancement **L/c** du prisme [243]…

Ce qui donne aussi $C_{xLin\ Réf.L} \approx 12 / \lambda + 2$ qui est un libellé de type hyperbolique comme dans tous les cas où l'influence des extrémités (influence supposée constante) se noie peu à peu dans l'influence (prépondérante) de la longueur…

Il apparaît que les auteurs ont calculé la Traînée axiale des prismes de longueur **L = 0,1**, **0,333**, **0,5**, **1**, **3** et **10**, ce qui est un très beau travail [244].

La courbe rouge admet également une régression cubique (que l'on voit cheminer sous elle en jaune) dont l'équation est :

$$C_{xLinRéf.c} = 0{,}01\,\lambda^3 - 0{,}2\,\lambda^2 + 3{,}28\,\lambda + 9{,}5$$

…qui est le C_x linéaire du prisme à base carrée, en référence au côté **c** de sa base carrée d'après Sunada et coll., λ étant l'élancement **c/L** du prisme…

De l'élancement **0,333** à l'élancement **10** (ces bornes comprises) l'erreur commise par cette régression est de **0,5 %**, sauf à l'élancement unitaire du cube où elle atteint **1,25 %** ; cependant, par rapport à la valeur **4 π** du cube prônée par Clift et coll., l'erreur de notre régression à l'abscisse **1** n'est que de **0,16 %**.

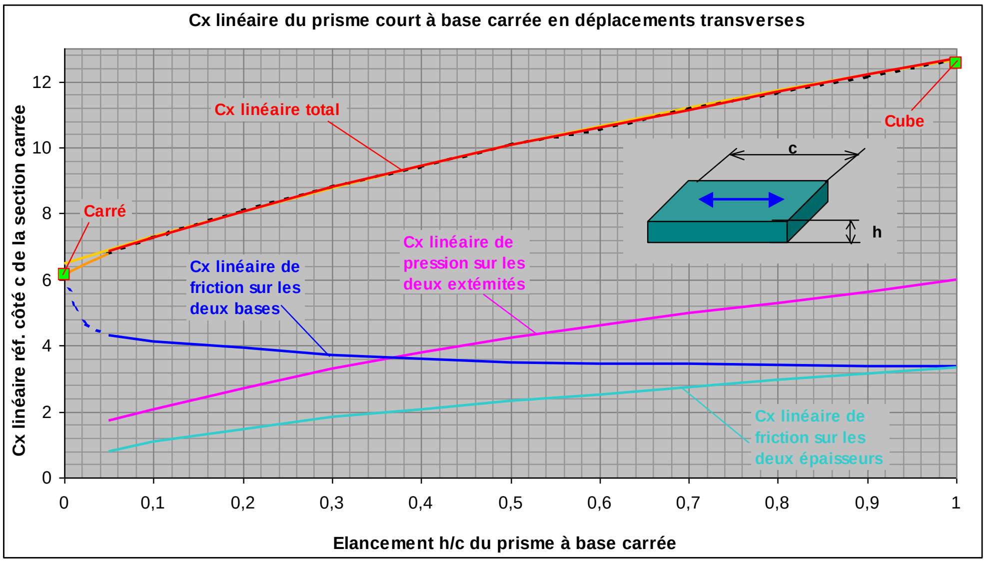
Prismes à base carrée d'élancements inférieurs à 1 de Sunada, Ishida et Tokutake en déplacements transverses :

Sur la même première page des Notes Techniques de Sunada, Ishida et Tokutake, nous avons également pu capter un graphe donnant accès au C_x linéaire de prismes à base carrée d'élancement inférieurs à l'unité en déplacement transverses (comme sur le dessin ci-dessous).

Ce C_x linéaire (en référence au côté **c** de la base carrée) est la courbe rouge ci-dessous :

[243] On note, entre autres, que cette régression ne fonctionne pas pour la plaque carrée mince en déplacement frontal (puisque le C_x linéaire de celle-ci est **9,15** et non **12**).

[244] Nous aurons accès ultérieurement au reste du texte de Sunada et coll. qui donne le C_x linéaire du prisme de section carrée d'élancement **L/c = 6** en déplacement axial qui confirme notre courbe rouge.



À droite en haut, cette courbe rouge passe un tout petit peu plus haut que le cube de Clift et coll. (**4** π) et il faut faire un petit crochet vers le bas (en orange) pour passer par la plaque carrée de Sunada et coll. (corps déjà étudié plus haut).

Comme précédemment, Sunada et coll. proposent la contribution en pression des extrémités (courbe fuchsia) et en friction des deux bases (courbe bleu dense) et des deux épaisseurs (courbe bleu clair).

La somme des ces trois contributions dessine la courbe tiretée noire que l'on aperçoit sous la rouge (l'écart entre ces deux courbes étant la conséquence de nos erreurs de captation).

Lorsque l'élancement de ce prisme tend vers zéro, aussi bien la courbe fuchsia que la courbe bleu clair doivent tendre vers zéro alors que la courbe bleu dense doit rejoindre la marque nommée ici « Carré » (c'est l'objet des tiretés bleu dense).

Les élancements que les auteurs ont pris en considération sont **0,05**, **0,1**, **0,3**, **0,5** et **1**, du moins des marques apparaissent-elles à ces abscisses sur le graphe de ces auteurs.

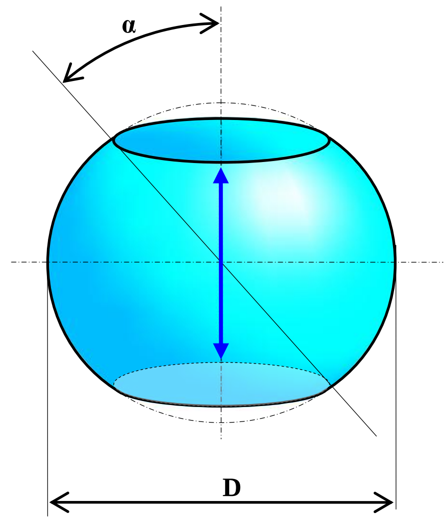
La régression jaune qui court sous la courbe rouge a comme équation :

$$\mathbf{C_{xLinRéf.c} = -1{,}95\ \lambda^2 + 8{,}1\ \lambda + 6{,}5}$$

…équation où λ étant l'élancement **c/h** de ces prismes très courts.

Dans la plage des élancements **0,05** et **1** (ces élancement compris), cette régression ne commet qu'une erreur maximale de **0,75 %**.

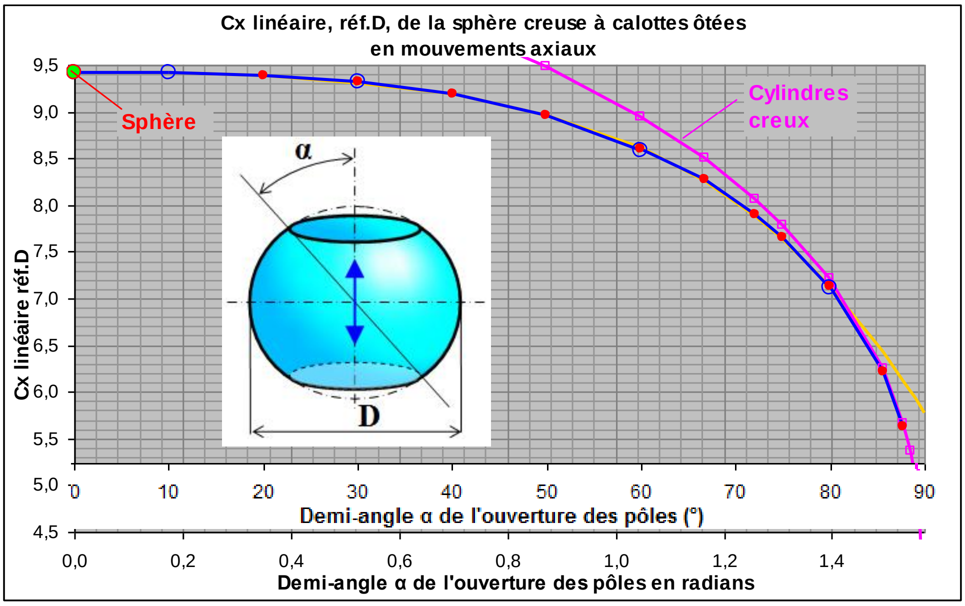
C_x linéaire de la sphère creuse à calottes ôtées en mouvement axial, d'après Roger et Weidman :



Roger et Weidman ont utilisé la méthode des Perles tressées pour calculer les caractéristiques de Traînée d'un sphère creuse dont on a ôté symétriquement les deux calottes polaires.

Les deux trous laissés béant par le retirement des calottes peuvent être définis par le demi angle au centre **α** de ces calottes (qui est le même).

Ces auteurs, non sans avoir éprouvé leur méthode sur des corps dont la Traînée est connue par une méthode analytique (le disque, la sphère, la cardioïde, le tore), corps pour laquelle la méthode des Perles tressées ne commet un erreur que de **0,021 %** en moyenne, dessinent alors cette courbe bleu dense du $\mathbf{C_x}$ linéaire de la sphère creuse à pôles ôtés (en référence au diamètre **D** de la sphère) :



Les marques rouges sont dues aux calculs analytiques de Davis et les quatre marques circulaires bleu dense sont dues à Roger et Weidman.

Si l'on exprime le demi-angle d'ouverture des pôles en radians, le $\mathbf{C_x}$ linéaire de ce qu'il reste de la sphère (en déplacement axiaux) admet une régression d'équation :

$$C_{xLin\ Réf.D} = 9{,}425\ (1 - 0{,}028\ rad^5 - 0{,}053\ rad^2 + 0{,}0067 rad)$$

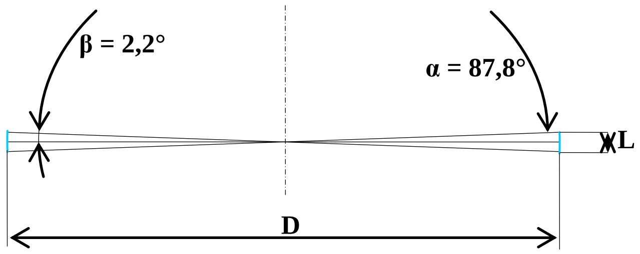
…équation où **rad** est le demi-angle **α** d'ouverture de la sphère en radians.

Comme on le voit, cette régression est valide jusqu'à un demi-angle valant **1,4 rad** (soit **80°**)

Au-delà de cette limite, c'est la régression de Price ci-dessous (laquelle traite des cylindres creux très courts) qui pourra être utilisée, cette régression prenant l'élancement **L/D** de ce qui reste de sphère comme variable.

La courbe bleu dense ci-dessus est surprenante en ceci que le C_x linéaire ne chute que très lentement quand croît **α**.

Même pour **α** = **87,8°**, c.-à-d. une situation que l'on peut représenter comme ci-dessous :



…à savoir un corps (en bleu clair) ressemblant à un cylindre creux d'élancement **L/D = 0,038** [245], le C_x linéaire de la sphère n'est diminué que de **40 %** !

La courbe fuchsia sur ce dernier graphe est le C_x linéaire du cylindre creux de très faible élancement **L/D** en déplacement axial tel que donné par Price, à savoir :

$$C_{xLin\ Réf.D} = \frac{4\pi^2}{Ln\left[\frac{8}{\lambda}\right] + 1{,}64473}$$

…λ valant bien-sûr **L/D**.

<u>Cette équation de Price donnée avec une erreur par Roger et Weidman a été rectifiée par nous. Nous y revenons à l'instant.</u>

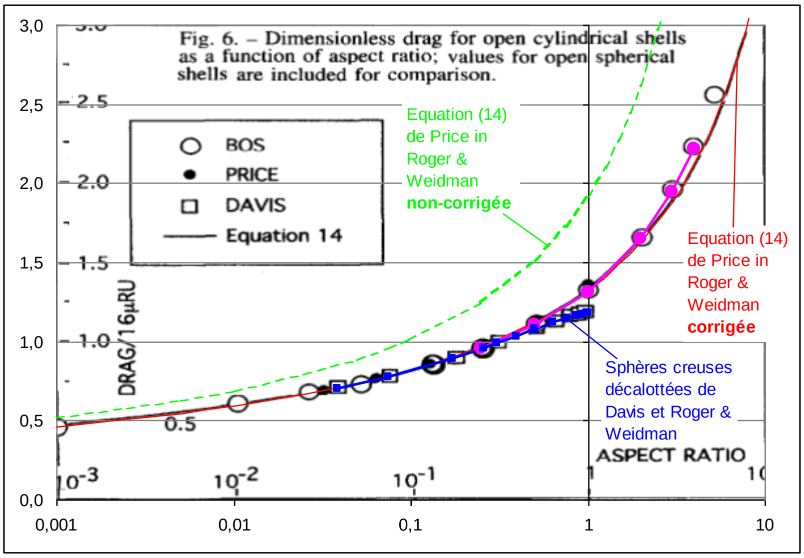
La comparaison de la courbe bleu dense (de Roger et Weidman et Davis) avec la courbe fuchsia montre qu'à partir de l'ordonnée **α = 85°** ce qui reste de la sphère présente un C_x linéaire identique à celui du cylindre creux de même diamètre **D** et de même longueur **L** (et d'épaisseur négligeable).

[245] Cet élancement vaut **cos(α)** ou **sin(β)**.

Note sur l'erreur de transcription dans l'équation de Price donnée par Roger et Weidman :

Le libellé donné par Roger et Weidman pour l'équation de Price (équation n° 14) nous est apparu comme fautif.

En effet, et quoique que les commentaires de ces dernier auteurs à propos de cette équation (14) s'avèrent conformes au dessin en trait plein de la courbe ci-dessous (courbe noire sur laquelle s'appuie notre capture rouge) :



…le libellé qu'ils donnent de cette équation (14) dessine la courbe en tiretés vert fluo.

Ce libellé (fautif, d'après nous) est :

$$\mathbf{C}_{\mathbf{x}\text{Lin }\textbf{Réf.D}} = \frac{\mathbf{4\pi^2}}{\mathbf{Ln}\left[\frac{\mathbf{8}}{\boldsymbol{\lambda}}\right] + \mathbf{0{,}5}}$$

Le bon libellé est celui donné plus haut. Il s'avère que le reliquat **1,64473** y diffère de la quantité **Ln(π)** [246].

Cette regrettable erreur corrigée, on peut rédiger les réflexions suivantes, réflexions qui donnent accès, à notre sens, à une valeur très intéressante du $\mathbf{C_x}$ linéaire de la palette rectangulaire en déplacement dans son plan.

Note sur l'apport de l'équation de Price donnant le C_x linéaire du cylindre creux de très faible élancement en déplacement axial :

L'équation de Price (rectifiée par nous) donne le $\mathbf{C_x}$ linéaire du cylindre creux de très faible élancement en référence à son diamètre **D**. Il est aisé d'en tirer le $\mathbf{C_x}$ linéaire du même corps en référence à la longueur déroulée du cylindre (c.-à-d. **πD**) ; c'est :

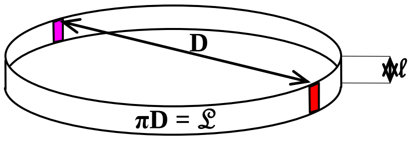
$$\mathbf{C}_{\mathbf{x}\text{Lin }\textbf{Réf. }\boldsymbol{\pi}\mathbf{D}} = \frac{\mathbf{4\pi^2 D}}{\left\{\mathbf{Ln}\left[\frac{\mathbf{8}}{\boldsymbol{\lambda}}\right] + \mathbf{1{,}64473}\right\}\boldsymbol{\pi}\mathbf{D}}$$

[246] Nous avions trouvé *graphiquement* un reliquat de **1,64**, mais une étude du texte de Davis nous a donné les décimales suivantes.

…avec toujours λ = **L/D**, soit :

$$C_{x\text{Lin Réf. }\pi D} = \frac{4\pi}{Ln\left[\frac{8}{\lambda}\right] + 1{,}64473}$$

Représentons en perspective ce cylindre creux de très faible élancement (toujours d'épaisseur négligeable) et renommons **L** en ℓ ainsi que **πD** en $\mathfrak{L}$:

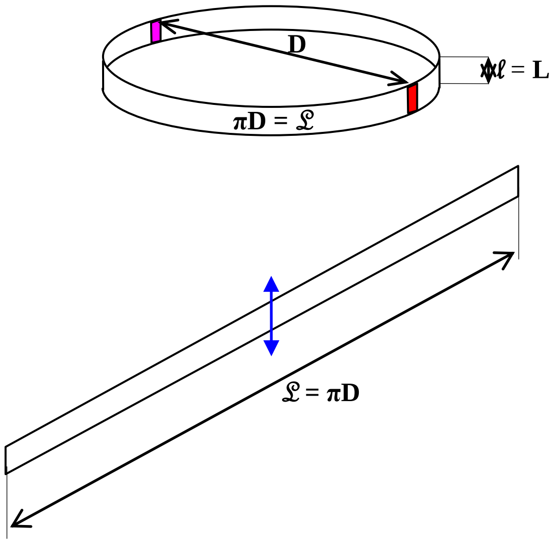


Imaginons à présent que l'élancement **L/D** de ce cylindre creux tende vers zéro (c'est pour cette situation extrême que Price a bâti son équation) : chaque élément infinitésimal du cylindre (comme l'élément rouge) peut être considéré comme très loin de l'élément qui lui est diamétralement opposé (en fuchsia) puisque **D** est très grand devant **L** = ℓ. On peut donc dire que l'élément fuchsia, ainsi que les éléments voisins de l'élément fuchsia n'ont plus d'influence sur l'élément rouge.

En termes plus généraux, on peut dire que tous les éléments du périmètre du cylindre creux ne sont pas influencés par les éléments qui sont de l'autre côté du cylindre.

Par contre tous les éléments du cylindre restent classiquement influencés par leurs proches voisins (du même côté du corps, que l'on pourrait appeler mitoyens ou presque mitoyens).

Les propos que nous venons de tenir se ramènent à prétendre que pour les élancements **L/D** proches de zéro, le cylindre creux se comporte comme une palette droite de longueur **πD** se déplaçant dans son propre plan :



Le C_x linéaire, référence **πD** de cette palette est donc le même que celui du cylindre creux, qui est :

$$C_{x\text{Lin Réf. }\pi D} = \frac{4\pi}{Ln\left[\frac{8}{\lambda}\right] + 1{,}64}$$

…ou, comme **πD** = $\mathfrak{L}$ et λ = **L/D** = $\pi\,\ell/(\pi D) = \pi\,\ell/\mathfrak{L}$:

$$C_{x\text{Lin Réf.}\mathcal{L}} = \frac{4\pi}{\mathbf{Ln}\left[\frac{8\ \lambda_{pal}}{\pi}\right] + 1{,}64}$$

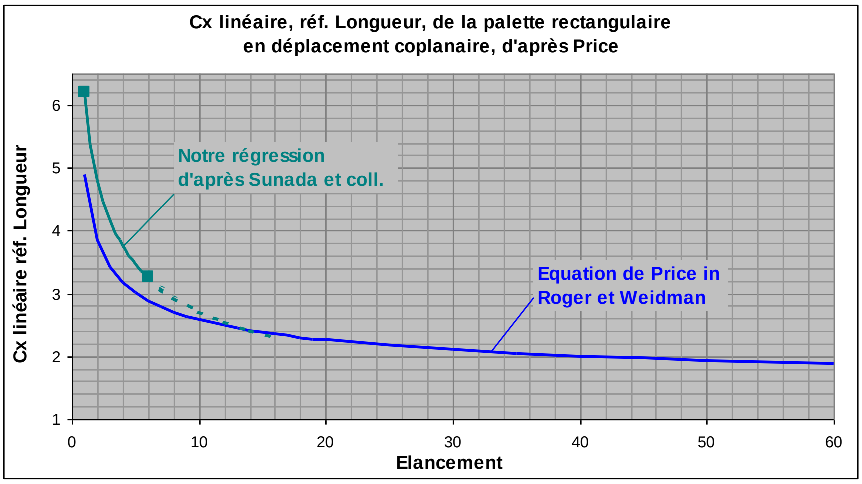
λ_{pal} étant l'élancement $\mathcal{L}/\ell$ de la palette.

Cette équation peut être simplifiée en :

$$C_{x\text{Lin Réf.}\mathcal{L}} = \frac{4\pi}{\mathbf{Ln}(2\lambda_{pal}) + 1{,}88}$$

..qui pourrait constituer, à notre sens, une bonne estimation du $\mathbf{C_x}$ linéaire de la palette rectangulaire en déplacement dans son plan en référence à sa longueur $\mathcal{L}$, λ_{pal} étant l'élancement $\mathcal{L}/\ell$ de la palette…

Au passage, le lecteur attentif aura remarqué que nous avons conservé dans le logarithme népérien le facteur **2** qu'on y trouve souvent lorsque l'on traite des cylindres.
Ce libellé dessine la courbe bleu dense suivante :



La courbe bleu glauque est la régression tirée de notre exploitation de la note de recherche de 2009 de Sunada Tokutake et Okada ; son libellé est :

$$C_{x\text{Lin Réf.e}} = 6{,}2^*(e/c)^{-0{,}36}$$

Cette régression donne le $\mathbf{C_x}$ linéaire (réf. **L**)des palettes rectangulaire en déplacements coplanaires. Elle n'est censé couvrir que les élancements allant de **1** à **6**, mais nous l'avons lancée ici (en tiretés) à la rencontre de la courbe bleu dense.
Cette rencontre n'est pas idéale, mais, d'une certaine façon, elle justifie quand-même l'équation de Price (rectifiée par nous) qui dessine la courbe bleue dense, au moins pour les élancements supérieurs à **20**…

Pour en terminer avec le $\mathbf{C_x}$ linéaire de la palette en déplacement coplanaire (en régime de Stokes), on doit dire deux choses :
→ La première est qu'il est surprenant que l'équation de Price (telle que rectifiée par nous) conduise à une telle proximité de la sphère décalottée de faible élancement avec le cylindre creux de faible élancement (nous parlons de la proximité entre les courbes bleu dense et fuchsia de ce graphe) : l'équation de Price a été conçue, à notre sens, pour des élancements plus faibles que ceux que produisent le **85°** dudit graphe : à cet angle de décalottage de la sphère, les éléments de quasi-cylindre nous paraissent très proches des éléments qui leur sont diamétralement opposés. Il faut donc, à notre sens toujours, qu'un autre phénomène vienne contrebalancer cette proximité (nous pensons à la courbure de la palette).
→ La deuxième est que cette équation de Price est indépendant du Reynolds et qu'elle nous livre donc peut-être le véritable $\mathbf{C_x}$ linéaire de la palette en déplacements

coplanaires en régime de Stokes, à savoir un C_x linéaire indépendant du Reynolds (comme tous les C_x linéaires en régime de Stokes).

L'autre formulation :

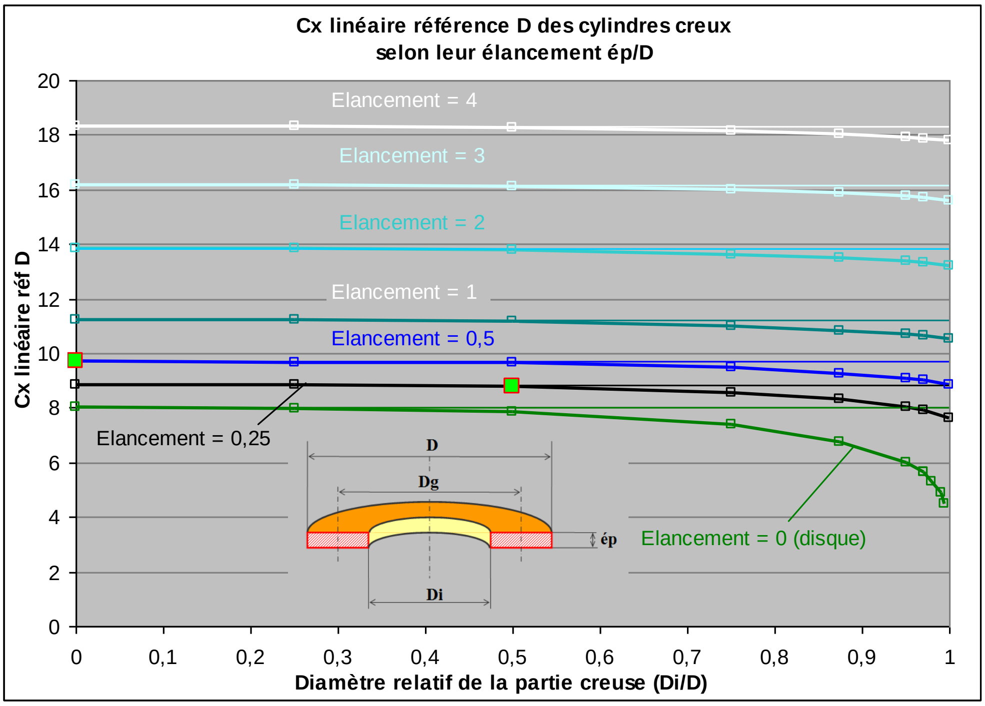
$$C_{xLin\,L} = \frac{4\pi}{3{,}1946 - Ln(Re_\ell)}$$

...où Re_ℓ est le Reynolds basé sur la largeur de la palette (dont la longueur est infinie) devant être réservée au régime d'Oseen (de façon analogue à ce que montre le texte de David L. Kohlman consacré à des mesures sur les cylindres aux très bas Reynolds diamétraux).

Cx linéaire du cylindre creux en mouvements axiaux par Roger et Weidman :

Dans leur texte, Roger et Weidman utilisent la méthode (qu'ils connaissent bien) des *Perles tressées* pour déterminer la Traînée de cylindres creux (ainsi que celle de sphères creuses à calottes ôtées), tous ces corps se déplaçant axialement (selon leur axe de révolution).

Voici le curieux tableau qu'il dessinent du C_x linéaire de cylindres de divers élancements **ép/D** plus ou moins évidés en leur centre :



Les évidements sont définis par le rapport **Di/D** existant entre le diamètre intérieur **Di** et le diamètre extérieur **D**.

À l'extrême droite du graphe, les valeurs **Di/D = 1** créent en principe un corps d'épaisseur nulle qui ne peut donc avoir d'existence physique. Il faut plutôt voir les corps qu'on trouve à cette abscisse comme des cylindres à la paroi infiniment mince…

Au vu de ce graphe, on constate que pour les plus forts élancements, l'évidement maximal ne modifie que très peu le C_x linéaire.

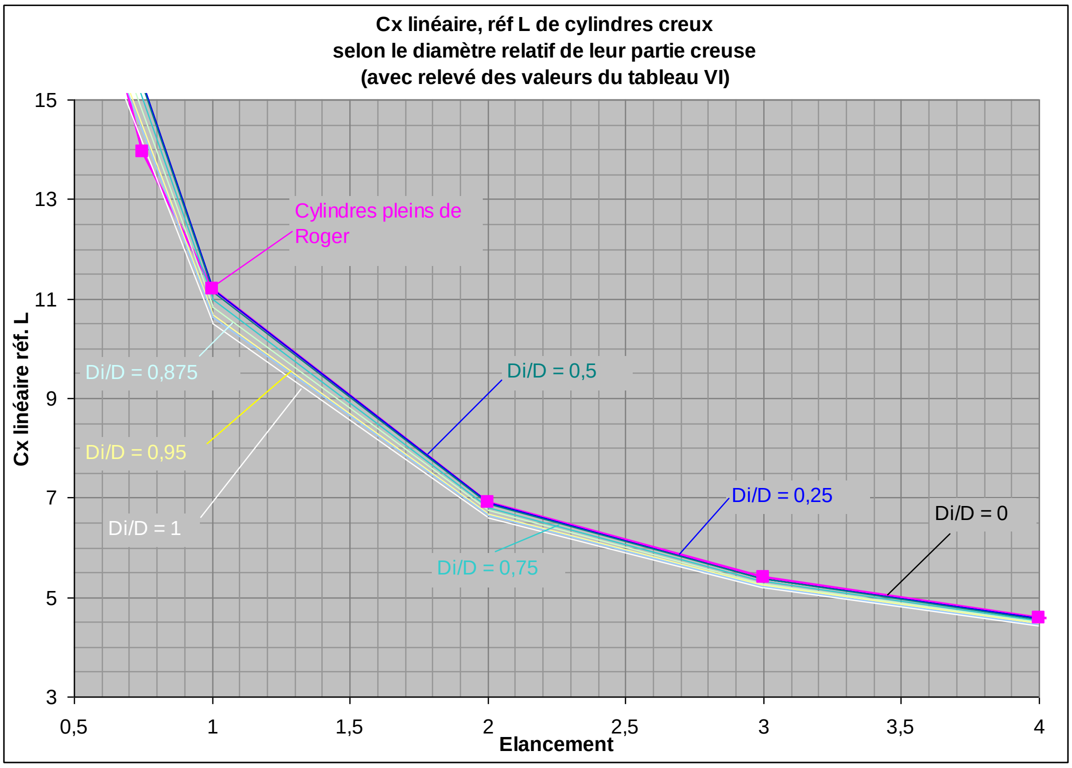
Il faut amener l'élancement **ép/D** à zéro (ce qui crée un disque plus ou moins évidé en son centre) pour que la variation du C_x linéaire selon **Di/D** soit plus sensible.

À l'extrême droite en bas, l'évidement presque total de ce disque crée un tore de section presque nulle dont le C_x linéaire (réf. **D**) tend vers **zéro**.

On retrouve donc ici, pour ce corps de révolution troué, le comportement que nous avons déjà rencontré pour la plaque carrée trouée (à savoir une forte augmentation de la pression visqueuse auprès des lèvres du trou).

Nous expliquerons plus bas ce que sont les deux marques carrées vertes ceintes de rouge.

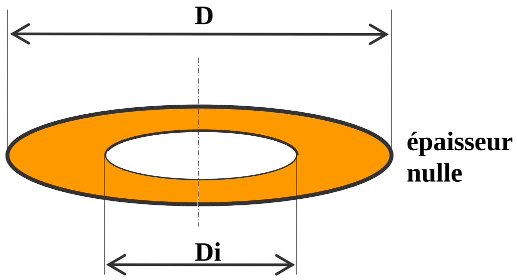
Une autre façon de présenter les résultats de Roger et Weidman est de dessiner le C_x linéaire référence **L** de tous les cylindres évidés ou non (sauf le cylindre d'élancement nul, le disque, dont la nullité de la longueur **L** interdit cette représentation) :



On observe que la variation de ce C_x linéaire en fonction du degré d'évidement **Di/D** est assez limitée (c'est ce que l'on a constaté aussi pour la plaque carrée trouée).

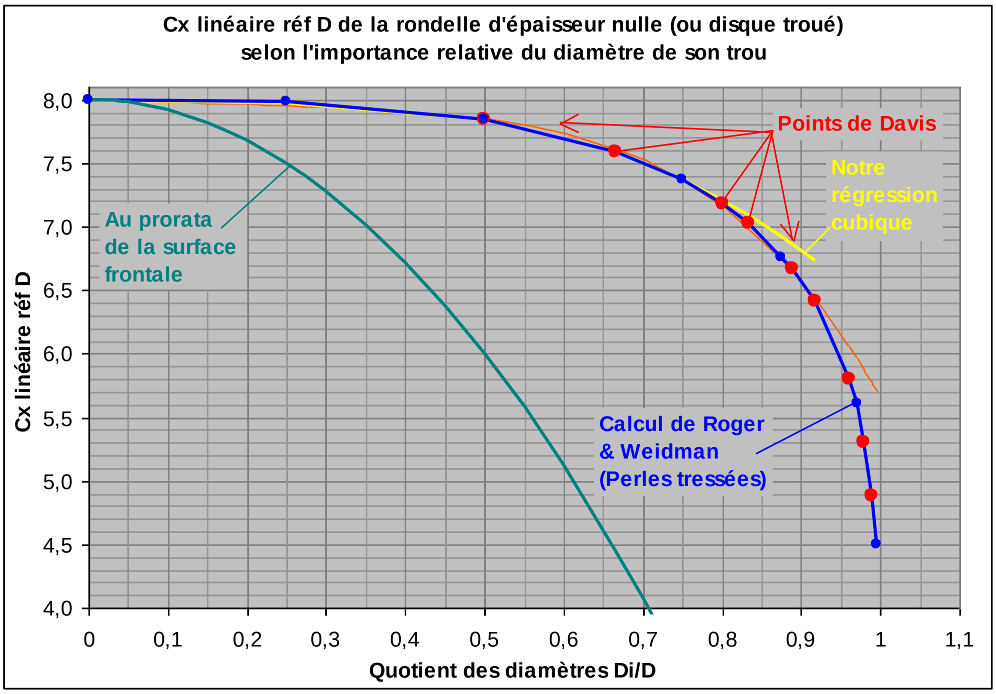
En fuchsia, nous avons représenté les cylindre plein de Roger tels que décrits par Ui. Le croisement de cette courbe avec toutes les autres pour les élancements inférieurs à **1** est curieux.

C_x linéaire du disque troué en mouvements axiaux par Roger et Weidman :



Dans les graphes précédents, le $\mathbf{C_x}$ linéaire du disque troué est donné parmi d'autres.

Voici l'évolution de ce $\mathbf{C_x}$ linéaire (selon **Di/D**, l'importance relative du diamètre du trou) :



Les points calculés par Roger et Weidman sont en bleu, les autres, en rouges, sont de Davis.

Pour les **Di/D** allant de **0 à 0,75**, nous avons trouvé une régression cubique d'équation :

$$\mathbf{C_{xLin\ Réf.D} = 8 - 2{,}6\ (Di/D)^3 + 1{,}11\ (Di/D)^2 - 0{,}21\ (Di/D)}$$

C'est la courbe jaune ci-dessus. Elle commet une erreur maximale de **0,16 %** dans la plage de **Di/D** allant de **0** à **0,75** (ces bornes comprises).

Si l'on veut aller plus loin en **Di/D**, on peut utiliser la régression suivante (en orange ci-dessus) :

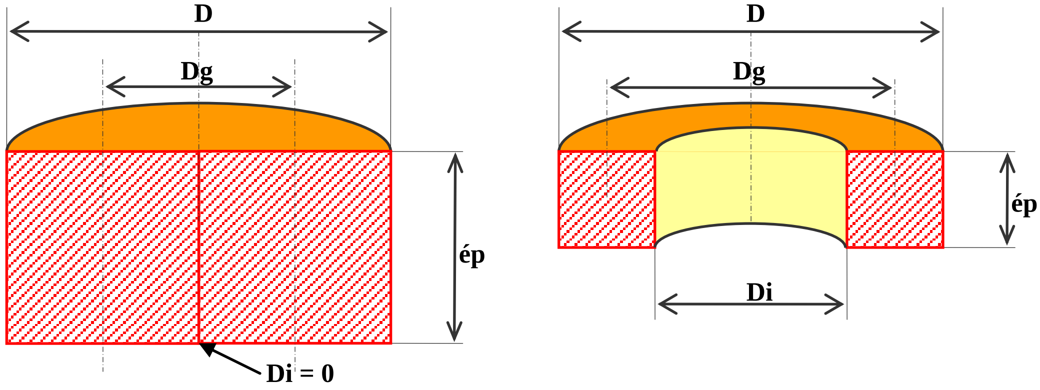
$$\mathbf{C_{xLin\ Réf.D} = 8 - 5{,}57\ (Di/D)^4 + 4{,}8\ (Di/D)^3 - 1{,}58\ (Di/D)^2}$$

L'erreur de cette régression orange, dans la plage de **Di/D 0,25** à **0,9166** (ces bornes comprises), ne se monte qu'à **0,38 %**.

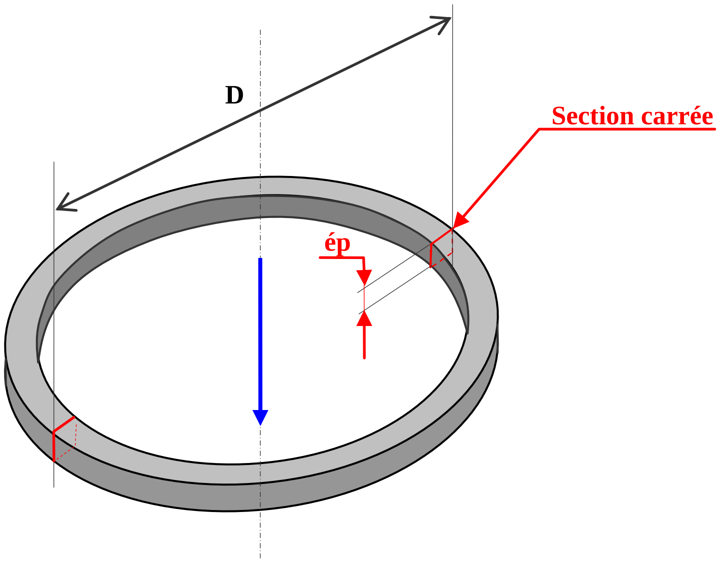
C_x linéaire du tore de section carrée en mouvements axiaux, d'après Roger et Weidman :

Le graphe de Sunada et coll. contient implicitement beaucoup de renseignements. Nous y avons déjà porté le $\mathbf{C_x}$ linéaire du cylindre d'élancement **0,5** et celui du cylindre d'élancement **0,25** troué d'un trou de diamètre moitié (ce sont aux abscisses **0** et **0,5** les deux carrés verts ceints de rouge).

Ces deux marques représentent les deux corps suivants :



Le corps de gauche est le cas extrême du tore de section carrée jointif (d'élancement **ép/D = 0,5**), alors que celui de droite est le tore quelconque de section carrée dont les formes extérieures ont un élancement de **0,25**. Un tore de section carré de section tout à fait quelconque est dessiné ci-dessous :



La connaissance des $\mathbf{C_x}$ linéaire de deux cas particuliers de tores de section carrée suscitent évidemment l'envie de dessiner la courbe générale du $\mathbf{C_x}$ linéaire des tores de section carrée.

En fait, le graphe de Sunada et coll. contient implicitement beaucoup de renseignements sur les tores de section rectangulaire (puisque les cylindres percés sont toujours des tores de section rectangulaire) ; mais concentrons-nous sur les corps particuliers que sont les tores de section carrée :

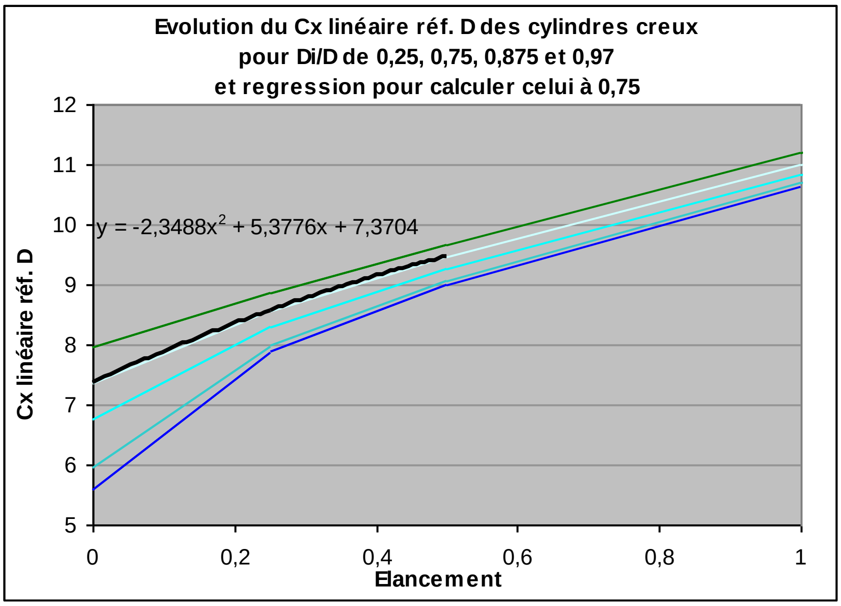
Comment dessiner la courbe générale du C_x linéaire des tores de section carrée ?

Pour les abscisses **Di/D < 0,5** le graphe de Sunada et coll. montre des courbes quasi horizontales. Cela signifie que la présence d'un trou n'y modifie pas sensiblement le C_x linéaire des cylindres troués.

Si donc on recherche le C_x linéaire d'un tore de section carrée dans cette plage d'abscisses (c.-à-d. entre les deux schémas de tores montrés ci-dessus), on peut tout simplement prendre comme C_x linéaire celui du cylindre qui leur est circonscrit (nous avons utilisé pour ce faire les régressions nées des travaux de Roger, cités par Ui).

Quant aux tores de section carrés présentant un rapport **Di/D** supérieur, il faut en placer les marques en interpolant les courbes de Sunada et coll..

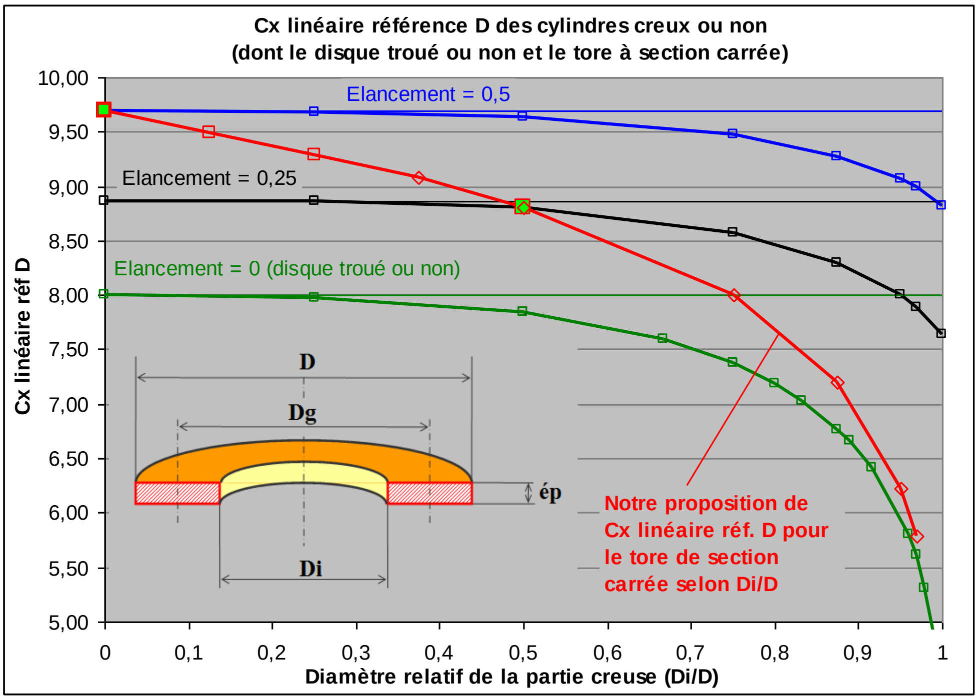
Pour chaque rapport **Di/D**, cependant, le graphe de Sunada et coll. révèle un étagement des courbes très régulier. On peut le montrer en collectant dans leur tableau de valeurs numériques les C_x linéaires pour les **Di/D** valant **0,75**, **0,875**, **0,95** et **0,97** (ce sont ceux qui nous manquent) :



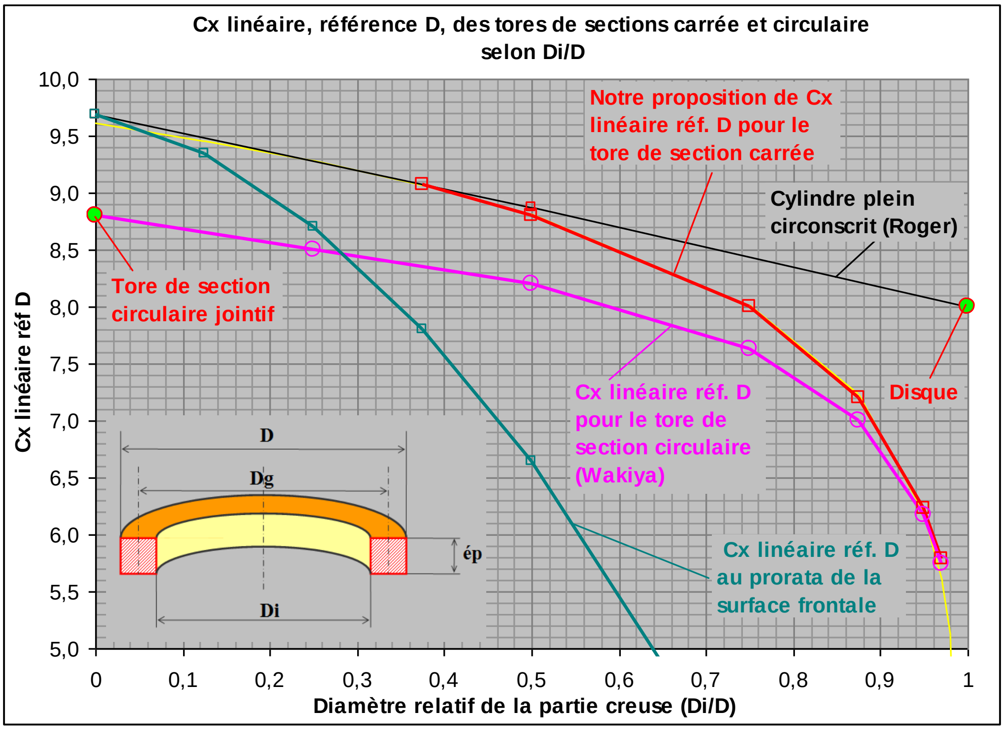
Ci-dessus, nous montrons en noir à titre d'exemple la régression parabolique suggérée par notre tableur pour la courbe bleu clair (**Di/D = 0,75**) : de telles régressions permettent une interpolation assez fine des résultats donnés par Sunada et coll..

Ci-dessus encore, la courbe verte est la courbe que tracent les C_x linéaires pour le rapport **Di/D = 0,25** ; cette courbe est la moins utile à notre interpolation puisqu'à ce rapport **Di/D**, le C_x linéaire du disque troué est quasiment celui du disque non troué (nous trouvons effectivement, à l'issue de cette interpolation, une différence de seulement **0,03 %**)

Bref, toutes interpolations effectuées, nous trouvons pour le $\mathbf{C_x}$ linéaire (en référence **D**) des tores de section carrée en déplacements axiaux la courbe rouge suivante :



On peut présenter cette courbe rouge en l'éclairant par le $\mathbf{C_x}$ linéaire (de même référence) d'autres corps :



En fuchsia sur ce graphe, nous avons porté également le $\mathbf{C_x}$ linéaire (référence **D** également) du tore de section circulaire (selon deux régressions exprimant les résultats analytiques des différents auteurs) : Ce $\mathbf{C_x}$ linéaire est plus faible que celui du tore de section carrée mais ils tendent l'un vers l'autre aux plus fortes abscisses.

Cette convergence est tout à fait satisfaisante, mais il ne faudrait pas en tirer la conclusion que pour les fortes finesses **Dg/ép** (ou **Di/D** tendant vers l'unité) les $\mathbf{C_x}$ linéaires des deux types de tores seraient égaux : il est plus probable que celui du tore de section carrée soit toujours un peu plus fort que celui du tore de section cylindrique (quand-même mieux profilé) : nous revenons plus bas sur ce problème…

En bleu glauque est la courbe du $\mathbf{C_x}$ linéaire (réf. **D**) tels qu'on le calculerait au prorata de la surface frontale des tores de section carrée (méthode Stokésienne, donc).

En noir sont les $\mathbf{C_x}$ linéaires des cylindres circonscrits au tore de section carrée (cylindres non troués), par Roger.

La marque individuelle de gauche indique le $\mathbf{C_x}$ linéaire (réf. **D**) du tore de section circulaire jointif.

La courbe jaune est une régression qui nous semble valide pour les rapport **Di/D** allant de **0,5** à **0,97**. Son équation est :

$$\mathbf{C_{xlin\ Réf.D} = 1,15\ Ln(\lambda) + 10,41}$$

…λ étant l'élancement **ép/D** du tore de section carrée. Elle commet une erreur de moins de **1 %** entre les **Di/D = 0,25 et 0,95** (ces bornes comprises).

En-dessous de **Di/D = 0,25**, la courbe rouge montre assez que l'on peut prendre comme $\mathbf{C_x}$ linéaire du tore de section carrée le $\mathbf{C_x}$ linéaire du cylindre qui lui est circonscrit, à savoir, puisque ici l'élancement $\boldsymbol{\lambda}$ de ce cylindre circonscrit ne court alors que de **0,5** à **0,375** :

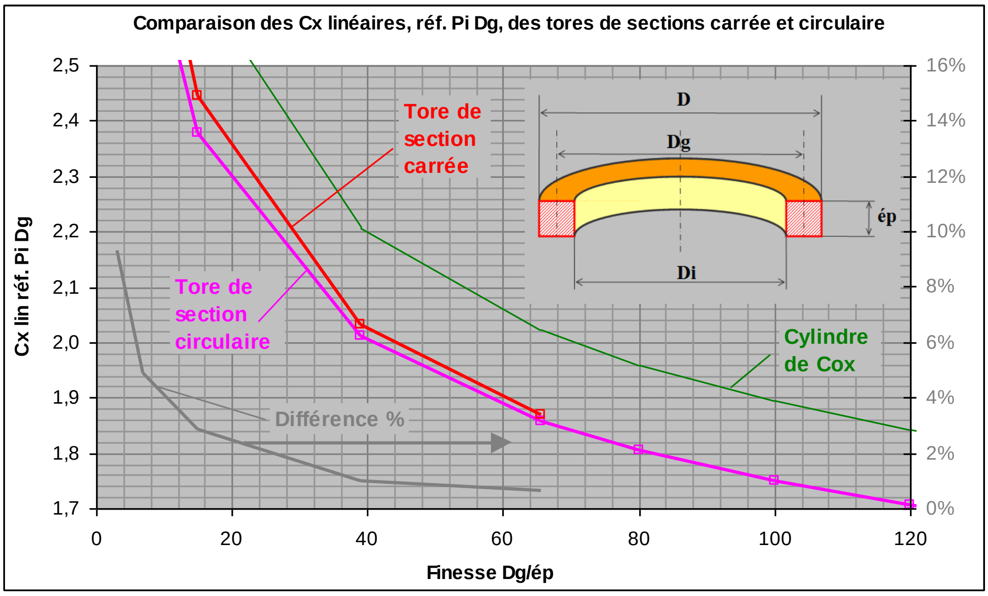
$$\mathbf{C_{xLin\ Réf.D} = 8 + 3,5\ \lambda - 0,6\ \lambda^3 + 0,5\ \lambda^5 - 0,2\ \lambda^7}$$

Dans tous ces calculs nous aurons utilisé les relations simples qui existe entre **Di/D**, $\boldsymbol{\lambda}$ et la finesse **f = Dg/ép** [247].

Revenons-en à la comparaison des $\mathbf{C_x}$ linéaires des tores de sections carrée et circulaire :

Si l'on dresse un graphe de ces deux $\mathbf{C_x}$ linéaires en référence $\boldsymbol{\pi}$ **Dg**, on obtient ceci :

[247] Par exemple **Di/D = 1-2λ**.



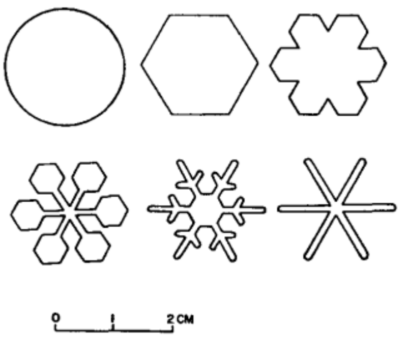
On constate à nouveau que les deux C_x linéaires rouge et fuchsia convergent l'un vers l'autre. Leur différence, à l'abscisse **Dg/ép** la plus forte calculée selon les résultats de Roger et Weidman est de **0,6 %** (avec une tendance à la baisse).

Cette différence **%** est cependant tributaire de la qualité de nos interpolations entre les valeurs de Roger et Weidman ainsi que de la précision de ces valeurs ; il est donc impossible, à notre sens, de tirer de ce graphe des conclusions…

En vert sur le même graphe est le C_x linéaire (selon Cox) du cylindre (en déplacement transverse) qu'on obtiendrait en déroulant le fil formant le tore circulaire.

Cx linéaire de quelques cristaux de neige à base hexagonale :

Roland List et Robert S. Schemenauer ont effectué des mesures de décantation de divers corps reprenant les formes de cristaux de glace (ou de neige) d'altitude :



Tous ces corps sont inscrits dans un disque de **20 mm** de diamètre et de **0,8 mm** d'épaisseur.

Pour notre part, nous nommerons ces corps (dans l'ordre) :

Disque circulaire, plaque hexagonale, plaque hexagonale indentée, cristal étoilé à spatules, cristal dendritique [248], cristal en étoile à six branches.

[248] Dendritique vient du grec *dendron*, arbre.

List et Schemenauer dessinent le graphe suivant du $\mathbf{C_x}$ quadratique (nommé Drag coefficient) de ces six corps (graphe simplifié ici par nos soins) :

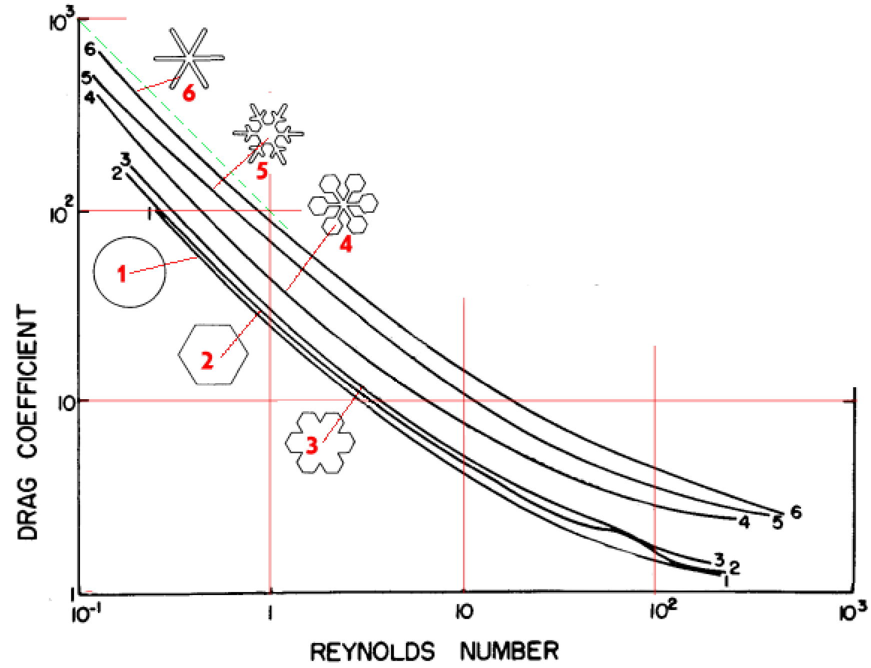


FIG. 3. Drag coefficients of snow crystal models as functions of Reynolds number: 1 disc, 2 hexagonal plate, 3 broad-branched crystal, 4 stellar crystal with plates, 5 dendrite, 6 stellar crystal;

Ils utilisent bien-sûr la définition classique du $\mathbf{C_x}$ quadratique, à savoir :

$$\mathbf{C_{xQuad}} = \frac{\mathbf{F}}{\frac{1}{2}\rho\mathbf{V}^2\mathbf{S}}$$

…S étant la section du corps présentée frontalement à l'écoulement.

Il résulte de ce choix que, sur le graphe ci-dessus, le $\mathbf{C_x}$ quadratique du corps N°6 en étoile est le plus fort : cela ne signifie pas que la Traînée de ce corps N°6 est la plus forte (à $\boldsymbol{\mu}$ et $\mathbf{V}$ constantes) mais cela provient tout simplement du fait que ce $\mathbf{C_x}$ quadratique est formé en divisant la Traînée par une section frontale très faible.

Pour le disque circulaire (de section frontale $\boldsymbol{\pi D^2/4}$), il est facile de convertir ce $\mathbf{C_x}$ quadratique en notre $\mathbf{C_x}$ linéaire en recomposant les éléments du dénominateur de la façon suivante :

$$\mathbf{C_{xQuad}} = \frac{\mathbf{F}}{\frac{1}{2}\rho\mathbf{V}^2\,\frac{\pi\mathbf{D}^2}{4}} = \frac{\mathbf{F}}{\frac{\pi}{8}\mu\mathbf{VD}\,\frac{\rho\mathbf{VD}}{\mu}}$$

Si l'on reconnaît dans la dernière quantité présente au dénominateur le Reynolds diamétral $\mathbf{R_{eD}}$ de l'écoulement et dans le quotient $\mathbf{F/(\mu VD)}$ on peut prendre acte que :

$$C_{xQuad} = \frac{C_{xLinRéfD}}{\frac{\pi}{8} R_{eD}}$$

…soit :

$$C_{xLinRéfD} = \frac{\pi}{8} C_{xQuad} R_{eD}$$

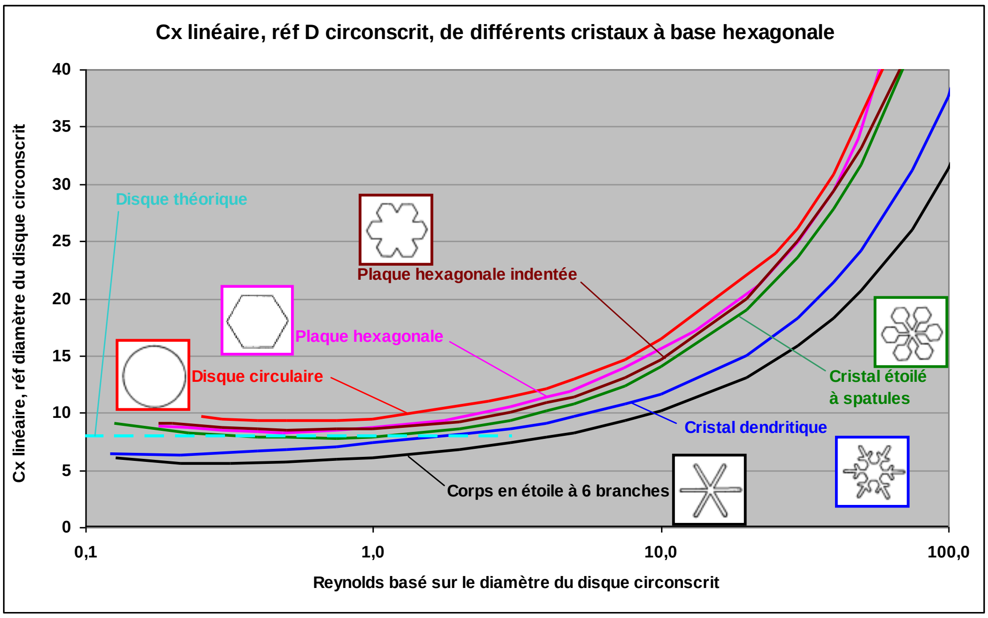
Ceci pour le disque.

Pour les autres cristaux (dont List et Schemenauer donnent la surface frontale) on peut dégager de même, en conservant la même dimension caractéristique **D** (la plus grande dimension des cristaux) comme base du Reynolds :

$$C_{xLinRéfD} = \frac{\pi}{8} \frac{S_{Cristal}}{S_{Disque}} C_{xQuad} R_{eD}$$

Le quotient $S_{Cristal} / S_{Disque}$ étant celui de la surface frontale de chaque cristal sur la surface frontale du disque circonscrit (**$\pi D^2/4$**).

Ces relations permettent de convertir le C_x quadratique de chaque cristal en un C_x linéaire. Cela dessine le graphe suivant :



Le premier commentaire que l'on peut faire sur ce graphe est que les C_x linéaires qu'il indique ne sont pas absolument constant en régime de Stokes (ou plutôt en-dessous du Reynolds unitaire) ; ceci est troublant puisqu'on a de fortes raisons de penser que la majorité des cristaux étudiés doivent montrer un C_x linéaire fixe en régime de Stokes avéré.

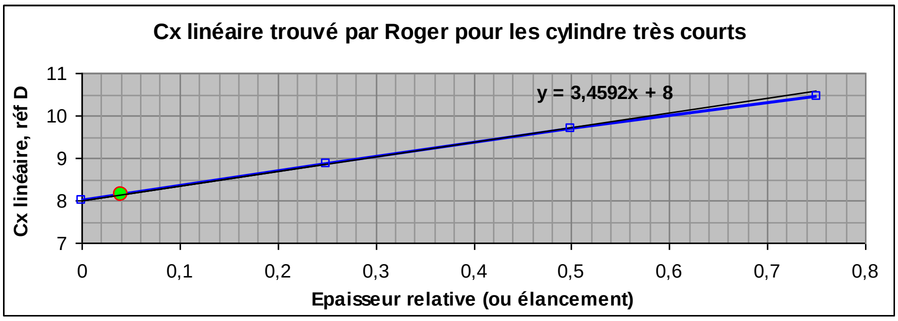
Ce défaut (qui révèle les obligatoires erreurs de mesures) apparaît déjà à gauche des courbes 4 et 5 du graphe d'origine : en effet, seules les parties de courbes de pente **–1** sur ce graphe log-log (c'est la pente de la droite tiretée verte) correspondent à un C_x linéaire constant. Il faut de plus songer que les dérogations à cette loi mathématique sont quelque peu masquées par la compression logarithmique.

Le deuxième commentaire est l'échelonnement des différentes courbes en ordonnée est moins clair que dans le graphe d'origine, même dans la plage de Reynolds de Stokes.

Le troisième commentaire est que, nonobstant les errements des courbes, plus les corps sont indentés et plus leur $\mathbf{C_x}$ linéaire (en référence à leur diamètre commun **D**) est faible : ceci était attendu puisque l'on peut penser que leur indentation augmente la surface de passage du fluide. En conséquence de quoi le $\mathbf{C_x}$ linéaire du corps N°6 (en étoile) est le plus faible.

Le quatrième commentaire est que le $\mathbf{C_x}$ linéaire du disque circulaire (courbe rouge ci-dessus) est un peu trop fort (**9,3)**, la valeur exacte de celui du disque circulaire d'épaisseur nulle étant **8** (c'est l'horizontale tiretée bleu clair) ; cet écart doit être dû, en partie, au fait que l'épaisseur du disque (**0,04 D**) n'est pas nulle, bien que les auteurs considèrent, sur la foi des travaux de Jayaweera et Cottis [249], que la Traînée d'un disque ne varie pas lorsque son épaisseur relative (ou élancement) varie de **0,01** à **0,80 D**.

En réalité, pour les élancements **0,25**, **0,5** et **0,75**, par exemple, Roger (cité par Ui) a mesuré un $\mathbf{C_x}$ linéaire de **8,865**, **9,687** et **10,461**.



Ce qui promet au disque circulaire de List et Schemenauer (d'élancement **0,04**) le $\mathbf{C_x}$ linéaire de **8,14** (c'est la marque circulaire rouge à cœur vert, l'équation de la pente à l'origine des marques de Roger étant indiquée sur le graphe).

Cela ne fait pourtant pas le compte…

La trop forte valeur du $\mathbf{C_x}$ du disque circulaire mesuré par List et Schemenauer est peut être dû à une mauvaise correction des effets de parois des deux cuves utilisées par ces auteurs (il ne mentionnent pas cet effet dans leur texte).

C'est donc plus l'échelonnement des $\mathbf{C_x}$ linéaires des différents cristaux qu'il conviendra de retenir des travaux de List et Schemenauer (ce qui est déjà fort intéressant).

En ce qui concerne l'ensemble de la plage de Reynolds que ces auteurs ont pris en considération (soit de **0,1** à **300** ou **500**), ils relèvent sur leur graphe une relative constance de cet échelonnement.

Ils en tirent la loi linéaire suivante qui donne le $\mathbf{C_x}$ quadratique des différents cristaux testés en fonction du quotient de leur surface frontale sur la surface frontale du disque (en une démarche conforme à celle donnant le diamètre Stokésien d'un corps) :

$$\mathbf{C_{xQuadCristal} = C_{xQuadDisque}\ (0{,}53 + 0{,}56\ S_{Disque} / S_{Cristal})}$$

Ceci du moins dans la plage **1,2** à **5,5** du quotient de surface $\mathbf{S_{Disque} / S_{Cristal}}$.

[249] "[...] Jayaweera and Cottis (1969) found the drag coefficients of discs to be independent of the thickness-to-diameter ratio for 0.2<Re<100 if this ratio varied between 0,01 ans 0,8."

Cette loi linéaire peut-être convertie pour exprimer le $\mathbf{C_x}$ linéaire des cristaux d'après le même quotient de surface frontale (ou plutôt son inverse) :

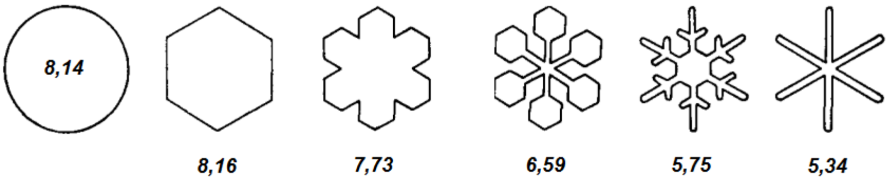
$$\mathbf{C_{xLinCristal} = C_{xLinDisque}\ (0{,}53\ S_{Cristal} / S_{Disque} + 0{,}56)}$$

Ceci dans la plage **0,18** à **0,83** du quotient $\mathbf{S_{Cristal} / S_{Disque}}$.

Il est d'ailleurs notable que ces deux lois linéaires ne sont pas honorées par le disque circulaire (dont le $\mathbf{C_x}$ quadratique ou linéaire vaudrait **1,09** fois lui-même) ; ceci étant, il se situe en dehors de la plage de validité indiquée par les auteurs (son $\mathbf{C_x}$ linéaire est d'ailleurs connu par ailleurs).

En partant de la dernière loi linéaire et si l'on se base sur un $\mathbf{C_x}$ linéaire de **8,14** pour le disque circulaire d'élancement **0,04** (valeur que, d'après Roger, List et Schemenauer auraient dû mesurer), voici le $\mathbf{C_x}$ linéaire que l'on peut prédire pour les différents cristaux (en régime de Stokes) :

Cx linéaire de ces cristaux
en référence à leur plus grande dimension



Élancement de tous cristaux : 0,04

Ces $\mathbf{C_x}$ linéaires pourraient constituer un premier recours pour certains chercheurs en science météorologique.

Notons par ailleurs que Jayaweera a suggéré en 1972, se basant sur les expérience de List et Schemenauer, que la vitesse de décantation des cristaux plans pourrait être approximée par celle d'un disque circulaire de la même masse et épaisseur.

Si l'on accepte cette approche, on peut effet écrire, par exemple pour le *cristal en étoile à six branches* de grande dimension **D** ci-dessus (le quotient de la surface de ce cristal sur celle du disque étant **0,2**) (ce quotient étant aussi celui du poids des deux corps) :

$$\mathbf{V_{cristal} = \frac{P_{disque\ \ même\ \ poids}}{\mu D\sqrt{0{,}2}\ \ 8}}$$

… $\mathbf{D\sqrt{0{,}2}}$ étant le diamètre du disque de même poids et de même épaisseur que le cristal et **8** étant le $\mathbf{C_x}$ linéaire du même disque (en référence à son diamètre $\mathbf{D\sqrt{0{,}2}}$).

Or $\mathbf{P_{disque\ même\ poids}}$, le poids du disque de même poids que le cristal est bien évidemment le poids du cristal. On peut donc écrire :

$$\mathbf{V_{cristal} = \frac{P_{cristal}}{\mu D\sqrt{0{,}2}\ \ 8}}$$

…d'où l'on tire :

$$8\sqrt{0,2} = \frac{P_{cristal}}{\mu D V_{cristal}}$$

Or le deuxième membre de l'égalité ci-dessus n'est autre que la définition du C_x linéaire du cristal (en référence **D**, sa dimension maximale).

Le C_x linéaire du cristal est donc égal à $8\sqrt{0,2}$ soit **3,58**, ce qui est un peu plus faible que les **5,34** que nous avons tiré des mesures de List et Schemenauer, même si c'est bien dans l'ordre de grandeur (ce résultat s'améliorant pour les autres cristaux de List et Schemenauer).

List et Schemenauer ont, de plus, étudié la stabilité de la décantation de ces six cristaux ; ils écrivent :

« Pour les six cristaux de neige plan testés [ce sont les corps représentés sur l'image ci-dessus, ndBdGM], aucune oscillation ne fut observée pour des Reynolds ≤ 100. Autour du Reynolds 200, de petites oscillations furent observées sur seulement le disque circulaire, la plaque hexagonale et la plaque hexagonale indentée [les trois premier corps ci-dessus, ndBdGM], ces oscillations étant plus fortes dans le cas du disque. »

Les apports ultérieurs de Wang et Ji :

Ces travaux de List et Schemenauer ne pouvait tenir compte de ceux de Wang et Ji publiés 26 années plus tard. Ceux-ci, résumant des calculs effectués par ordinateur, proposent comme C_x quadratique de la plaque hexagonale, entre les Reynolds **0,2** et **150** :

$$C_{xQuad} = \left(\frac{64}{\pi\ R_{eD}}\right)\left(1 + 0,078\ R_{eD}^{0,945}\right)$$

(**D** étant le diamètre de l'hexagone, soit sa cote entre sommets opposés)

Dans le régime de Stokes le dernier terme en $R_e^{0,945}$ devient de peu de poids, ce qui fait qu'on peut prétendre que dans ce régime la C_x quadratique de la plaque plane hexagonale vaut :

$$C_{xQuad} \approx \frac{64}{\pi\ R_{eD}} \approx \frac{20,372}{R_{eD}}$$

Cette valeur du C_x quadratique de la plaque mince hexagonale est donc un peu plus faible que les $24/R_{eD}$ habituels du disque.

Cependant cette annonce de Wang et Ji n'est autre que la modification du C_x quadratique du disque ($24/R_{eD}$) au *prorata* des surfaces de l'hexagone et du disque : ce calcul, d'apparence stokésienne doit nous appeler à la prudence (même si l'on peut admettre qu'il ne conduit pas, ici, à de grosses erreurs).

Le même jeu sur les définitions des deux C_x que nous avons utilisé précédemment conduit toujours, pour cette plaque hexagonale mince, à :

$$C_{xLinRéfD} \approx \frac{\pi\ S_{Cristal}}{8\ S_{Disque}} C_{xQuad}\ R_{eD} \approx \frac{S_{Cristal}}{S_{Disque}}\ 8$$

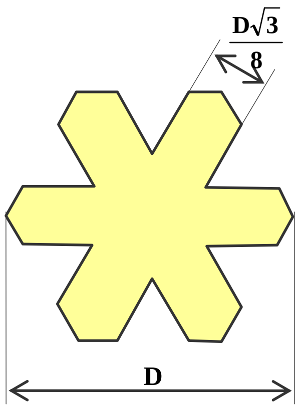
Cette égalité nous permet de convertir le $\mathbf{C_x}$ quadratique en un $\mathbf{C_x}$ linéaire. Ce dernier, pour la plaque mince hexagonale, est alors :

$\mathbf{C_{xLin\,D} = 6{,}62}$

…en référence au *diamètre* **D** de l'hexagone (soit sa cote entre sommets opposés ou diamètre du cercle circonscrit).

Nous avons-nous-mêmes estimé plus haut que le $\mathbf{C_x}$ linéaire de cette plaque hexagonale se situait entre **6,47** et **8** (en référence à sa cote entre sommets opposés) ; ce résultat numérique de Wang et Ji est donc satisfaisant.

Wang et Ji ont également calculé le $\mathbf{C_x}$ quadratique d'une plaque hexagonale un peu plus indentée que ne l'avait fait List et Schemenauer :



Les six indentations de Wang et Ji font en effet perdre **25 %** de sa surface à l'hexagone de base [250].

Le $\mathbf{C_x}$ quadratique, en régime de Stokes, ayant pour ce dernier cristal le même libellé que la plaque hexagonale précédente (cette identité apparente étant consécutive à la modification de la surface frontale), on trouve pour ce cristal indenté un $\mathbf{C_x}$ linéaire, en référence au *diamètre* **D** de l'hexagone circonscrit de :

$\mathbf{C_{xLin\,D} = 4{,}96}$

On peut noter que le fait que le $\mathbf{C_x}$ quadratique de ce corps ait le même valeur que celui de la plaque hexagonale (non indentée) laisse à penser que pour de tels corps plats, la Traînée peut être calculée selon la méthode Stokésienne (où elle est considérée comme proportionnelle à la surface frontale, toutes choses égales par ailleurs).

Pour des indentations différentes, c'est donc la relation :

$$\mathbf{C_{xLinRéfD}} = \mathbf{8}\,\frac{S_{Cristal}}{S_{Disque}}$$

…qui donnera le $\mathbf{C_x}$ linéaire d'un cristal 2D. Du moins, cette relation d'apparence stokésienne est-elle vérifiée, si l'on suit Wang et Ji, pour le disque, la plaque hexagonale et la plaque hexagonale indentée de ces auteurs. [251]

[250] …alors que celles de List et Schemenauer ne lui retirait que **11 %**.

Il est notable que cette dernière relation est différente de celle de List et Schemenauer cité un peu plus tôt.

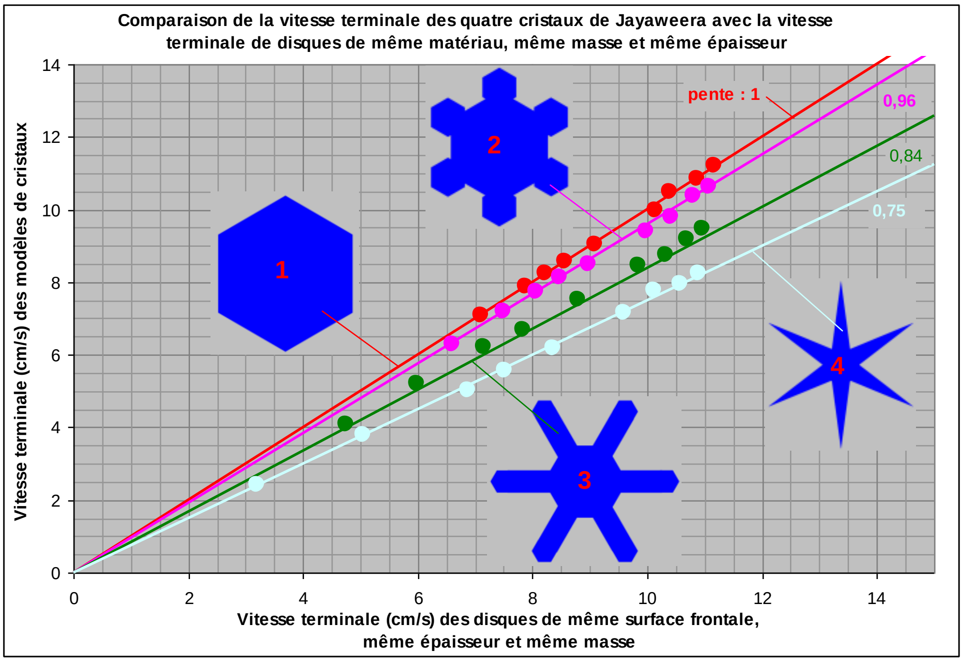
Les mesures de la décantation de cristaux à base hexagonale par Jayaweera :

Interrogé par les résultats de List et Schemenauer, K. O. L. F. Jayaweera, a réalisé des mesures de décantation, à des Reynolds de **0,5** à **200**[252], de quatre modèles de cristaux (en laiton ou en duralumin) dessinés sur une trame hexagonale. Dans un court texte, il produit le graphe suivant qui prend :

→ pour ordonnée la vitesse de décantation (mesurée par lui) de quatre modèles de cristaux,

→ pour abscisse la vitesse de décantation (mesurée par lui) de *disques équivalents* aux modèles de cristaux (*équivalents* signifiant ici « de même matériau, de même masse et de même épaisseur que le modèle de cristal) [253].

Comme Jayaweera le fait remarquer, ces disques équivalents ne sont pas ceux de List et Schemenauer (qui prenaient ses disques équivalents comme de même diamètre que le cercle circonscrit au cristal).



(le dessin de certains de certains cristaux a été ici simplifié par nous, se référer au texte pour plus de précisions)

Jayaweera est avare de renseignements sur la forme de ses cristaux, mais Heymsfield et Kajikawa, reprenant son texte, ont pu indiquer que les cristaux **n° 2**, **3** et **4** présentent **~75**, **~50** et **~25 %** de la surface frontale de l'hexagone (ou cristal **n°1**) ; nous trouvons à peu près les mêmes quotients.

---

[251] Le quotient de la surface de l'hexagone sur celle du disque circonscrit est **0,827**. Pour le dernier cristal indenté c'est **0,6202**.

[252] Nous revenons sur ces valeurs de Reynolds à la fin de notre exploitation des mesures de Jayaweera.

[253] Pour mieux mémoriser cette définition des *disques équivalents*, on peut imaginer qu'on a refondu le modèle de cristal sous forme d'une boule et qu'on a écrasé cette boule pour l'un donner une forme de disque de la même épaisseur que le modèle de cristal d'origine.

Comme on le remarque, les quatre jeu de marques du graphe ci-dessus dessinent chacun une droite (mieux encore que dans notre captation ci-dessus du fait de certaines déformations du graphe d'origine).

Jayaweera lui-même indique la pente de ces quatre droites : nous les avons indiquées sur le graphe (**1**, **0,96**, etc.**)**.

En supposant que la décantation des corps de Jayaweera se produit en régime de Stokes [254] et en milieu non limité, on peut tirer leur C_x linéaire de ce graphe et des pentes indiquées ; cela ce fait en posant l'équation régissant l'équilibre de la décantation stabilisée d'un modèle de cristal en régime de Stokes :

$$\mathbf{mg = C_{x\mathrm{Lin}}\, \mu\, V_{cr}\, D}$$

…équation où **m** est la masse efficiente du modèle de cristal (c.-à-d. la masse diminuée de la masse d'eau déplacée), **g** l'accélération de la pesanteur, $C_{x\mathrm{Lin}}$ le C_x linéaire du modèle de cristal, **μ** la viscosité dynamique du fluide, V_{cr} la vitesse du modèle de cristal et **D** le diamètre du cercle circonscrit au modèle de cristal (diamètre qui nous servira de base pour le C_x linéaire).

On doit également poser une équation similaire régissant l'équilibre de la décantation stabilisée du disque équivalent au modèle de cristal (disque équivalent de même masse, de même matière et de même épaisseur que le modèle de cristal, donc le cristal refondu et écrasé sous forme de disque de même épaisseur que le cristal) :

$$\mathbf{mg = 8\, \mu\, V_{d.éq}\, D_{d.éq}}$$

…équation où $V_{d.éq}$ est la vitesse de ce disque équivalent, $D_{d.éq}$ le diamètre de ce disque équivalent et **8** le C_x linéaire de ce même disque équivalent en référence $D_{d.éq}$ [255].

La valeur du diamètre $D_{d.éq}$ du disque circulaire équivalent est liée au quotient de surface q_s que présente le cristal par rapport à l'hexagone d'où il est tiré par la loi :

$$\mathbf{D_{d.éq} = 0{,}9094\, \sqrt{q_s}\, D}$$

…**D** étant toujours le diamètre du cercle circonscrit au cristal, soit sa plus grande dimension.

Comme Jayaweera indique la pente $\mathbf{k} = V_{cr}/V_{d.éq}$ des droites sur le graphe ci-dessus (par exemple **k = 0,75** pour le cristal en étoile **n° 4**), on peut tirer de toutes les égalités ci-dessus la valeur du C_x linéaire :

$$C_{x\mathrm{Lin}} = \frac{8 * 0{,}9094\, \sqrt{q_s}}{k}$$

Comme nous l'avons dit, Heymsfield et Kajikawa estiment les quotients de surfaces à **0,25** pour le cristal en étoile **n° 4** (pente **0,75**), **0,50** pour le cristal **n° 3** (pente **0,84**), **0,75** pour le cristal **n° 2**.

---

[254] Nous y revenons à la fin de cette exploitation du texte de Jayaweera.

[255] Nous considérons ici que le disque équivalent montre un épaisseur négligeable (Jayaweera donne comme épaisseur pour les cristaux **0,7** à **3 %** du diamètre du cercle circonscrit, ce qui fait quand-même **2,1** à **12 %** du diamètre des disques équivalents au cristal en étoile).

Il résulte de tout cela que les C_x linéaires (tous en référence au diamètre du cercle circonscrit) sont :

→ **4,85** pour le modèle de cristal **n°4** (ou cristal en étoile à 6 branches),
→ **6,12** pour le modèle de cristal **n°3**,
→ **6,56** pour le modèle de cristal **n°2**,
→ **7,28** pour le modèle de cristal **n°1** (ou plaque hexagonale).

Comme on le voit, le C_x linéaire de la plaque hexagonale (ou cristal **n° 1**) (tel que tiré des mesures de Jayaweera) est nettement inférieur à **8** (qui est le C_x linéaire du le disque circulaire qui lui est circonscrit).

Il faut cependant noter que ces mesures ont été effectuées à des Reynolds assez fort (donnés pour courir de **0,5** à **200**, le Reynolds de **0,5** ne pouvant cependant être que celui du cristal en étoile **n°4** pour lequel le C_x linéaire de **4,85** est donc le plus crédible).

Faisons remarquer au lecteur que nous n'avons pu retrouver par le calcul la vitesse de décantation du disque équivalent du cristal **n°4** au plus bas Reynolds [256]. Il se pourrait que les vitesses annoncées par Jayaweera soient des vitesses non corrigées des effets de parois, ce qui pourrait s'expliquer par le fait que le dessein de cet auteur était de comparer la vitesse de chute des cristaux avec celle de leur disque équivalent…

L'auteur écrit d'ailleurs :

« Ces résultats montrent que les quotients de la vitesse de décantation des modèles cristaux de glace sur celle de leur disque équivalent sont indépendants du Nombre de Reynolds ou des propriétés du matériaux des particules ou du fluide dans lequel se produit la décantation. »

Il ajoute même :

« Mieux encore, puisque la plage de Reynolds couverte par ces essais de décantations correspondent à la plage de Reynolds des cristaux de glace tombant dans l'air, ce [principe de constance du quotient des vitesses à tous Reynolds] sera honoré par les cristaux de glace tombant dans l'air ou même par toute particule mince et plane décantant librement dans tous fluides. » [257]

Apports de Pruppacher et Klett :

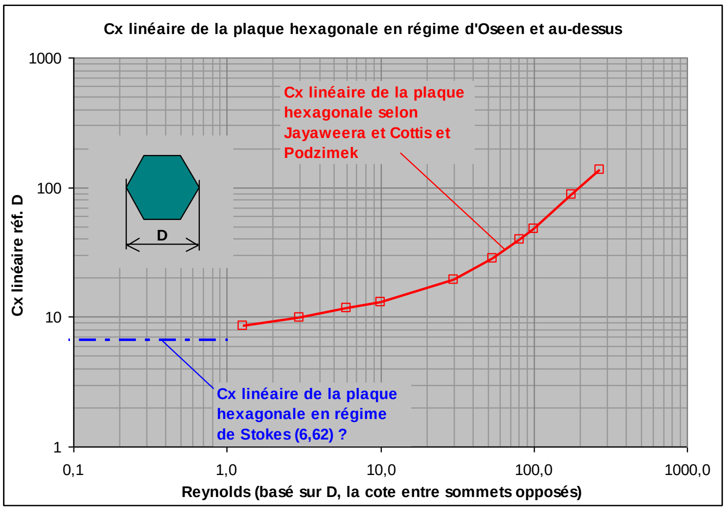
Dans Microphysics of Clouds and Precipitation, H. R. Pruppacher et J. D. Klett [258] font état en 1980 des caractéristiques de Traînée des plaques hexagonales dans la plage de Reynolds **1** à **300** dues à Jayaweera & Cottis et à Podzymek. Ces caractéristiques de Traînée sont exprimées sous la forme du Nombre de Davies ou de Best (soit $\mathbf{C_{xQuad}}$*$\mathbf{R_e}^2$). Il est facile d'en tirer le C_x linéaire des plaques hexagonales dans cette plage de Reynolds très forts (et dérogeant sûrement au régime de Stokes) :

---

[256] Nous pensons d'ailleurs que les corps en laiton sont épais de **0,52** et que ceux en duralumin sont épais de **0,13** : en effet le choix inverse (qui est annoncé dans le texte) annihile l'intérêt du changement de matériaux puisqu'alors les poids efficients des deux types de corps sont à peu près égaux.

[257] Un façon de prouver la validité de l'extension de ce principe à d'autres particules de canevas non hexagonal serait de l'appliquer à des particules connues comme la plaque carrée inscrite dans l'hexagone de référence. Il semble que cela ne fonctionne pas.

[258] Disponible en Google Books.



Cette courbe rouge ne nous renseigne malheureusement pas sur la vrai valeur du $\mathbf{C_x}$ linéaire de la plaque hexagonale (dessinée en bleu ci-dessus à **6,62** bien qu'on aurait aussi pu prendre les **7,28** de Jayaweera), même si elle confirme son bon ordre de grandeur.

Nombre de Best ou de Davies :

Afin de simplifier les calculs de la décantation des cristaux de glace dans les nuages d'altitude, les météorologues ont eu l'idée d'utiliser pour caractériser cette décantation de faire appel à un nouveau nombre adimensionnel, le Nombre de Best ou de Davies.

Ce nombre, que nous symboliserons par ***X*** est défini comme suit :

$$X = C_{xQuad}\ Re_D^{\ 2}$$

…$\mathbf{C_{xQuad}}$, le $\mathbf{C_x}$ quadratique valant comme toujours $\dfrac{mg}{\frac{1}{2}\rho V^2 S}$ (**m** étant le masse efficiente de la particule [259], **g** l'accélération de la pesanteur [260], **ρ** étant la Masse Volumique de l'air (ou du fluide, en général) et **S** la surface frontale de la particule ;

De même $\mathbf{R_{eD}}$ vaut classiquement $\dfrac{VD}{\nu}$, **D** étant une dimension caractéristique, ici le diamètre frontal (ou la plus grande dimension de l'hexagone circonscrit au cristal) et **ν** la Viscosité Cinématique de l'air (ou du fluide, en général).

Comme on le conçoit facilement, le $\mathbf{C_x}$ quadratique et le Reynolds étant des quantités adimensionnelles, le Nombre de Best ou de Davies l'est également.

Dans le Google book SEA SALT AEROSOL PRODUCTION: MECHANISMS, METHODS, MEASUREMENTS, AND MODELS, Ernie R. Lewis, R. Lewis et Stephen E. Schwartz précisent :

« Cette quantité a été nommée ainsi d'après Davies (1945) et d'après Best (1950) bien qu'elle ait été utilisée auparavant par Castleman (1926), Burke et Plummer

[259] Soit sa masse vraie diminuée de la poussée d'Archimède due à l'air.

[260] De ce point de vue, il faut se souvenir que la pesanteur est quasiment la même en altitude qu'au sol…

(1928), Sciller et Naumann (1933), Lapple et Sheperd (1940, Krumbein (1942) et Langmuir (1943-1944 (in Langmuir, 1961).»

D'autre part, ainsi que l'écrivent Clift, Grace et Weber, ce même nombre de Best ou de Davies multiplié par **3/4** devient le Nombre ou d'Archimède (du moins s'agissant de la sphère). Il existe aussi un lien avec le Nombre de Galilée puisque celui-ci vaut la racine carrée du Nombre d'Archimède [261].

Ces incertitudes sur l'identité de l'inventeur de ladite quantité sont peut-être une raison suffisante (et mnémotechnique) pour symboliser celle-ci par un ***X***.

Mais sa notable particularité est que, le $\mathbf{C_x}$ quadratique étant proportionnel à la vitesse de la particule au carré et le Reynolds étant proportionnel à la même vitesse, le produit $\mathbf{C_{xQuad}*R_{eD}^2}$ aboutit à la disparition de cette vitesse. On a donc :

$$X = \frac{2mgD^2}{\rho\nu^2 S}$$

Au vu de cette définition, on voit que le nombre de Best ou de Davies prend en compte certaines caractéristiques physiques de la particule (poids efficient **mg**, dimension caractéristique **D** et surface frontale **S**), ainsi que toutes les caractéristiques du fluide où se déplace cette particule (**ρ** et **ν**).

On note aussi que dans cette définition la vitesse de la particule n'intervient aucunement.

Résultat : le Nombre de Best ou de Davies explicite à lui tout seul beaucoup des données du phénomène que constitue la décantation d'un corps dans le fluide considéré (en général l'air pour les cristaux de glace) : il n'y a par exemple qu'un seul nombre de Best ou de Davies pour un cristal de masse **m** et de dimension **D** et de surface frontale **S** donnés décantant dans un fluide également donné !

Sur ce point précis, il est d'ailleurs utile de noter que, à dimension caractéristique **D** donnée, Masse Volumique et <u>épaisseur</u> du cristal constantes, le Nombre de Best ou de Davies dudit cristal :

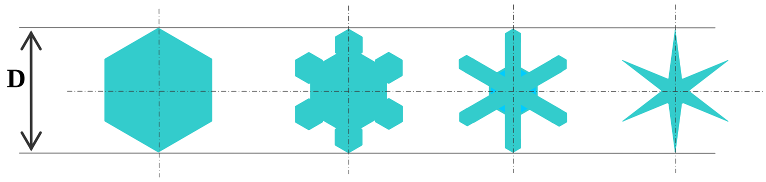
$$X = \frac{2mgD^2}{\rho\nu^2 S}$$

…reste le même quelle que soit son *indentation* puisqu'alors masse **m** et surface **S** sont proportionnels ; en conséquence, les quatre cristaux mesurés en cuve de décantation par Jayaweera (qui étaient d'épaisseur et de densité constantes et formés sur un canevas hexagonal [262]) montrent, par hasard, le même Nombre de Best ou de Davies :

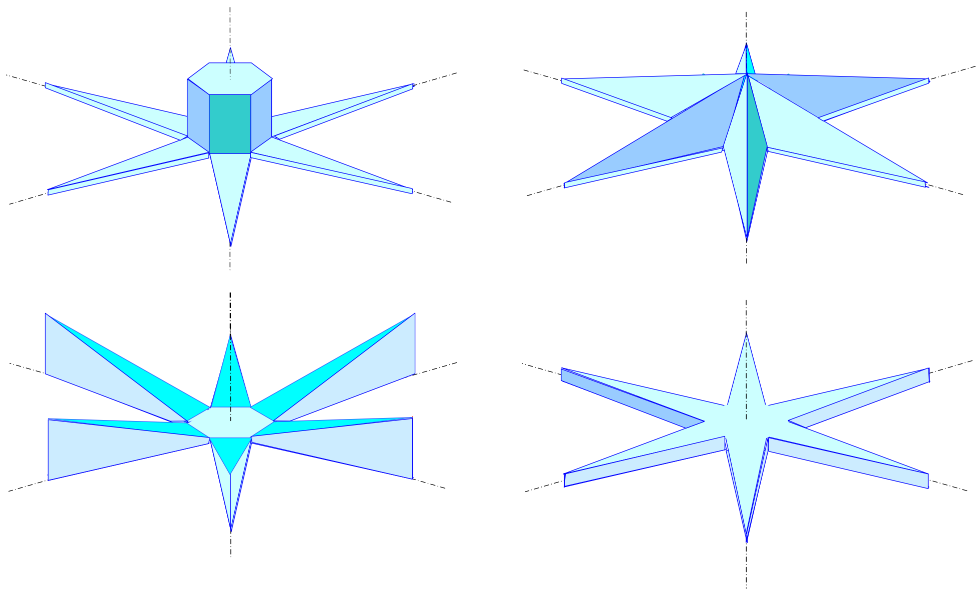
---

[261] Ceci bien qu'une autre définition coexiste, reprise, par exemple, par Clift Grace et Weber.

[262] Par « cristaux formés sur un canevas hexagonal » nous entendons des corps acceptant un certain nombre de symétries et dont le pourtour s'inscrit dans un hexagone.



Le même Nombre de Best ou de Davies peut donc caractériser des corps tout à fait différents. Ainsi les quatre particules ci-dessous ont même dimension caractéristique **D**, même surface frontale **S** et même volume (donc même masse à densité constante) :



Les trois premières particules ont de plus un élancement identique (bien que ce critère ne soit pas pris en compte par le Nombre de Best ou de Davies).

Ces quatre particules auraient donc le même nombre de Best ou de Davies (à densité constante). Or il est très improbable qu'elles aient le même $\mathbf{C_x}$!

Résultat : elle décanteront à vitesse différente dans le même fluide, en application de la loi $\mathbf{mg = \frac{1}{2}\,\rho V^2\, S\, C_{xQuad}}$, ou plutôt :

$$\mathbf{V} = \sqrt{\frac{\mathbf{mg}}{\frac{1}{2}\rho \mathbf{S} \mathbf{C}_{\mathbf{xQuad}}}}$$

Mais ce faisant, leur Reynolds (qui dépend de leur vitesse) sera différent. Donc, sur un graphe $\boldsymbol{X}$ = f($\mathbf{R_{eD}}$), ces particules seront représentées par des marques de même ordonnée mais d'abscisse différentes.

D'ailleurs, le $\mathbf{C_x}$ quadratique d'une particule peut être déduit facilement d'un point du graphe $\boldsymbol{X}$ = f($\mathbf{R_{eD}}$) puisque $\mathbf{C_{xQuad}} = \boldsymbol{X} / \mathbf{R_{eD}}$…

On peut donc dire qu'un graphe $\boldsymbol{X}$ = f($\mathbf{R_{eD}}$) représente correctement la décantation de l'ensemble des particules possibles dans un fluide donné, même si, par exemple, des particules de même dimension caractéristique **D**, de même surface frontale **S** et de même masse **m** <u>mais de formes différentes, ces formes différentes conduisant cependant au même $\mathbf{C_x}$ quadratique</u>, peuvent être représentées par la même marque sur un graphique $\boldsymbol{X}$ = f($\mathbf{R_{eD}}$).

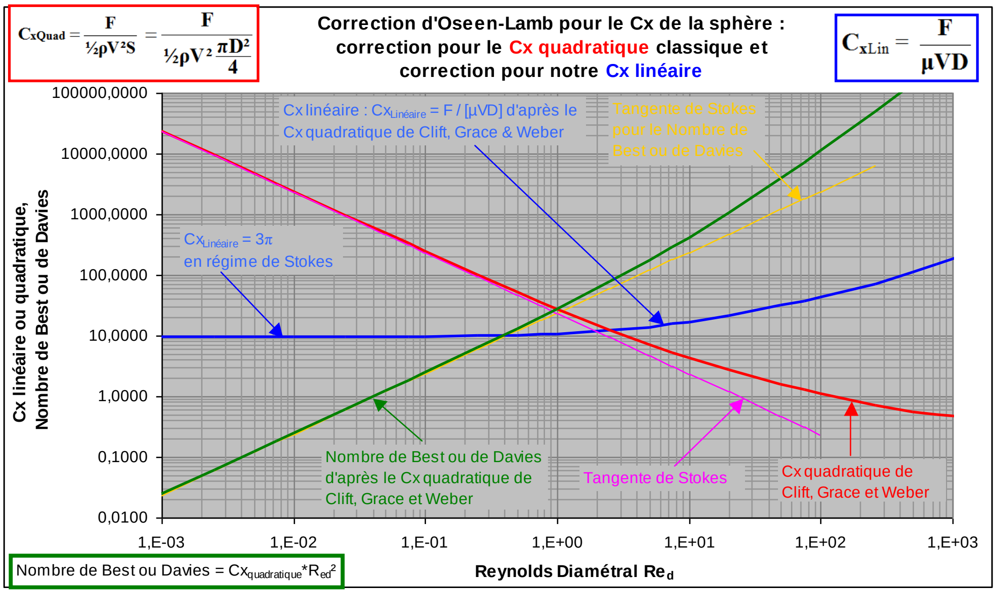
Nous venons à l'instant d'évoquer des corps de caractéristiques identiques (même masse et même surface frontale, par exemple) mais les définitions des ordonnées d'un graphe $\boldsymbol{X}$ = f($\mathbf{R_{eD}}$), à savoir :

$$\boldsymbol{X} = \frac{\mathbf{2mgD^2}}{\boldsymbol{\rho\nu^2}\mathbf{S}} \quad \text{et } \mathbf{R_{eD}} = \frac{\mathbf{VD}}{\boldsymbol{\nu}}$$

…doivent donner lieu à d'autres conjonctions (c.-à-d. des corps différents représentés par une même marque).

Cela ne saurait gêner les météorologues (grands utilisateurs du Nombre de Best ou de Davies) pour lesquels ce ne sont pas les formes des corps qui comptent mais juste leurs propriétés de décantation [263].

Montrons à présent le graphe $\boldsymbol{X}$ = f($\mathbf{R_{eD}}$) représentant la décantation d'une particule comme la sphère (courbe verte ci-dessous) (sans autre précision sur son diamètre, sa Masse Volumique ou les caractéristiques du fluide où cette décantation se produit, nous y revenons à l'instant).



Il peut apparaître troublant que pour dessiner cette courbe verte nous n'ayons aucunement fait appel à la Viscosité Cinématique ni à la Masse Volumique de l'air, ni au poids ou à la Masse Volumique des sphères : nous n'avons fait, conformément à la définition $\boldsymbol{X} = \mathbf{C_{xQuad}\, Re_D}$ du Nombre de Best ou de Davies, que multiplier les ordonnées de la courbe rouge du $\mathbf{C_x}$ quadratique, soit $\mathbf{C_{xQuad}}$ = f($\mathbf{R_{eD}}$), par le carré de ses abscisses [264].

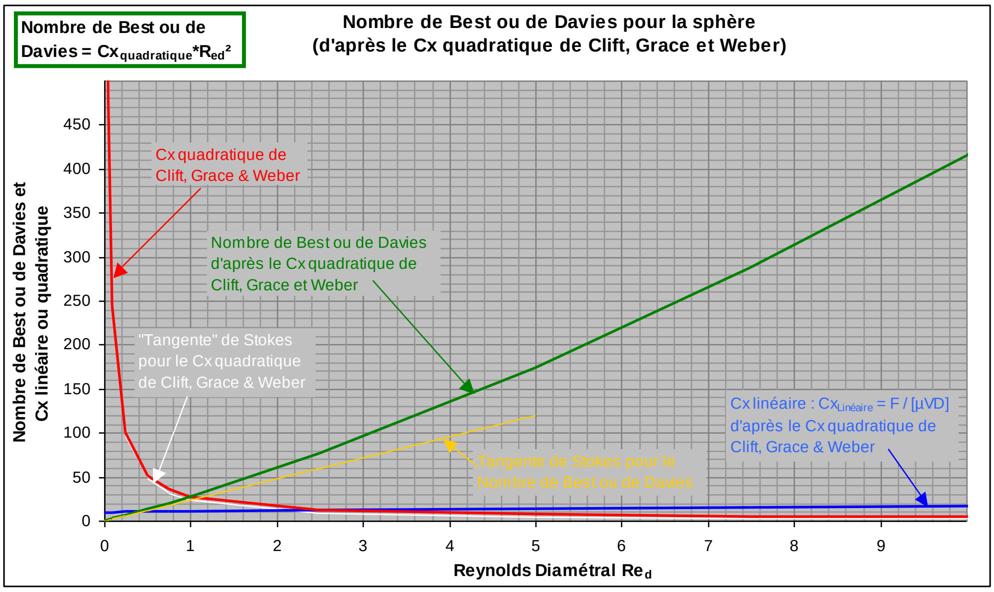
Sur le même graphe, la droite jaune représente ce que serait le Nombre de Best ou de Davies si la sphère demeurait en régime de Stokes aux plus hauts Reynolds (c.-à-d. si les forces d'inertie pouvaient continuer à être négligées) : elle est l'homologue de la fameuse tangente de Stokes fuchsia à la courbe rouge.

---

[263] Les (cristaux de glace) ou hydrométéores solide, par exemple, ne sont étudiés que pour connaître leur nombre, leur masse et leur vitesse de descente dans l'air, soit l'importance de la précipitation.

[264] Pour cette raison, la courbe verte et la courbe rouge se croisent à l'abscisse unitaire.

Voici une autre présentation des même courbes, mais avec cette fois des coordonnées cartésiennes :



Pour plus de visibilité sur ce dernier graphe, la « tangente de Stokes » de la courbe rouge a été dessinée en blanc : en coordonnées cartésiennes ce n'est plus une droite mais une hyperbole d'équation $\mathbf{C_{xQuad} = 24/R_{eD}}$.

Par contre, son homologue la « tangente de Stokes » jaune à la courbe verte reste une droite en coordonnées cartésienne. Son équation est tirée facilement de la définition du Nombre de Best ou Davies et de l'équation de l'hyperbole citée à l'instant :

$$\boldsymbol{X} = \mathbf{C_{xQuad}\ Re_D^{\ 2} = 24\ R_{eD}}$$

On observe que pour la sphère, la simplification de Stokes ne fonctionne plus pour le Nombre de Best ou de Davies au-delà du Reynolds **0,5** à **1** (selon la précision requise).

Une dernière chose qu'il est important de mémoriser est qu'<u>en régime de Stokes</u>, le Nombre de Best ou de Davies de tous les corps possible sera toujours de la forme :

$$\boldsymbol{X} = \mathbf{k\ R_e}$$

…**k** étant un coefficient de proportionnalité constant pour un corps donné et dépendant de la forme de ce corps ainsi que du choix de la longueur sur laquelle le $\mathbf{R_e}$ est basé (en général le diamètre frontal) ; nous venons d'ailleurs de voir que pour la sphère **k = 24**.

L'existence de cette constante **k** est évidemment due au fait qu'en régime de Stokes tous les $\mathbf{C_x}$ quadratiques sont du type $\mathbf{C_{xQuad} = k/R_e}$, nous l'avons vu (et même démontré) suffisamment tout au long de ce texte.

Ce libellé $\boldsymbol{X} = \mathbf{k\ R_e}$, <u>obligatoire en régime de Stokes</u>, fait qu'en coordonnées logarithmiques la courbe du Nombre de Best ou de Davies apparaîtra toujours visuellement, dans la plage de Stokes, sous forme d'une droite de pente unitaire (à une certaine hauteur fonction de **k**). En coordonnées cartésiennes, la même courbe apparaîtra, dans la même plage de Stokes, comme une droite de pente **k** (c'est ce que l'on peut voir dans les deux graphes précédents [265]).

À quoi sert le Nombre de Best et de Davies ?

L'usage que font les spécialistes de la météorologie du Nombre de Best ou de Davies est particulier. Ils ont pu observer une assez précise relation entre ce Nombre et le Reynolds lors de la décantation des cristaux de glace plats et même des grêlons (ou plus généralement les hydrométéores solides ou liquides).

D'après Heymsfield et Kajikawa, cette relation peut être exprimée sous forme d'une loi en puissance, à savoir une loi du type $\mathbf{Re_D = a}\,\boldsymbol{X}^{\mathbf{b}}$, les coefficient **a** et **b** ayant étant déterminés par analyse statistique des vitesses de chute des cristaux et des grêlons pour certaines plages de Reynolds.

Le Nombre de Best ou de Davies ***X*** étant calculable pour chaque type de cristaux, cette loi en puissance donne donc accès au Reynolds d'où il est facile de tirer la vitesse terminal des cristaux.

Nous revenons plus bas sur cette loi en puissance…

Le Nombre de Best ou de Davies et le C_x linéaire :

En remplaçant dans la définition du Nombre de Best et de Davies :

$$\boldsymbol{X} = \mathbf{C_{xQuad}\,Re_D}^2 = \frac{\mathbf{2mgD^2}}{\rho \mathrm{v}^2 \mathbf{S}}$$

… la quantité **mg** (qui vaut la Traînée) par la valeur de cette Traînée en régime de Stokes, soit **μVD** $\mathbf{C_{xLinRéf.D}}$, on dégage facilement pour les cristaux plans à canevas hexagonal :

$$\mathbf{C_{xLinRéf.D}} = \mathbf{0{,}32476}\ \frac{\boldsymbol{X}}{\mathbf{Re_D}}\,\frac{\mathbf{S}}{\mathbf{S_{Hexa}}}$$

…égalité où **D** est la cote entre sommet de l'hexagone servant de canevas au cristal, **S** est la surface frontale du cristal et $\mathbf{S_{Hexa}}$ la surface de l'hexagone qui a servi de *canevas* au cristal. Attention au fait que cette loi de conversion dépend de la forme du corps considéré et du choix des surfaces et de référence et de la longueur de référence du Reynolds.

Comme nous l'avons dit plus haut, Heymsfield et Kajikawa ont proposé, après collecte des vitesses de décantation dans l'air de différents cristaux de glace formés sur un canevas hexagonal, que dans les plages $\mathbf{Re_D < 0{,}10}$ et $\boldsymbol{X} \mathbf{< 1{,}47}$, lesdits cristaux honoraient l'équation :

$\mathbf{Re_D = a}\,\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{b}}$ avec $\mathbf{a = 0{,}0684}$ et $\mathbf{b = 0{,}999}$.

Cette proposition est exposée de façon sans doute plus claire dans ce texte.

---

[265] Dans le deuxième graphe, en coordonnées cartésiennes, la plage de Stokes se trouve évidemment représentée de façon très condensée par rapport à la façon dont la représente un graphe log-log…

En assimilant **0,999** à **1** et en plaçant cette valeur de ***X*** dans l'équation donnant le $\mathbf{C_x}$ linéaire ci-dessus, on trouve alors que le $\mathbf{C_x}$ linéaire ne dépend plus du Reynolds (ce qui est la moindre des choses à ce Reynolds suffisamment faible).

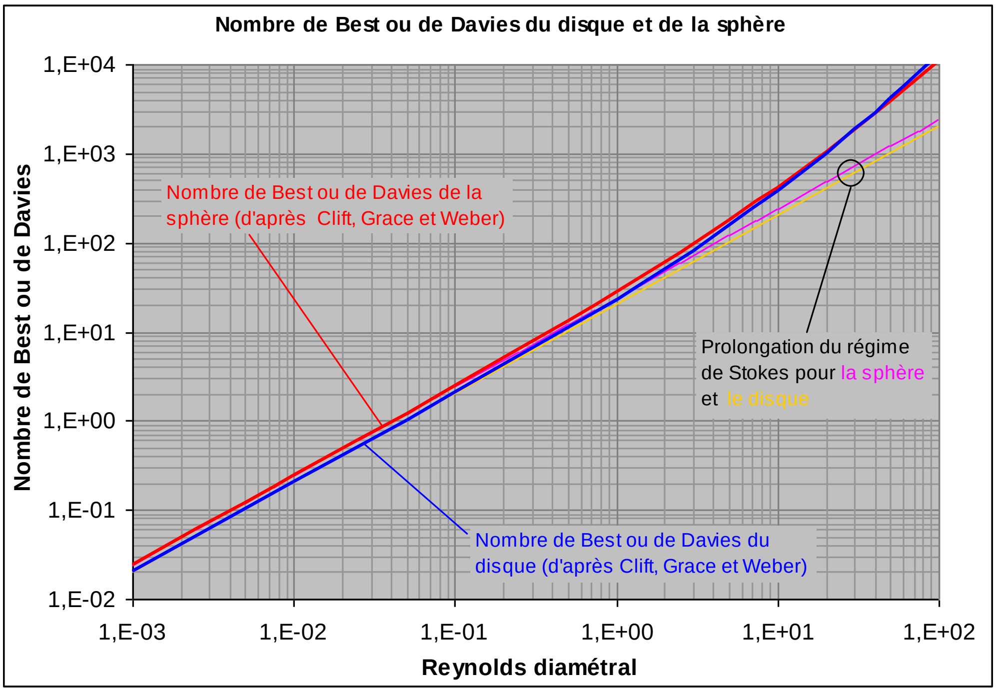
Le $\mathbf{C_x}$ linéaire d'un cristal plan à canevas hexagonal (en référence à **D**, la plus grande dimension du cristal) en ressort alors comme :

$$\mathbf{C}_{\mathbf{x}\mathrm{LinRéf.D}} = \mathbf{4{,}748}\,\frac{\mathbf{S}}{\mathbf{S}_{\mathbf{Hexa}}}$$

…**S** et $\mathbf{S_{Hexa}}$ ayant la signification donnée à l'instant.

Cette loi générale (calée grâce aux mesures de Heymsfield et Kajikawa) prône donc un $\mathbf{C_x}$ linéaire de la plaque mince hexagonale de **4,748**, ce qui nous paraît nettement trop faible [266].

Voici (d'après Clift, Grace et Weber) la comparaison du Nombre de Best ou de Davies de la sphère et du disque en-dessous du Reynolds **100** [267] :



Dans le cercle noir passent les prolongations du Nombre de Best établies en régime de Stokes pour la sphère et le disque : On note que l'erreur qui consisterait à considérer ces deux particules comme en régime de Stokes croît notablement à partir du Reynolds unitaire pour devenir prohibitive.

Au vu de ce dernier graphe, on comprend assez facilement la possibilité, pour les météorologues, de représenter, dans une plage de Reynolds donnée, les courbes par une loi en puissance du type $\mathbf{Re_D = a}\,X^{b}$: Dans la plage de Reynolds concernée, cette

---

266 Nous ne pouvons cependant nous ériger en censeur : il est possible que ce $\mathbf{C_x}$ linéaire tienne compte de la concentration des cristaux au moment de leur chute, même si, à l'origine, ces cristaux (ou leurs modèles métalliques) ont bien été mesurés isolément dans des cuves à décantation par Jayaweera (nous avons d'ailleurs relaté ces mesures).

267 Au-dessus de ce Reynolds **100**, le disque libre est sujet à oscillations qui augmentent la moyenne temporelle de sa Traînée.

loi en puissance assimile la courbe $X =$ f(R_{eD}) à une droite osculatrice, une facette, le paramètre **a** donnant la hauteur de cette facette et l'exposant **b** sa pente.

Ainsi, pour les cristaux de glace dont la surface frontale est supérieure à **60 %** de la surface de l'hexagone de même diamètre **D**, Beard et Heymsfield découpent dans leur texte, les abscisses en quatre plages :

$R_{eD} < 0,1$

$0,1 < R_{eD} < 3,5$

$3,5 < R_{eD} < 10,4$

$R_{eD} > 10,4$.

Pour chacune de ces plages, ils proposent évidemment une certaine loi en puissance, par exemple $Re_D = a X^b$ avec **a = 0,0684** et **b = 0,999** comme indiqué précédemment.

Dans leur texte de 2001, Khvorostyanov et Curry explicitent une méthode de la même veine donnant la vitesse de chute de diverses particules selon leur dimension caractéristique. Pour les plaques minces hexagonales, leurs propositions conduisent, en régime de Stokes, à un C_x linéaire (en référence cote **D** entre sommet opposés) de **2,87**, ce qui est forcément trop faible, du moins pour des plaques minces hexagonales en décantation solitaire…

Le problème c'est que les mêmes calculs de Khvorostyanov et Curry, appliqués à des gouttes sphériques de taille telle qu'elles décantent en régime de Stokes conduit à un C_x linéaire de telles sphères, en régime de Stokes, de **9,4124**, soit, à moins d'un millième près, la valeur 3π.

Les mesures d'Heiss & Coull, Pettyjohn & Christiansen et Malaika citées par G. Carmichael ainsi que mesures d'autres :

G. Carmichael cite, dans son texte, un ensemble de mesures des caractéristiques de Traînées de diverses particules en régime de Stokes, mesures effectuées par divers auteurs.

S'agissant des expériences de Pettyjohn & Christiansen exploitées par Carmichael, Happel & Brenner écrivent :

« [Pettyjohn et Christiansen] étudièrent la décantation en régime de Stokes du tétraèdre, du cube, de l'octaèdre et du cuboctaèdre et constatèrent que la vitesse de ces corps est indépendante de leur orientation, ceci dans les limites de précision de leurs expériences estimées à **0,5 %**. Toutes ces particules, libérées dans le fluide avec une orientation aléatoire, ne montrèrent aucune tendance à la rotation ni aucune tendance à se caler dans une position particulière par rapport à leur direction de chute qui, de plus, se révéla verticale. »

Nous ne savons pas comment les mesures ont été exprimées par l'ensemble de ces auteurs, mais Carmichael les a exprimées sous la forme du quotient de vitesses de décantation :

$$K = V_p / V_{sphéq}$$

…où V_p est la vitesse de décantation de la particule et $V_{sphéq}$ est la vitesse de décantation de la sphère de volume équivalent à celui de la particule (et bien-sûr de même Masse Volumique).

Comme la vitesse de décantation d'une particule est **F/(μ L $C_{xlin\ réf.L}$**) et que la vitesse de décantation de la sphère équivalente est **F/(μ $D_{éq}$ 3π**), **F**, le poids efficient étant le même dans les deux cas, on peut écrire :

$$K = \frac{D_{éq} 3\pi}{L C_{xlin\ réf.L}}$$

On note que, à volume de particule donnée, le coefficient **K** choisi par Carmichael sera d'autant plus fort que le C_x linéaire sera faible : Ce coefficient **K** est donc plutôt un *coefficient adimensionnel de célérité.*

De l'équation précédente on peut tirer :

$$C_{xlin\ réf.L} = \frac{3\pi D_{éq}}{KL}$$

À ce stade, la longueur de référence **L** n'a pas encore été choisie.

Le diamètre $D_{éq}$ de la sphère de même volume **Vol** que la particule est, quant à lui :

$$D_{éq} = \sqrt[3]{\frac{6Vol}{\pi}}$$

Carmichael écrit aussi, en présentant son coefficient **K** :

$C_{xQuad} = 24 / R_e K$

Il faut lire :

$C_{xQuad} = 24 / (R_e K)$

…de sorte que $K = (24/R_e) / C_{xQuad}$ et que **K** soit un *coefficient adimensionnel de célérité* (plus le C_x quadratique d'un corps est fort et plus ce coefficient de célérité **K** est faible).

Au reste nous n'avons pas utilisé cette définition de **K**.

Les valeurs de **K** citées par Carmichael le sont sous la forme de nombres de deux chiffres allant de **0,67** à **1** pour la sphère.

Cette écriture promet une précision de **± 5 %**.

La référence à la vitesse de la sphère équivalente qu'expriment ces valeurs de **K** atténue les écarts entre elles (pour les différents corps) (**33 %** au maximum) [268] ; cependant, les C_x linéaires (en référence **D** ou **c**, nous y revenons à l'instant) que nous en avons tirés sont parfois plus distants (**73 %** d'écart maximal).

[268] Ceci peut être considéré comme un avantage pour certains usages.

Il est aisé de transformer le tableau de valeurs de **K** donné par Carmichael en tableau de **C_x** linéaires. Nous allons néanmoins indiquer dans une colonne le coefficient **K** indiqué par le même Carmichael.

La longueur de référence choisie dans la colonne de **C_x** linéaire sera tantôt **D,** le diamètre équatorial des ellipsoïdes [269] ou le diamètre des cylindres ou sphères, tantôt le côté **c** de la base carrée des prismes, tantôt l'arête **a** des octaèdres, cuboctaèdre et tétraèdre :

[269] Le diamètre équatorial d'un ellipsoïde aplati ou allongé est son diamètre non touché par son aplatissement ou son allongement (penser à la Terre qui est aplatie aux pôles et circulaire à l'équateur).

Expérimentateur(s)	Corps	Élancement	K mesuré	C_x linéaire
Malaika	**Cylindre circulaire :**	4	0,78	21,956
Malaika	**Cylindre circulaire :**	1	0,96	11,238
Malaika	**Cylindre circulaire :**	0,25	0,76	8,943
Malaika	**Prisme à base carrée :**	4	0,76	24,424
Malaika	**Prisme à base carrée :**	1	0,92	12,710
Malaika	**Prisme à base carrée :**	0,25	0,71	10,375
Malaika	**double cône :**	4	0,75	15,833
Malaika	**double cône :**	1	0,94	7,958
Malaika	**double cône :**	0,25	0,67	7,033
Malaika	**ellipsoïde :**	4	0,79	15,584
Malaika	**ellipsoïde :**	1	1	1,000
Malaika	**ellipsoïde :**	0,25	0,73	6,524
	Parallélépipède section carrée			
Heiss & Coull	Déplacement axial :	0,25	0,72	10,231
Heiss & Coull	Déplacement axial :	0,5	0,84	11,049
Heiss & Coull	Déplacement axial :	1	0,93	12,573
Heiss & Coull	Déplacement axial :	2	0,96	15,347
Heiss & Coull	Déplacement axial :	3	0,97	17,386
Heiss & Coull	Déplacement axial :	4	0,92	20,176
	Parallélépipède section carrée			
Heiss & Coull	Déplacement transverse :	0,25	0,87	8,467
Heiss & Coull	Déplacement transverse :	0,5	0,93	9,980
Heiss & Coull	Déplacement transverse :	1	0,93	12,573
Heiss & Coull	Déplacement transverse :	2	0,86	17,131
Heiss & Coull	Déplacement transverse :	3	0,82	20,567
Heiss & Coull	Déplacement transverse :	4	0,76	24,424
	Cylindre circulaire :			
Heiss & Coull	Déplacement transverse :	0,25	0,91	7,469
Heiss & Coull	Déplacement transverse :	0,5	0,96	8,920
Heiss & Coull	Déplacement transverse :	1	0,94	11,477
Heiss & Coull	Déplacement transverse :	2	0,88	15,446
Heiss & Coull	Déplacement transverse :	3	0,81	19,210
Heiss & Coull	Déplacement transverse :	4	0,76	22,534
	Cylindre circulaire :			
Heiss & Coull	Déplacement axial :	0,25	0,76	8,943
Heiss & Coull	Déplacement axial :	0,5	0,86	9,957
Heiss & Coull	Déplacement axial :	1	0,96	11,238
Heiss & Coull	Déplacement axial :	2	0,97	14,013
Heiss & Coull	Déplacement axial :	3	0,96	16,208
Heiss & Coull	Déplacement axial :	4	0,93	18,415
	Ellipsoïde :			
Malaika	Déplacement équatorial :	0,25	0,91	6,524
Malaika	Déplacement polaire :	4	0,96	15,584
Pettyjohn & Christiansen	**Cuboctaèdre :**	1	0,97	11,344
Pettyjohn & Christiansen	**Octaèdre :**	1	0,92	6,995
Pettyjohn & Christiansen	**Tétraèdre :**	1	0,84	8,359

Les valeurs de **K** du bas (en vert) ont été rectifiées à l'occasion d'un correctif de Carmichael.

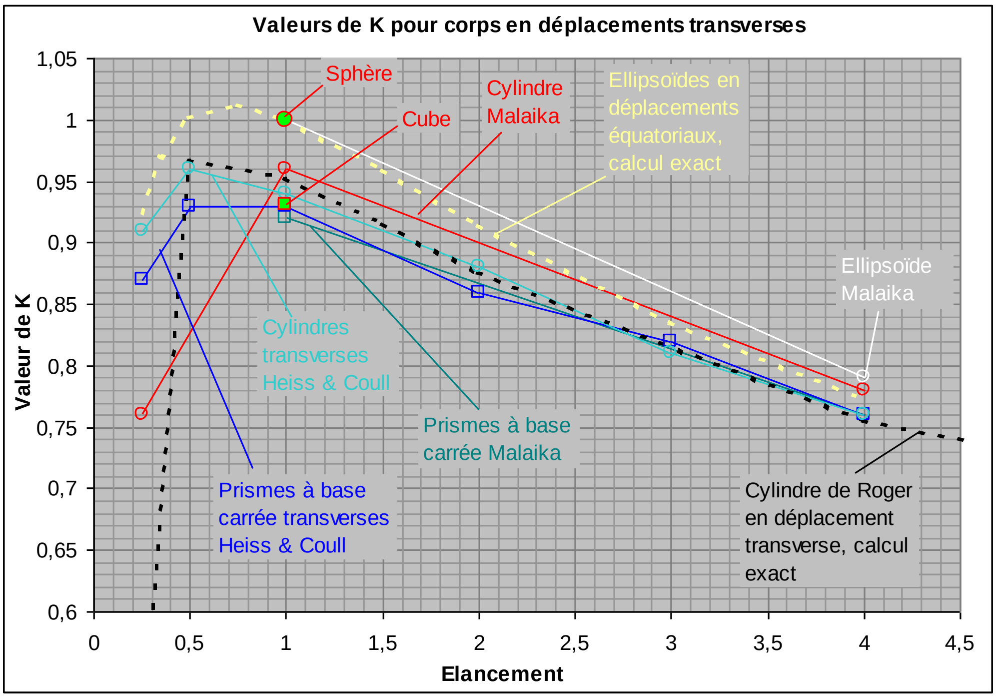
Pour les valeurs de **K** en rouge (dues à Malaika), nous avons des problèmes de compréhension : Carmichael écrit : « Quant aux données de Malaika, toutes les mesures ont été faites avec la surface projetée maximale perpendiculaire à l'écoulement. »

Nous en tirons la conclusion que les bicônes d'élancements **1** et **0,25** ont été mesuré en déplacements axiaux et que le bicône d'élancement **4** a été mesuré en déplacement transverse.

D'autre part, nous le verrons d'après nos courbes, l'ellipsoïde d'élancement **0,25** de Malaika a été mesuré en écoulement axial et son ellipsoïde d'élancement **4** en déplacement transverse (ou équatorial) [270].

.

Voici une mise en panorama des valeurs de **K** pour des corps en déplacements transverses :



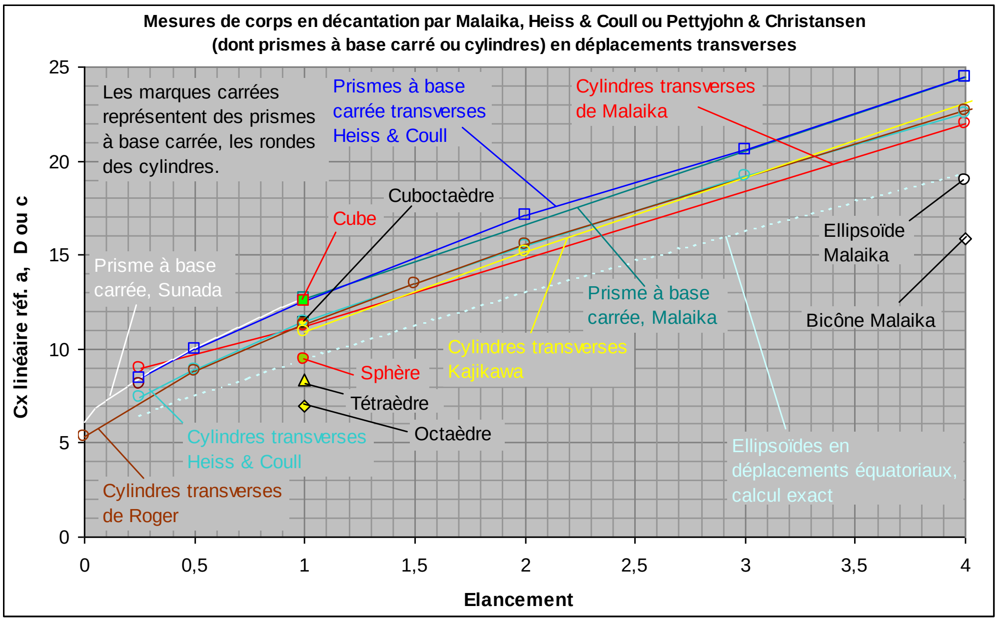
Nous avons joint à ce panorama les valeurs de **K** trouvées par calculs exacts pour les ellipsoïdes (Oberbeck, courbe jaune tiretée) et pour les cylindres de Roger (courbe noire tiretée), ces deux types de corps étant bien-sûr en déplacements transverses.

À notre sens, ce panorama n'est guère pratique, même s'il prouve que les relevés des expérimentateurs sont dans le bon ordre de grandeur des calculs exacts.

Nous préférons la mise en panorama des $\mathbf{C_x}$ linéaires, ci-dessous lors des déplacements transverses :

---

[270] Il convient cependant de rappeler que nous n'avons eu accès qu'à la première page des texte de Carmichael.



Cette mise en panorama montre mieux, selon nous, le remarquable accord entre les valeurs expérimentales et les calculs des mathématiciens.

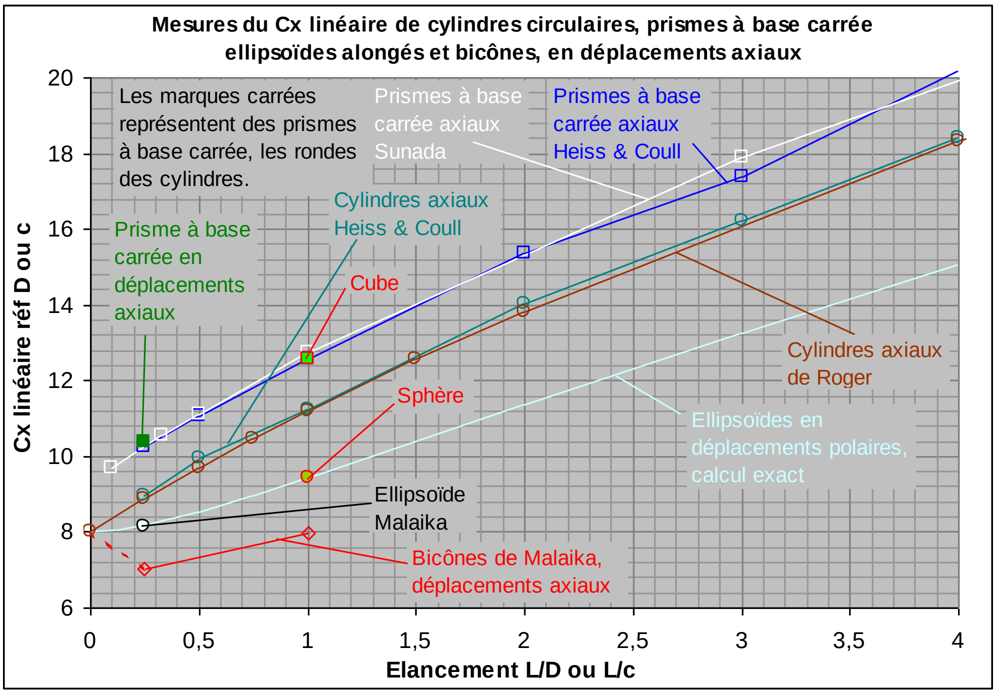
Ce même panorama montre également que le $\mathbf{C_x}$ linéaire des prismes à base carrée (référence côté **c** de la base) est un peu plus fort (marques carrées) que celui des cylindres (marques rondes) (nous le mesurons plus fort de **7,7 %** pour les élancements **2** et **4**). Cette tendance pourrait bien se conserver pour les élancement plus forts (l'influence des extrémités s'y faisant peu à peu négligeable), de sorte que le $\mathbf{C_x}$ linéaire d'un long prisme à base carré pourrait être estimé à **1,077 fois** celui d'un bâtonnet cylindrique de Cox (ou mieux : de Roger) de même élancement et dans les mêmes déplacements transverses.

En jaune sur le même graphe apparaissent les mesures de décantation de cylindres réalisées par Kajikawa.

Toujours sur le même graphe, apparaissent à l'élancement unitaire les $\mathbf{C_x}$ linéaires (en référence leur arête **a**) des octaèdre et tétraèdre, le $\mathbf{C_x}$ linéaire du cuboctaèdre (**11,34**, également en référence **a**) étant caché par celui du cylindre d'élancement unitaire. On note également les $\mathbf{C_x}$ linéaires de la sphère et du cube.

Tous ces derniers corps font d'ailleurs montre d'une isotropie sphérique [271], c.-à-d. qu'ils présentent la même Traînée dans toutes les positions. Nous aurions donc pu les faire figurer dans le panorama suivant qui montre les $\mathbf{C_x}$ linéaires des corps pris en compte par Carmichael en déplacements axiaux :

[271] c.-à-d. qu'ils décantent « verticalement sans tourner et à la même vitesse dans toutes les orientations, comme la sphère ».



À nouveau, ce panorama fait honneur aux expérimentateurs et aux mathématiciens).

S'agissant de ces corps en déplacements axiaux, nous mesurons, entre les élancement **2** et **4** que les prismes à base carrée présentent un $\mathbf{C_x}$ linéaire **10 %** plus fort que les cylindres de Roger [272]. Ce constat pourrait valoir pour les élancements un peu plus forts.

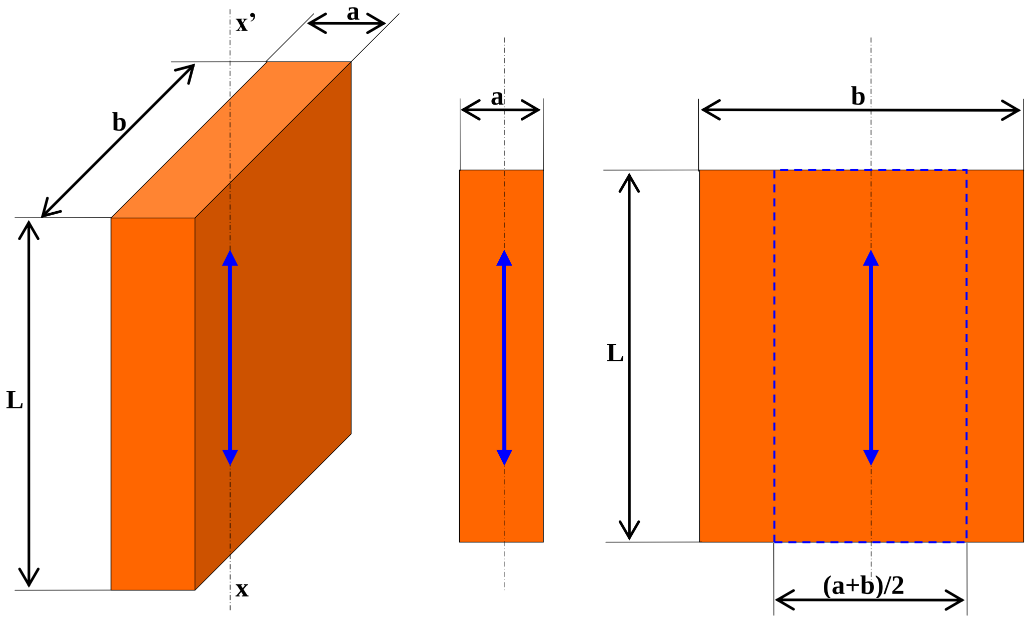
En rouge est la courbe des bicônes de Malaika d'élancement **0,25** et **1** en déplacements axiaux. Cette courbe est prolongée ici vers le disque en déplacement frontal (ou axial). [273]

Prismes à base rectangulaire (mesures de Sheaffer) :

Nous avons vu plus haut que Bowen et Masliyah jugent valide le principe qu'un prisme droit à base rectangulaire (non carrée, donc) peut être assimilé à un prisme *à base carré équivalente* pourvu que l'on prenne comme *base carrée équivalente* celle de périmètre valant la moyenne arithmétique des deux périmètres (minimal et maximal) constatés, normalement à l'axe du mouvement, sur le prisme à base rectangulaire

[272] On doit se remémorer qu'un carré offre un périmètre **27 %** plus fort que le cercle de même *diamètre*.

[273] John R. L. Allen indique dans son ouvrage « DEVELOPMENTS IN SEDIMENTOLOGY, Sedimentary structures, their character ans physical basis, Vol 1 » que les doubles cônes symétriques décantent de façon stable dans n'importe quelle orientation en régime de Stokes, mais cela ne dit pas que leur Traînée soit la même dans toutes ces orientations.



Ce libellé, nous l'avons déjà dit, est assez sibyllin. Après calculs [274], nous le comprenons comme ceci :

La Traînée axiale d'un prisme droit à base rectangulaire est assez proche de celle d'un prisme droit à base carrée de même longueur (mesurée parallèlement au mouvement) et de même périmètre **2(a+b)** que la base rectangulaire.

Bien sûr, cette approche tend à considérer que l'essentiel de la Traînée est due à l'effet de la viscosité sur les faces latérales *mouillées* (qui, dans les deux cas, totalisent une aire de **2L(a+b)**. Une telle approche tend également à minimiser l'importance de la Traînée des faces d'extrémités (les deux faces frontales) : soit que leur Traînée soit alors négligeable, soit qu'un dispositif lié aux équations de Stokes fasse que leur Traînée frontale est compensée par une moindre Traînée des faces latérales…

Nous verrons que cette assimilation d'un parallélépipède rectangle à un prisme à base carrée donne de meilleurs résultats pour les prismes rectangulaires dont le rapport des côtés de la base est assez proche de l'unité (ces prismes rectangulaires étant alors assez proches des prismes à base carrée).

Exploitation des mesures de Sheaffer :

Alan Wayne Sheaffer a effectué des mesures de décantation de prismes rectangulaires, troués ou non, écornés ou non, dans différents liquides newtoniens.

Pour exprimer ses résultats, il donne pour chaque particule un « facteur de forme » **K** honorant l'équation suivante :

$$\mathbf{F} = \frac{3\pi\,\mu V D_s}{K}$$

…équation où **F** est la Traînée de la particule, **V** sa vitesse stabilisée, **µ** la viscosité dynamique du fluide et $\mathbf{D_s}$ le diamètre de la sphère ayant le même volume que la particule.

On peut tirer de l'équation précédente :

[274] Voir ces calculs plus haut.

$$\frac{F}{\mu V D_s} = \frac{3\pi}{K}$$

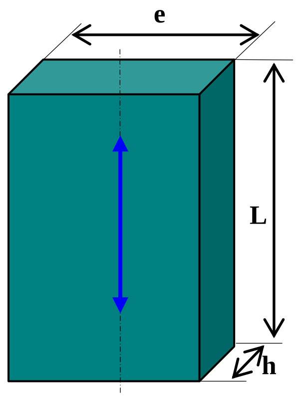
…et reconnaître dans le premier membre de l'égalité la définition du $\mathbf{C_x}$ linéaire en référence $\mathbf{D_s}$. On en tire le $\mathbf{C_x}$ linéaire de la particule en référence à cette longueur $\mathbf{D_s}$:

$$\mathbf{C_{xLin\ Réf.D_S} = 3\ \pi/K}$$

Ce n'est d'ailleurs pas cette longueur de référence $\mathbf{D_s}$ que nous utiliserons ; mais nous y revenons à l'instant.

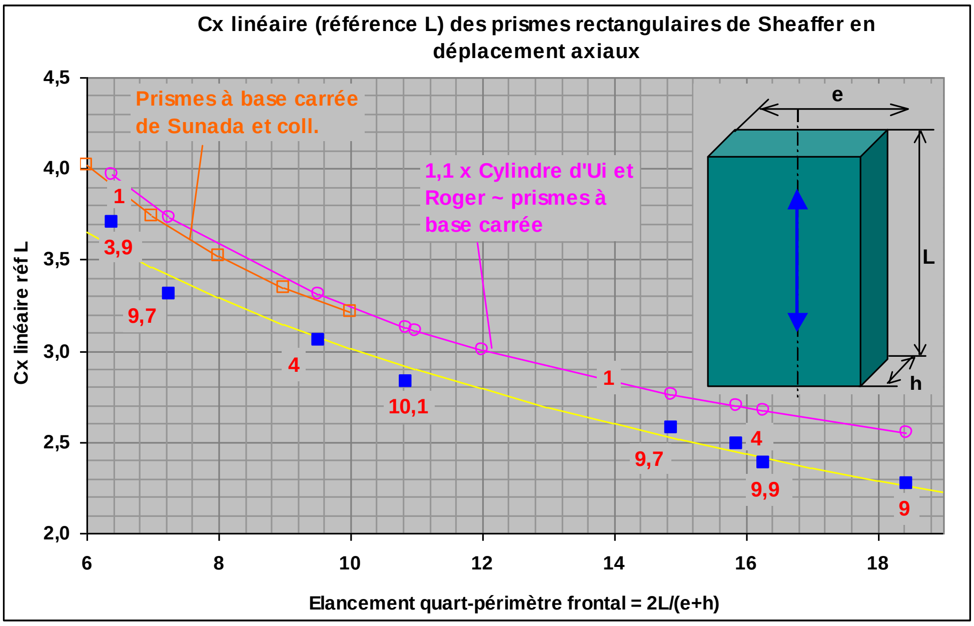
<u>Prismes de Sheaffer en déplacement axiaux :</u>

Les prismes de Sheaffer ont été essayés chacun dans les trois directions possibles. Dans un premier temps, intéressons-nous aux résultats dégagés par Sheaffer pour son jeu de prismes lors de déplacement axiaux (dans les sens de la flèche bleue ci-dessous) :



Il est facile, nous l'avons dit, de tirer des valeurs de **K** de Sheaffer le $\mathbf{C_x}$ linéaire en référence $\mathbf{D_s}$ (le diamètre de la sphère de même volume). Cependant ce n'est pas cette longueur de référence que nous allons utiliser à présent mais la Longueur **L** des prismes.

Voici la mise en panorama du $\mathbf{C_x}$ linéaire, référence **L**, des prismes de Sheaffer en décantation axiale (c.-à-d. selon une direction parallèle à leur plus grande dimension **L** (ce sont les marques bleu dense) :



Comme abscisses de ce graphe, nous avons opté pour un nouvel élancement défini comme **L/(p/4)**. **L** est la longueur du prisme, et **p** est le périmètre **2(h+e)** de la section frontale du même prisme.

Nous nommerons cet élancement l'*élancement quart-périmètre frontal* ou *l'élancement **p/4***.

Notons que cet élancement redevient l'élancement *classique* pour les prismes à base carrée.

Les marques bleu dense du graphe sont peu ou prou alignées (la régression jaune est proposée par notre tableur pour ces marques). Mais ce serait une erreur de s'intéresser à cette régression jaune qui cherche à moyenner des corps par trop différents. Les nombres rouges accolés à ces marques expriment en effet le rapport **e/h** des côtés de la section frontale des prismes. Nous nommerons *allongement* ce rapport :

Comme on le voit, cet allongement va de **3,9** à **10,1**, ce qui montre que les prismes de Sheaffer sont assez différents de prismes à base carré (pour lesquels l'allongement vaut **1**.

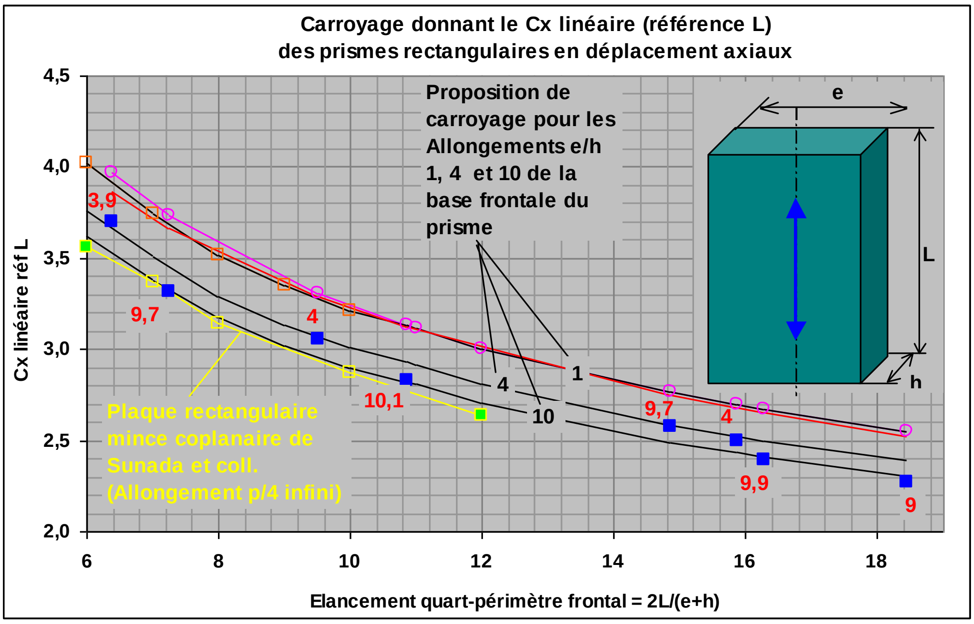
L'une des marques apparaît mal placée en ordonnée (par rapport à l'allongement de sa section frontale) : la marque à l'abscisse **14,9** qui annonce un allongement de **9,7**…

Par chance, les travaux de Sunada et coll. nous ont apporté le C_x linéaire du prisme à base carrée en mouvement axial à divers *élancements quart-périmètre* (ou élancement *classique*, cela revient au même pour ce type de corps). Nous les avons portés en orange à marques carrées orange sur le graphe.

Pour les élancements plus fort que **10**, nous n'avons pas de C_x linéaires pour le prisme à base carrée, mais, ainsi que nous l'avons fait remarqué plus haut à propos des prismes à base carrée de Malaika et d'Heiss & Coull, le C_x linéaire des cylindre d'Ui er Roger augmenté de **10 %** peut constituer une bonne approximation du prisme à base carrée : c'est la courbe fuchsia à marques rondes sur le graphe.

L'observation de ce graphe incite à penser qu'il existe un échelonnement vertical du C_x linéaire des prismes de Sheaffer selon l'allongement de leur section frontale.

On est alors conduit à dessiner sur le graphe une proposition de *carroyage* indiquant les allongements ronds **1**, **4** et **10**.



Nous avons laissé les mentions rouges des allongements pour que chacun puisse juger du réalisme de notre échelonnement : il n'y a guère que l'allongement **9,7** et, à un moindre titre, l'allongement **9** qui ne respectent pas notre carroyage noir.

Sur le même graphe apparaît en jaune le $\mathbf{C_x}$ linéaire (en référence **L** également) des plaques rectangulaires minces de Sunada et coll. (traitées ici) : ces plaques, qui peuvent passer pour immatérielle (elles n'ont pas d'épaisseur, nous y reviendrons) peuvent néanmoins facilement figurer dans ce panorama. La courbe jaune indique donc bien le $\mathbf{C_x}$ linéaire, en décantation axiale (et toujours référence **p/4**), des prismes dont l'allongement **e/h** de la section frontale est infini (noter que seules les marques à cœur vert proviennent directement des calculs de Sunada et coll., les autres -les marques jaunes creuses- sont des interpolations qui apparaissent ici comme fautives).

Ce résultat est encourageant (au moins à pour nous).

Mais Sheaffer a également mesuré la décantation des mêmes prismes rectangulaires dans les deux autres orientations (parallèlement au côté de longueur **e** et parallèlement au côté de longueur **h**).

Nous avons eu l'idée de représenter sur le même graphe les $\mathbf{C_x}$ linéaires des prismes de Sheaffer dans leurs trois orientations.

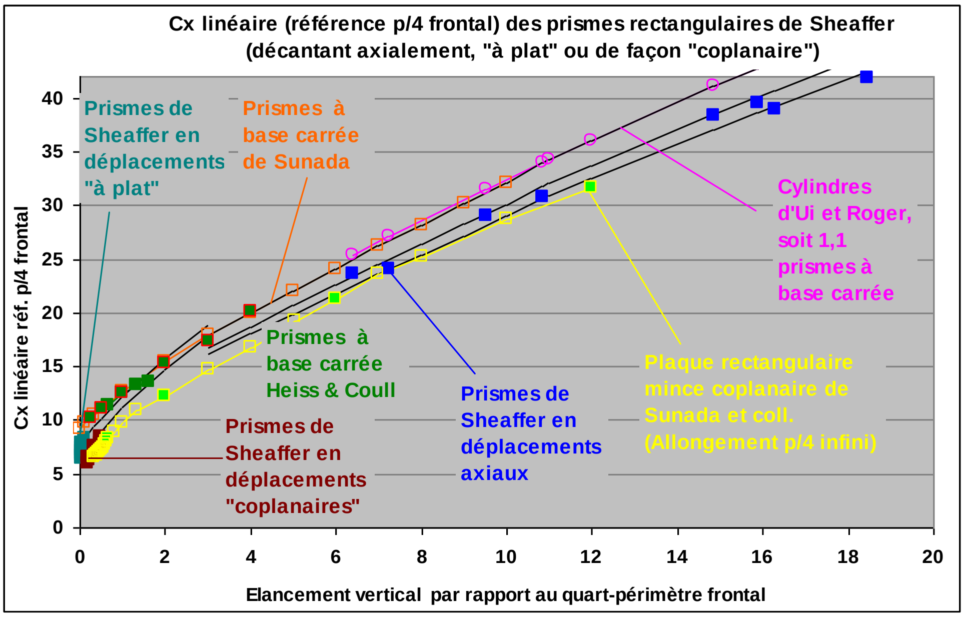
Pour ce faire, nous avons choisi pour ces $\mathbf{C_x}$ une nouvelle longueur de référence (nouvelle pour ce texte) : le quart de la longueur du périmètre frontale des prismes.

Rappelons que, comme toujours en Mécanique des Fluides, le choix de la longueur de référence (en régime de Stokes) ou de la surface de référence (pour les autres régimes) est totalement libre ; la seule condition imposée est que ce choix soit toujours précisé.

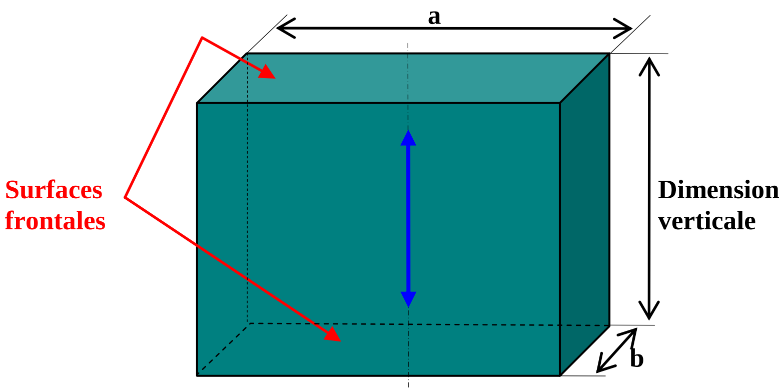
Nous abrègerons le nom de cette nouvelle longueur de référence en *quart-périmètre* ou encore en **p/4**, le périmètre en question étant celui des faces frontales du prisme dans son mouvement (face frontale avant ou arrière, qui sont de mêmes dimensions).

Il faut encore noter que pour les prismes à base carrée, cette longueur de référence redevient le côté du carré.

Voilà la mise en panorama du $\mathbf{C_x}$ linéaire des prismes de Sheaffer décantant dans les trois directions possibles :

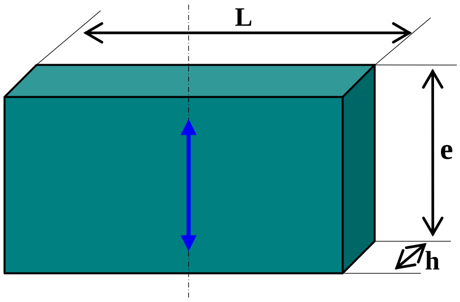


Les abscisses choisies ici sont l'élancement vertical des prismes, à savoir le quotient de leur dimension verticale (la décantation se faisant bien sûr verticalement) par le quart du périmètre (soit **(a+b)/2**) qu'offre chacune des deux surfaces frontales des prismes :

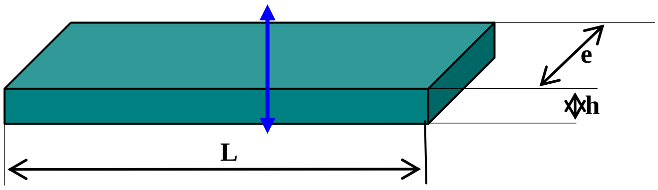


Comme indiqué sur le graphe, les marques bleu dense représentent les prismes en déplacements axiaux (de même que précédemment, mais avec ici la nouvelle longueur de référence).

En marron sont les marques représentant les prismes de Sheaffer décantant en une position que nous avons nommée « coplanaire » (schéma ci-dessous), c.-à-d. parallèlement à leur côté de dimension moyenne **e**, leur plus grande dimension (que nous avons parfois nommé *axe*) étant horizontale :



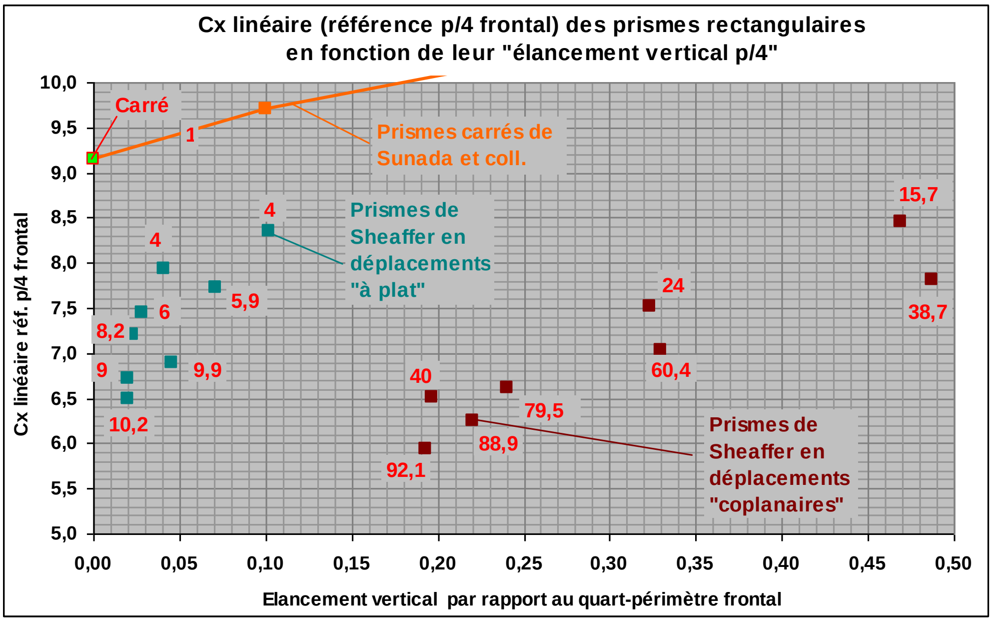
En bleu glauque sont les marques représentant les prismes de Sheaffer en un mouvement que nous avons nommé « à plat », ce mouvement se faisant parallèlement à **h**, leur plus courte dimension :



Sur le même graphe, les marques vertes correspondent aux prismes à base carrée mesurés par Heiss & Coull.

Ce même graphe semble dresser un portrait assez significatif de tous ces prismes, même si les abscisses et ordonnées choisies sont originales.

Effectuons un zoom sur la partie gauche et basse de ce graphe :

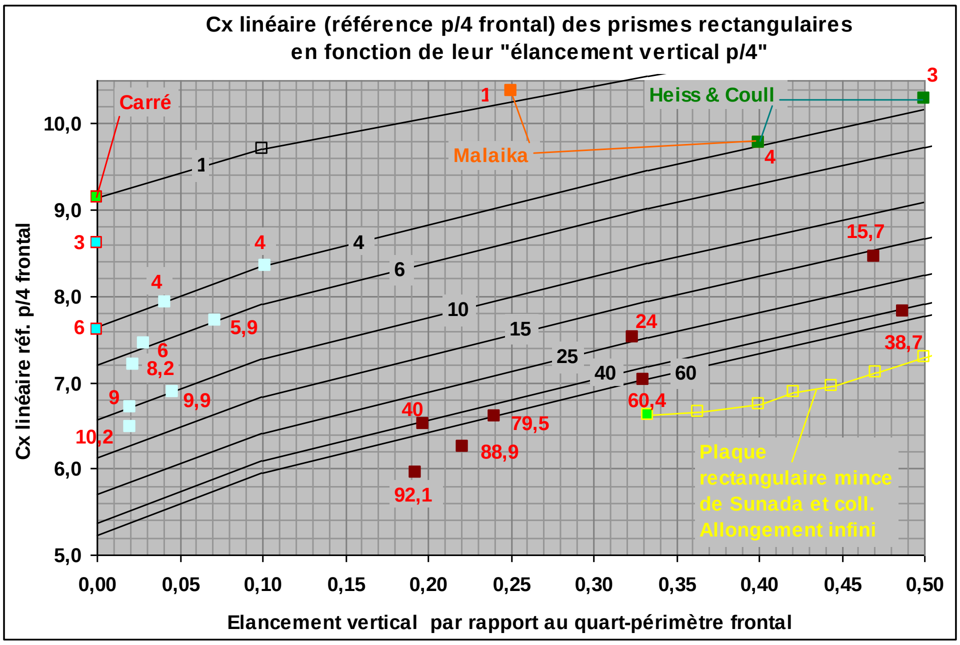


Sur ce même graphe nous avons fait apparaître en orange le C_x linéaire (réf. **p/4** ou **c**) des prismes à base carrés de Sunada et coll. (traités ici) décantant axialement.

L'allongement de la section frontale de ces prismes est évidemment **1** et reste constant lorsque leur élancement (**p/4** ou *classique*) devient plus fort [275].

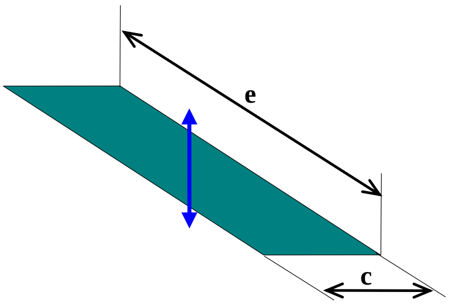
Comme sur le graphe précédent, les deux jeux de marques bleu glauque et marron semblent faire bande à part. Mais l'observation des nombres rouges indiquant l'allongement de leur section frontale est édifiante : ces nombres rouges semblent bien organiser la constellation de toutes les marques, les plus forts allongements se plaçant plus bas.

De sorte que vient naturellement l'idée de carroyer le plan de ce graphe comme suit :



Le lecteur pourra observer de lui-même que très peu de marques se montrent rebelles à cette organisation du plan.

Les cas de rébellion les plus troublants sont ceux des marques carrée bleu clair ceints de rouge sur l'axe des ordonnées : ce sont deux marques représentant les plaques rectangulaires minces de Sunada et coll. en déplacement frontaux, d'allongement **e/c 3** et **6** :



Ces plaques, comme le disque circulaire mince ou le carré mince (celui-ci également présent sur le graphe), sont immatérielles : leur épaisseur est nulle. Elles n'ont donc pas de volume et par là-même, disons-le au passage, elles échappent à toutes

[275] Les élancements étudiés par Sunada et coll., du moins dans la plage qui nous intéresse, sont **0,1**, **0,333** et **0,5**.

possibilités d'être décrites à partir d'une sphère de volume équivalent (ce qui a été le critère de Sheaffer) [276].

Cependant, contrairement à ce que l'on pourrait craindre compte tenu de l'immatérialité de ces plaques, elles peuvent tout à fait figurer sur notre graphe.

En effet, comme on le voit sur le schéma ci-dessus, même si elles n'ont pas d'épaisseur et de volume, elles ont quand même un périmètre frontal (c'est **2(e+c)**).

Leur élancement vertical **p/4** nul (puisque leur épaisseur est nulle) les placent alors sur l'axe des ordonnées.

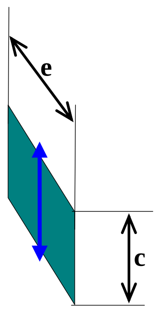
Bizarrement, ces deux marques essentielles (puisque nous prenons les travaux de Sunada et coll. comme donnant les $\mathbf{C_x}$ linéaires vrais) sont un peu plus hautes que nos *carroyages* tendraient à les placer : ces carroyages sont-ils erronés dans leur partie gauche ?

Autrement dit, ces mêmes carroyages devraient-ils présenter un petit crochet vers le haut à l'approche de l'axe des ordonnées ?

Nous ne savons que dire, si ce n'est que la courbe du prisme à base carrée en déplacement axial (courbe qu'à reprise notre carroyage pour l'allongement **1**) ne montre pas de crochet !

La courbe jaune sur le graphe précédent est très intéressante : Elle représente le comportement des plaques rectangulaires de Sunada et coll. entre les élancement **e/c 3** et **6** en déplacement coplanaire.

Pour un tel déplacement, on est dans la situation suivante :



Ces plaques minces sont toujours immatérielles, mais cela n'empêche qu'elles possèdent un périmètre frontal (c'est **2 e**) [277] et un élancement vertical quart-périmètre (c'est **c/(e/2)**, soit **2/λ** si **λ** est l'élancement **e/c** de la plaque) ; ce qui donne ici **0,666** et **0,333**.

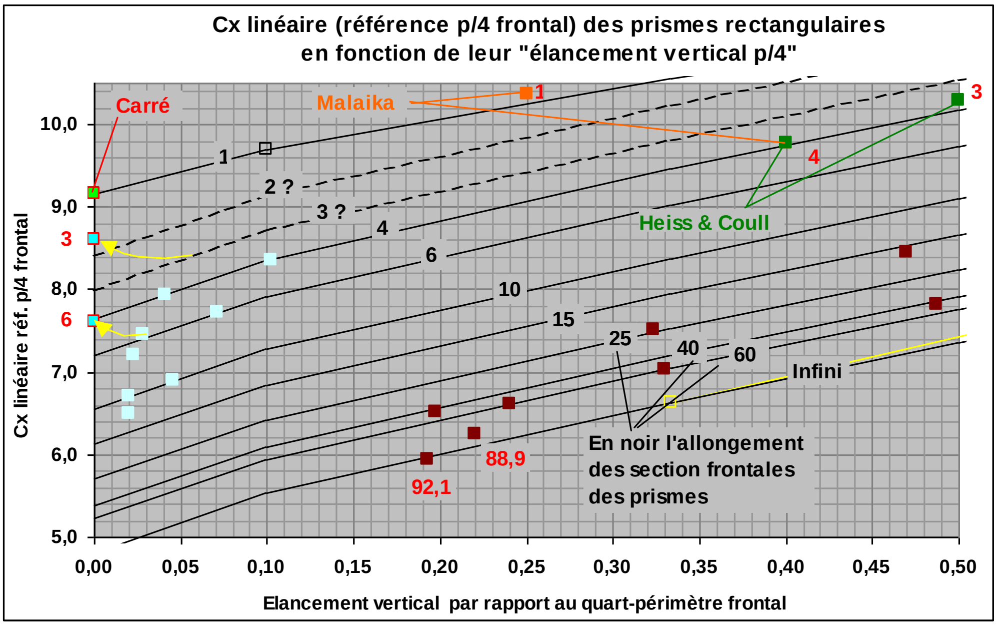
Noter que seule la marque carrée jaune à cœur vert fluo pour l'Élancement **p/4 = 0,333** vient directement des calculs de Sunada et coll..

Pour ces plaques minces, nous avons opté pour un allongement infini de leur section frontale : nous avions le choix entre l'allongement **zéro** (c.-à-d. **ε/e**, si **ε** est l'épaisseur infiniment faible de la plaque) et l'allongement **infini** (c.-à-d. **e/ε**). Or, dans toute notre étude, nous avons toujours considéré, pour simplifier, que l'allongement frontal des prismes allait de **1** à l'**infini**, alors qu'en toute logique il va de **0** à l'**infini**, la plage **0** à **1** n'étant évidemment qu'une redite de la plage **1** à l'**infini** : on peut donc se passer de prendre en compte la plage **0** à **1** en plaçant toujours la plus grande dimension de la section frontale au dénominateur du quotient déterminant l'allongement.

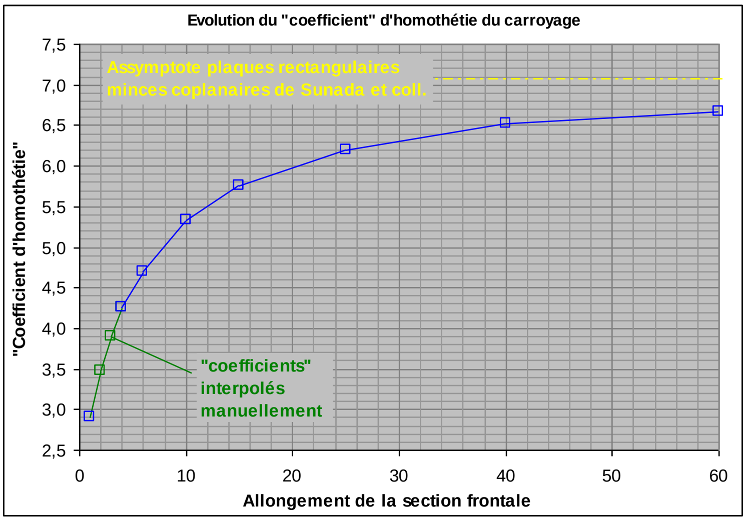
[276] Mais elle peuvent être décrite par un diamètre de sphère de même surface…

[277] Il faut se dire que la plaque est dotée d'une épaisseur infiniment faible **ε** ; le périmètre de la section frontale est alors **2e + 2ε**, soit **≈2e**.

Sur le graphe suivant, nous avons poussé plus loin le travail de carroyage du plan en faisant apparaître les lignes noires pour les allongements **2**, **3** et **infini** :



Pour poser ces lignes **2** et **3**, nous avons utilisé le principe que le coefficient qui commande la quasi-homothétie [278] des lignes de carroyage doit évoluer régulièrement. Voilà d'ailleurs l'évolution de ce coefficient pour les différents allongements de la section frontale :



Les ordonnées pour les allongement **2** et **3** ont été interpolées manuellement (entre les marques d'ordonnées **1** et **4** précédemment déterminées).

L'horizontale en trait d'axe jaune sur le graphe ci-dessus représente le coefficient constaté pour l'allongement **infini** dont nous avons parlé à l'instant.

Une chose primordiale à réaliser est qu'<u>il ne peut exister de marques de prismes rectangulaires en dehors de nos lignes de carroyage</u>, à savoir plus haut que le carroyage noir marqué **1** et plus bas que le carroyage noir marqué **Infini**.

---

[278] Les lignes de carroyage doivent cependant tourner d'un bloc très légèrement lorsque l'allongement croît.

Ce constat constitue un acquis précieux !

Sur le graphe précédent, nous avons laissé apparents les allongements **92,1** et **88,9** : ces allongements sont très proches de **100** donc, pour nous, de l'**infini**. La marques d'allongement **92,1** se tient un tout petit peu bas mais cette fausse note peut correspondre à l'erreur expérimentale de Sheaffer (notre carroyage pour l'Allongement infini provenant de Sunada et coll.).

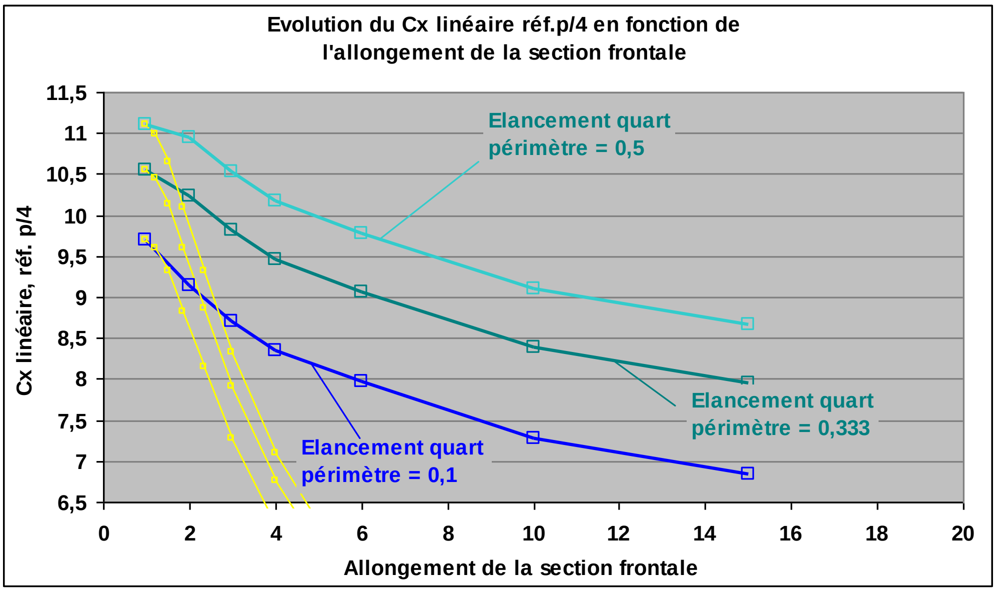
Une excellente surprise est que notre carroyage (qui n'est qu'un projet) accepte très fraternellement entre ses lignes les prismes de Malaika (en orange) et Heiss & Coull (en vert) ; attention au fait que Malaika et Heiss & Coull ont trouvé le C_x linaire identique à l'élancement vertical **0,4** : il y a donc deux marques l'une sur l'autre à cette abscisse, parfaitement sur notre ligne d'allongement **4**.

Le prisme d'allongement **3** d'Heiss & Coull, par contre, n'est pas tout à fait sur notre ligne **3** : l'écart en C_x linéaire entre la marque et la courbe est de **2,3 %**.

Mais au fait, qu'en est-il de la règle admise par Bowen et Masliyah (citée par nous au début de ce paragraphe sur les prismes rectangulaires), règle édictant, si nous l'avons bien comprise, qu'un prisme rectangulaire montre une Traînée équivalente à celle d'un prisme de même périmètre frontal (et donc de même surface mouillée latérale) ?

Cette règle peut être exprimée autrement : elle édicte que des prismes de même élancement vertical quart de périmètre présentent des C_x linéaire égaux. Or notre carroyage du plan du graphe indique que cette règle est erronée puisque, pour un même élancement quart de périmètre (soit une même abscisse) il y a une diminution significative du C_x linéaire lorsque l'allongement de la section augmente.

Reprenant nos C_x linéaires, nous avons quand-même réalisé le graphe suivant qui montre l'évolution du C_x linéaire de prismes de trois élancements **p/4** dont on augmenterait l'allongement de la section frontale.



Les trois courbes jaunes dessinent l'évolution relative du volume de chacun des corps également en fonction de l'allongement de la section frontale (le volume pour l'abscisse **1** étant considéré comme **100 %**).

On voit que pour les très faibles allongements, le volume et le $\mathbf{C_x}$ linéaire évoluent de conserve, c.-à-d. que la diminution de volume (et donc du poids de la particule) pourrait compenser la diminution du $\mathbf{C_x}$ linéaire.

Cependant cette compensation se produit mieux pour l'élancement quart-périmètre **0,1** que pour les élancements plus forts et beaucoup plus courants…

Par contre on peut observer que pour l'allongement de section frontale **0,5**, la courbe bleu clair dessine un crochet dans sa partie supérieure : de ce fait, les $\mathbf{C_x}$ linéaires pour les allongements **1** et **2** sont assez proches.

L'existence de ce crochet est confirmée pour les courbes homologues d'élancements supérieurs, mais ce crochet devient une inflexion vers le bas et ne dessine nullement un plateau.

Si donc l'on cherche à être précis, le principe émis par Bowen et Masliyah n'apparaît pas valide.

S'il ne s'agit que de donner un ordre de grandeur au $\mathbf{C_x}$ linéaire de prisme d'allongement de section frontale **4** à **10** et d'élancement **p/4** courant de **6** à **19**, on pourra utiliser notre régression logarithmique jaune sur le premier panorama du présent chapitre. Son équation est :

$$\mathbf{C_{xlin\ Réf.L} = 5{,}86 - 1{,}23*Ln\,(Élan)}$$

…**Élan** étant ici l'élancement **p/4** desdits prismes.

L'erreur maximale commise en utilisant cette régression est alors de **3,4 %** par rapport à toutes les mesures de Sheaffer présentes sur ce premier panorama.

Une régression plus précise, tirée rapidement de notre carroyage de ce premier panorama, est :

$$\mathbf{C_{xlin\ Réf.L} = 8{,}1\ All^{-0{,}045}\ Élan^{-0{,}4}}$$

…**All** étant l'allongement de la section frontale des prismes en déplacement axiaux et **Élan** étant toujours l'élancement **p/4** desdits prismes.

Cette régression pronostique le $\mathbf{C_x}$ linéaire des prismes de Sheaffer en déplacement axiaux (leur plus grande dimension étant verticale) avec une précision meilleure que **2 %** (souvent inférieure à **1 %**), sauf pour la fameuse marque à l'abscisse **14,9** (allongement de **9,7**) pour laquelle l'erreur monte à **3,50 %**.

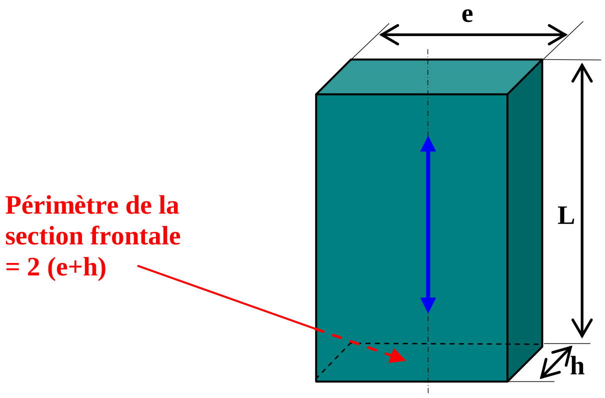
Au reste, ce fameux prisme (Sheaffer l'a nommé 4c) nous apparaît trop haut en $\mathbf{C_x}$ linéaire dans l'ensemble de ses orientations. Ce qui nous laisse penser qu'une erreur s'est glissée dans la définition de ses formes (sa Masse Volumique ressortant des calculs de Sheaffer comme un peu plus forte que celle des autres, pourtant censés fabriqués dans le même métal) [279].

[279] Ce prisme apparaît sur ce graphe à l'abscisse ≈ **0,25**, avec l'allongement **79,5** (alors qu'il est sur la ligne **60**) ; il apparaît encore sur le même graphe à l'abscisse **0,022**, avec l'allongement **8,2** (à ce titre, il est trop prêt de la ligne **6**).

Encadrons donc cette régression, tirée de ce premier panorama carroyé donnant le $\mathbf{C_x}$ linéaire (référence **L**) des prismes en déplacement « axiaux » en attirant l'attention sur ses limites de validité :

$$\boxed{\mathbf{C_{xlin\ Réf.L} = 8{,}1\ All^{-0{,}045}\ Élan^{-0{,}4}}}$$

…encadré, où **All** est l'*allongement* ***e/h*** de la section frontale des prismes [280] et **Élan** leur *élancement vertical* ***p/4*** (quotient **L/(p/4)** de leur dimension verticale **L** par le quart de **p**, leur périmètre frontal **(e+h)/2**) **e**, **h** et **L** étant définis sur le schéma ci-dessous :



Cet encadré donne le $\mathbf{C_x}$ linéaire (référence **L**) de prismes d'*élancement vertical* ***p/4*** allant de **6** à **19** et d'allongement **e/h** de section frontale allant de **1** (prisme à base carrée) à **10**.

Nous verrons plus bas que ce même encadré est mis en défaut par les travaux de Sunada et coll., même s'il est dans le bon ordre de grandeur.

Quant aux prismes en décantation « à plat » ou « coplanaire » d'*élancement vertical* ***p/4*** allant de **0** à **0,5** et d'allongement de la section frontale allant de **1** (prisme carré) à **60**, on trouvera en notre autre graphe carroyé une bonne méthode *graphique* d'en calculer le $\mathbf{C_x}$ linéaire (en référence **p/4** cette fois).

Au fond, que venons-nous de faire en dessinant ces panoramas ?

Nous avons réalisés ces calculs de façon un peu automatique en suivant notre intuition. Ceci fait, nous nous sommes demandé ce que prouvait l'excellente régularité (à notre sens) de nos panoramas.

À la réflexion, nous avons fait qu'exprimer sous forme adimensionnelle toutes les proportions de tous ces prismes, et nous leur avons attaché un $\mathbf{C_x}$ linéaire.

Il faut d'ailleurs faire remarquer ici encore une fois, que la dimension absolue de tous ses prismes est sans effet sur leur caractéristique de Traînée, pourvu, bien-sûr, que cette dimension absolue ne les place pas en dehors du régime de Stokes.

[280] **e** étant choisi toujours choisi supérieur à **h**.

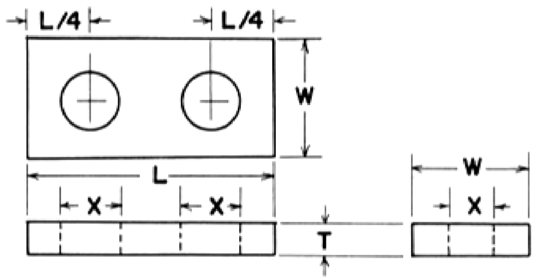
Et si les panoramas des C_x linéaires des prismes de Sheaffer (ainsi que ceux de Malaika et Heiss & Coull ou d'autres) se montrent si réguliers, c'est uniquement parce que la Nature obéît à des règles.

Nous espérons évidemment que ce modeste (mais laborieux) travail pourra aider d'une façon ou d'une autre à cerner ces lois de la nature…

Nous verrons d'ailleurs plus bas que les $\mathbf{C_x}$ linéaires calculés de prismes rectangulaires de Sunada et coll. confirment ledit modeste travail, du moins dans ses grandes lignes. Cependant, comme nous prenons les $\mathbf{C_x}$ linéaires de Sunada et coll. comme les $\mathbf{C_x}$ linéaires exacts, ces travaux de Sunada et coll. viennent périmer les graphes et les propos ci-dessus. Nous ne les avons conservés dans ce texte que pour la méthode qu'ils illustrent (et qui sera d'ailleurs utilisée pour l'exploitation des textes de Sunada et coll.).

Prismes troués de Sheaffer en déplacement « à plat » (parallèle à l'axe des trous) :

Sheaffer a également mesuré, dans les trois orientations, la décantation de prismes troués de la façon suivante :

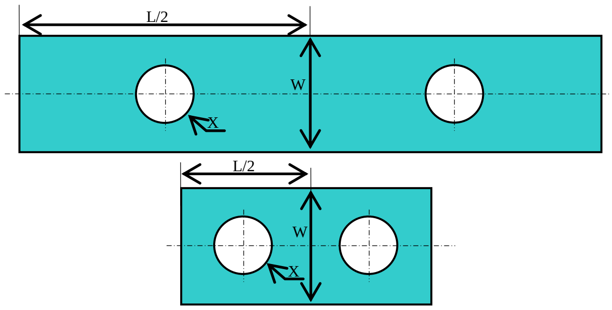


Les deux trous de diamètre X diminuent la section frontale L*W des prismes de **12** à **20 %**.

Les travaux de Roger et Weidman sur le cylindre creux en mouvements axiaux (la longueur de ces cylindres creux évoluant jusqu'à former un disque d'épaisseur nulle troué en son centre) nous indiquent que le trou foré dans l'axe d'un cylindre ne diminue pas sensiblement son $\mathbf{C_x}$ linéaire si le rapport $\mathbf{D_i/D}$ du diamètre du trou $\mathbf{D_i}$ sur le diamètre **D** du cylindre ne dépasse pas **0,5** (ceci même pour le disque troué).

D'autre part, les travaux de Sunada, Tokutake et Okada sur la plaque carrée mince percée en son centre (ou même percée très en dehors de son centre) d'un trou également carré dévoilent la même tendance que celle du disque circulaire percé en son centre d'un trou circulaire.

S'agissant des prismes troués de Sheaffer, le rapport X/W du diamètre du trou à la largeur du prisme reste de l'ordre de **0,5** :

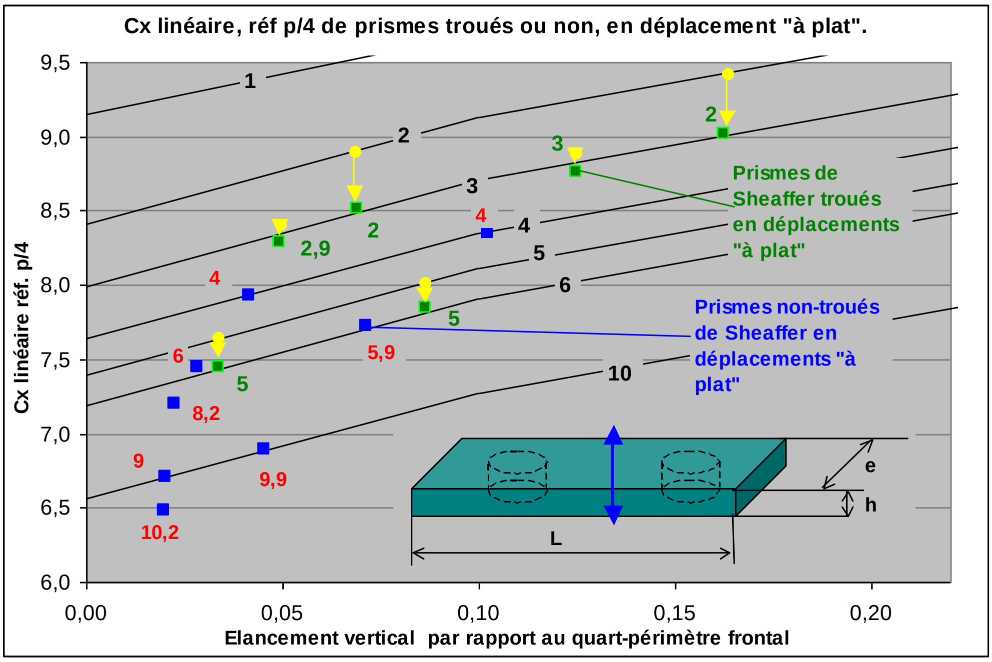


…alors que le rapport (X/2) / (L/4) rapport égal à X/(L/2), c.-à-d. le critère relatif de matière annihilée par le trou dans la direction L (comparable au rapport **Di/D** pour le cylindre creux) évolue entre **0,2** et **0,5** (ces **0,5** étant la limite au-delà de laquelle la présence du trou au centre d'un cylindre court se fait sentir).

Nous avons représenté ci-dessus deux prismes troués de Sheaffer : le plus long et le plus court. On remarque que, même pour le plus court, les trous restent relativement loin des extrémités et des bords du prisme.

On peut donc s'attendre à ce que les effets des deux trous sur le $\mathbf{C_x}$ linéaire de ces prismes décantant « à plat » (soit pour des mouvements parallèles aux axes des trous, comme c'était le cas pour les cylindres troués de Roger et Weidman) soient limités.

Voici la comparaison du $\mathbf{C_x}$ linéaire des prismes troués de Sheaffer (marques vertes) avec d'autres prismes non troué du même auteur (marques bleues, déjà présentées) :



Les flèches jaunes dévoilent la diminution de $\mathbf{C_x}$ linéaire de chaque prisme troué par rapport au $\mathbf{C_x}$ linéaire du même prisme non troué.

Comme on peut en juger, le $\mathbf{C_x}$ linéaires de certains prismes troués se trouvent cependant notablement diminués (par rapport aux lignes de carroyage noires qui représentent le $\mathbf{C_x}$ linéaire des prismes pour les différents allongements de leur section frontale), en particulier les prismes troués d'allongement **2** (qui passent de la ligne **2** à la ligne **3**) et, à un moindre titre, les prismes d'allongement **5** (qui atteignent ou presque la ligne **6**).

La copie d'écran de notre tableur ci-dessous explique peut-être pourquoi les prismes troués d'allongements **5** et **4,99** (nombres que nous avons simplifiés en **5** sur notre graphe) font tous deux un plus petit pas vers le bas du graphe que les prismes troués d'allongements **2,02** et **1,97** (nombres que nous avons simplifiés en **2**) :

Nom du modèle de prisme	L (cm)	W (e) (cm)	T (h) (cm)	X, soit le diam des trous	Rapport X / T	Rapport X / W	Rapport (X/2) / (L/4)	Section relative des trous (piX²/2) / (LW)	Allongement de la section frontale	D'où quart-périmètre frontal	D'où élancement /quart-périmètre
1b	2,443	0,843	0,081	0,409	5,05	0,49	0,33	0,128	2,90	1,643	0,05
3b	3,172	0,635	0,064	0,318	4,97	0,50	0,20	0,079	5,00	1,904	0,03
5b	1,633	0,81	0,084	0,409	4,87	0,50	0,50	0,199	2,02	1,222	0,07
2b	2,548	0,511	0,132	0,256	1,94	0,50	0,20	0,079	4,99	1,530	0,09
6b	1,918	0,645	0,16	0,328	2,05	0,51	0,34	0,137	2,97	1,282	0,12
8b	1,283	0,65	0,157	0,32	2,04	0,49	0,50	0,193	1,97	0,967	0,16

Par chance ineffable (à moins que ce soit par l'intelligence de Johnson dont Sheaffer a repris les dimensions de prismes[281] intègres, c.-à-d. non troués), les différents rapports exprimés dans les colonnes à chiffres verts (qui tendent à exprimer adimensionnellement l'importance de la matière restante autour des trous) sont à peu près les mêmes <u>à l'intérieur de chaque paire de prismes</u> (les prismes d'allongement **~5**, en gris et les prismes d'allongement **~2** entourés de rouge :

Si le rapport X/W (soit l'importance relative du trou par rapport à la largeur W des prismes) reste à peu près égal à **0,5** (nous l'avons déjà dit), le rapport (X/2)/(L/4) (soit le critère de matière restante sur les bords de chaque trou mesurée dans le sens de la longueur L du prisme) passe de **0,2** pour les prismes d'allongement **5** (cellules à fond gris) à **0,5** pour les prismes d'allongement **2** (cellules entourées de rouge).

Or ce sont bien ces derniers prismes qui voient leur $\mathbf{C_x}$ le plus diminué par la présence des trous…

Notons quand-même que cette diminution n'est que de l'ordre de **4 %** pour les prismes d'allongement **2** et de **3 %** pour les prismes d'allongement **5**...

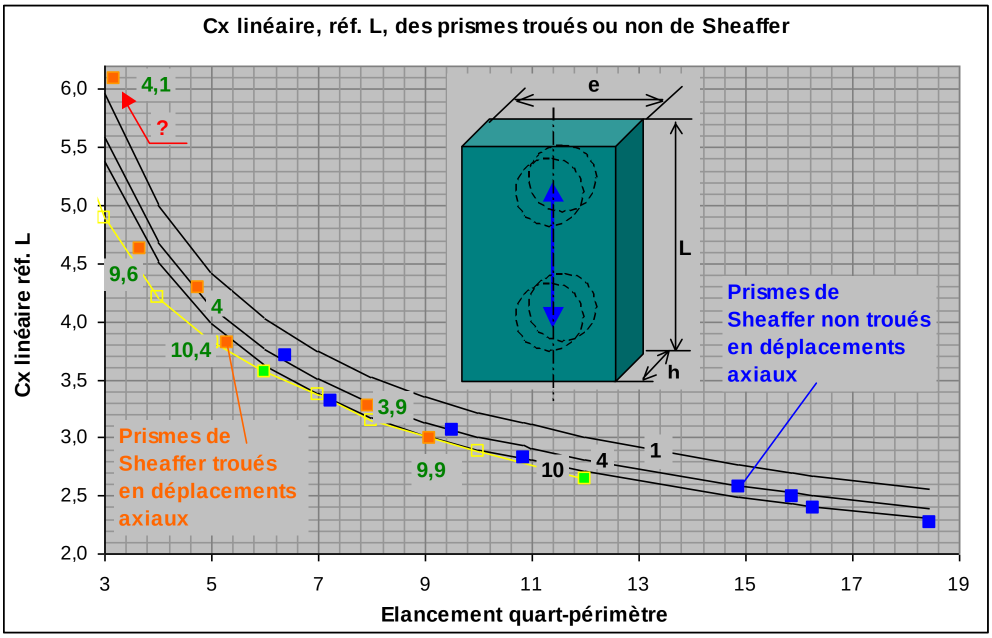
Par contre, le rapport X/T, qui représente l'inverse de l'élancement du trou (en tant que cylindre), semble ne pas agir sur le $\mathbf{C_x}$ linéaire, comme si, quelle que soit la profondeur des trous, le fluide est trop visqueux pour pénétrer dans le trou (ce que le comportement des cylindres creux de Roger et Weidman nous paraît suffisamment prouver).

<u>**Prismes troués en mouvements « axiaux »**</u> (soit parallèlement à leur plus grande dimension) :

Les même prismes troués de Sheaffer montrent en mouvements axiaux une encore plus faible baisse de $\mathbf{C_x}$ linéaire (ci-dessous en référence **L**) :

---

[281] La dimension de ces prismes de Johnson est donnée dans les annexes de la thèse de Madhav. On y lit que les Reynolds des mesures de Johnson sont assez proches ou supérieurs à **1**.

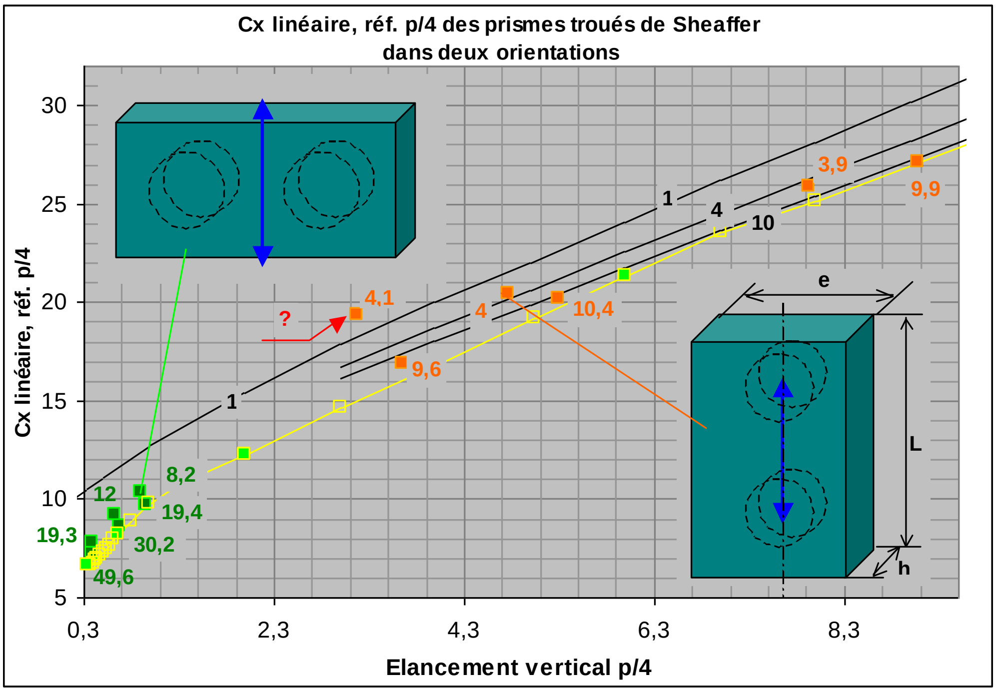


Les marques oranges sont, comme indiqué, les prismes troués et les marques bleu dense d'autres prismes non troués, l'ensemble en mouvement « axial » (c.-à-d. parallèlement à leur plus grande dimension).

Les très faibles diminutions relatives de C_x linéaire occasionnées par la présence des trous, pour ces déplacements « axiaux » sont d'ailleurs peut-être trop proches de l'erreur expérimentale des mesures de Sheaffer ; ce dernier graphe ne permet donc sans doute pas de trancher sur l'importance de ces trop faibles variations.

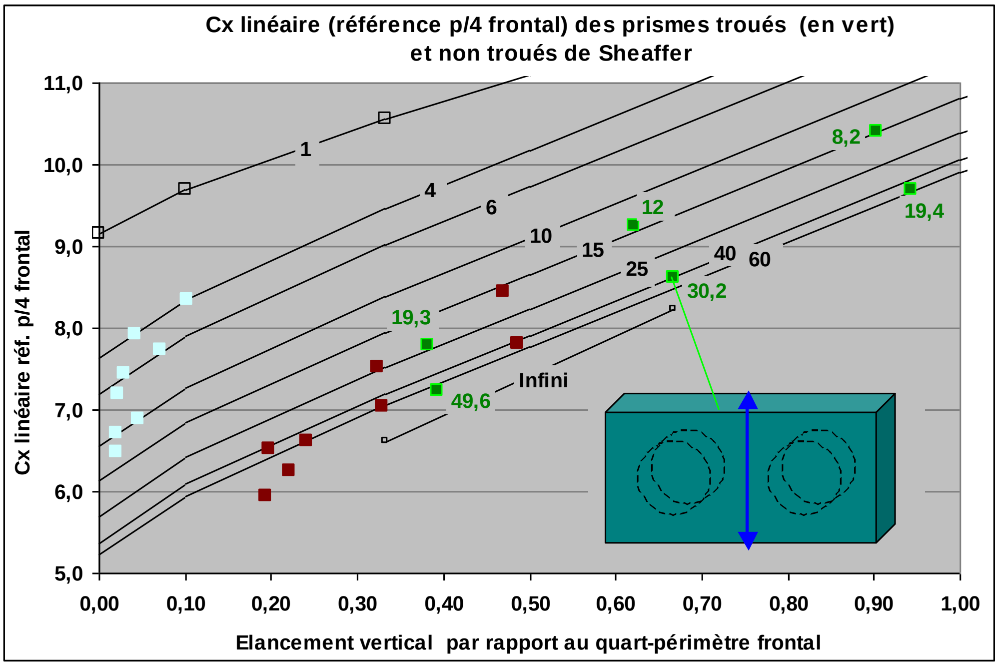
La marque dans l'angle supérieure gauche nous apparaît suspecte dans son ordonnée, du moins si l'on en croit notre ligne noire repérant les allongements **1** (ligne assez précise puisque reflétant le comportement des prismes à base carrée de Sunada et coll.).

Sheaffer a également mesuré les mêmes prismes troués en déplacement « coplanaire » (c.-à-d. parallèlement à leur dimension moyenne). Voici en vert ceint de vert fluo les C_x linéaires (ici en référence **p/4**) qu'on peut tirer de ces mesures :



Ces marques s'alignent correctement par rapport aux autres et semblent s'organiser pareillement en fonction de l'allongement de leur section frontale.

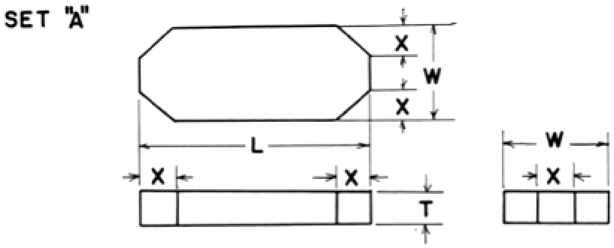
Un zoom sur les faibles élancements les montre mieux (toujours en vert ceint de vert fluo), mais laisse aussi penser que la partie gauche de notre carroyage (au-delà de l'élancement **0,50**) manque de précision (dans cette zone, notre carroyage n'a pas été balisé par des prismes non troués) :



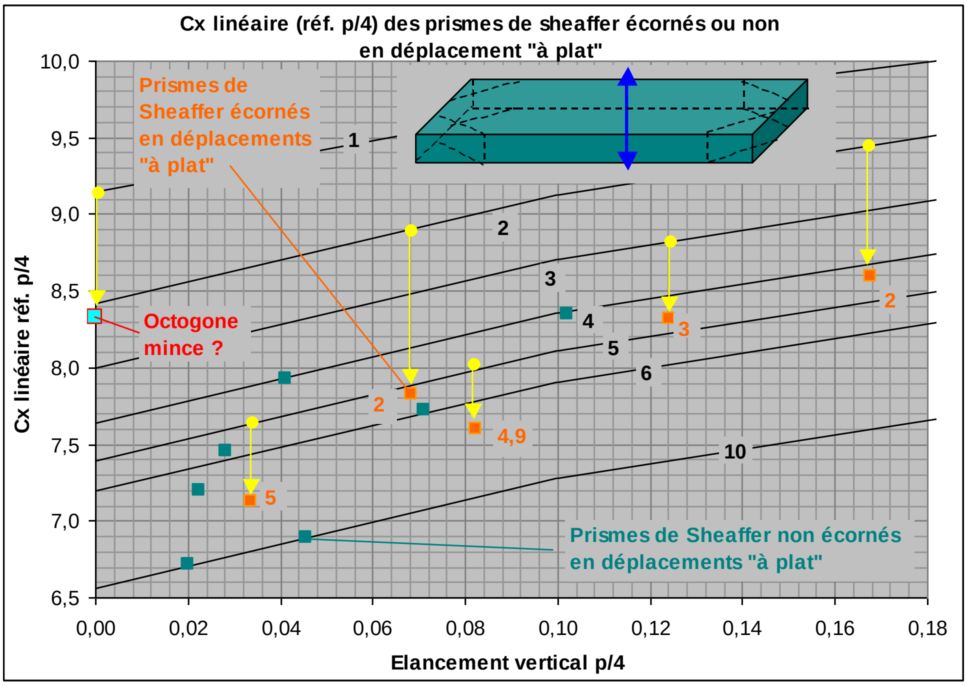
Au demeurant, la conclusion générale qu'on peut tirer des mesures de prismes troués en décantation « axiale » ou « coplanaire » (c.-à-d. parallèlement à leur plus grande dimension et à leur dimension moyenne) est que leur C_x linéaire est très peu affecté par la présence des trous.

<u>Prismes écornés de Sheaffer en déplacement « à plat » (soit parallèlement à leur plus courte dimension) :</u>

Sheaffer a également mesuré, dans les trois orientations, la décantation de prismes écornés de la façon suivante :



En déplacement « à plat » (c.-à-d. de telle sorte que leur dimension T reste parallèle au déplacement) ces prismes écornés présentent des comportements très variables. Voici ces comportements représentés <u>en prenant comme abscisse</u>, pour chaque prisme écorné, <u>l'allongement L/W</u> de la section frontale du prisme intègre (c.-à-d. non écorné) :



Cette façon de faire nous permet à nouveau d'évaluer assez facilement, grâce à notre carroyage, le $\mathbf{C_x}$ linéaire du prisme avant qu'il soit écorné.

Sur <u>ce graphe</u> apparaissent également en bleu glauque d'autres prisme non-écornés de Sheaffer déjà étudiés dans le même déplacement.

Ainsi qu'on le voit, les <u>flèches jaune</u>s (qui, à notre sens, donnent une bonne représentation de la diminution de $\mathbf{C_x}$ linéaire due à l'écornage des prismes) sont d'importance variable.

Comme précédemment, et par chance (à moins que ce soit par l'intelligence de Johnson), les deux paires de prismes qui présentent un comportement proche deux à deux (la pair de prismes d'allongement **5** ou **4,9** (cellule grisées ci-dessous) et la paire de prismes d'allongement **2** (cellules entourées de rouge ci-dessous) montrent des rapports X/W et X/L très proches deux à deux (chiffres verts) :

Nom du modèle de prisme	L (cm)	W (e) (cm)	T (h) (cm)	X, ou cote d'écornage	Rapport X / T	Rapport X / W	Rapport X / L	Allongement de du prisme non-écorné	D'où quart-périmètre non écorné	D'où élancement /quart-périmètre
1a	0,961	0,32	0,032	0,248	7,75	0,775	0,258	3,00	0,641	0,05
3a	3,18	0,635	0,064	0,195	3,05	0,307	0,061	5,01	1,908	0,03
5a	1,636	0,818	0,084	0,267	3,18	0,33	0,16	2,00	1,227	0,07
2a	2,563	0,521	0,127	0,161	1,27	0,309	0,063	4,92	1,542	0,08
6a	1,93	0,648	0,16	0,198	1,24	0,306	0,103	2,98	1,289	0,12
8a	1,275	0,632	0,16	0,197	1,23	0,31	0,15	2,02	0,954	0,17

Le premier nombre de la colonne X/W doit être rejeté comme impossible (l'une des mensurations données par Sheaffer est donc erronée).

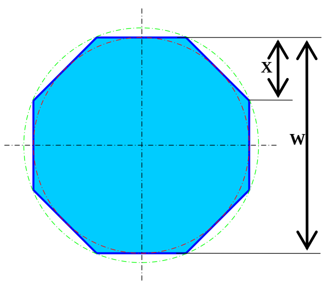
Par contre le rapport X/T est plus que divisé par deux à l'intérieur de chaque paire. Cela fait penser que ce quotient est peu efficient pour ce qui est d'agir sur le $\mathbf{C_x}$ linéaire.

On peut donc supputer que c'est le rapport X/L plus faible de la paire de prismes écornés d'allongements **~5** (cellules grisées) qui impose une plus faible diminution de $\mathbf{C_x}$ après écornage que celle imposée aux prismes écornés d'allongement **2** (cellules encadrées de rouge) : cela pourrait signifier que l'écornage des prismes a plus d'action sur le $\mathbf{C_x}$ quand il est fait sur des prismes de plus petite dimension L (L étant leur plus grande dimension).

Le même rapport X/L du prisme écorné d'allongement **2,98** (abrégé en **3** sur le graphe, est intermédiaire et n'infirme ni ne confirme cette dernière supputation.

Une autre tendance qu'il faut relever sur le même graphe, est que les flèches de diminution jaunes de chaque paire (la paire d'allongement **~5** et la paire d'allongement **2**) sont moins longues à mesure que l'élancement **p/4** des prismes diminue, mais, dans ces deux cas, le rapport X/T dans chaque paire augmente également ce qui empêche de conclure à propos de cette légère tendance.

Toujours sur le même graphe, nous avons porté le $\mathbf{C_x}$ linéaire référence **p/4** de l'octogone régulier parfaitement mince parce que le rapport X/W qu'il présente vaut **0,29** (alors que celui des prismes de Sheaffer tourne autour de **0,3**) :



Nous avons assimilé sa longueur de Traînée à celle du cercle de diamètre valant la moyenne des diamètres circonscrit et inscrit de cet octogone. On dégage alors

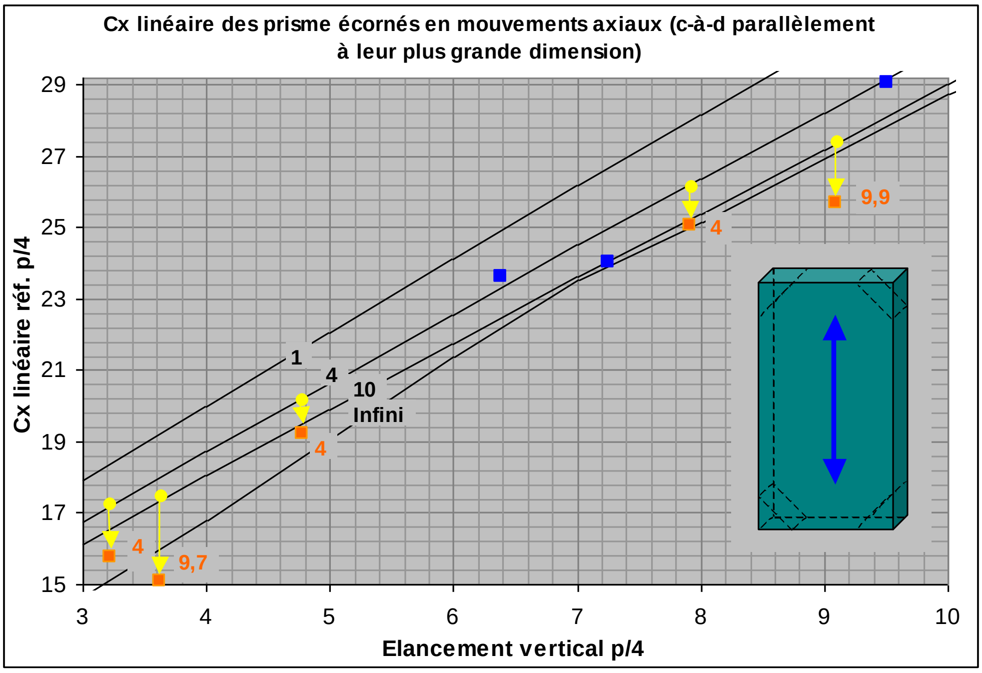
8,33 de $\mathbf{C_x}$ linéaire en référence W ou **p/4** [282] ; l'élancement vertical **p/4** du prisme intègre d'où vient cet octogone est évidemment nul ; l'allongement de sa section frontale est **1**.

L'écornage du carré infiniment mince (ce qui donne l'octogone) diminue son $\mathbf{C_x}$ linéaire frontal de **9 %**.

Il est difficile de conclure quoi que ce soit du comportement de cet octogone régulier, mais on note que l'écornage du carré mince qui le forme produit bien une diminution sensible du $\mathbf{C_x}$ linéaire (en référence constante au quart de périmètre du prisme intègre).

<u>Prismes écornés en mouvements « axiaux » (c.-à-d. parallèlement à leur plus grande dimension :</u>

Sheaffer a mesuré la décantation de prisme écornés en mouvement axiaux. Voici en orange les marques de tels prisme écornés :



En bleu dense sont les marques de prismes non écornés déjà rencontrés.

Les marques orange d'allongement **9,7** et **9,9** se trouvent sous notre carroyage pour les allongements infini des prismes non écornés (issu de Sunada et coll.), mais c'est tout à fait possible.

Certains prismes voient donc leur $\mathbf{C_x}$ linéaire sensiblement diminué par l'écornage : ceux d'allongement **9,7** et **9,9** (ce sont les cellules grisées ci-dessous). Les autres sont peu touchés (cellules encadrées en rouge).

Nom du modèle de prisme	L (cm)	W (e) (cm)	T (h) (cm)	X, ou cote d'écornage	Rapport X / T	Rapport X / W	Rapport X / L	Allongement de du prisme non-écorné	D'où quart-périmètre non écorné	D'où élancement /quart-périmètre
1a	0,961	0,32	0,032	0,248	7,75	0,775	0,258	10,00	0,176	5,46
3a	3,18	0,635	0,064	0,195	3,05	0,307	0,061	9,92	0,350	9,10
5a	1,636	0,818	0,084	0,267	3,18	0,33	0,16	9,74	0,451	3,63
2a	2,563	0,521	0,127	0,161	1,27	0,309	0,063	4,10	0,324	7,91
6a	1,93	0,648	0,16	0,198	1,24	0,306	0,103	4,05	0,404	4,78
8a	1,275	0,632	0,16	0,197	1,23	0,31	0,15	3,95	0,396	3,22

[282] En référence *cote entre sommets opposés*, le $\mathbf{C_x}$ linéaire peut donc être pris à **7,7**.

Il convient de remarquer que toutes les quotients d'écornage X/W restent autour de **0,31** (à part le premier de la colonne en fuchsia qui doit toujours être rejeté comme impossible).

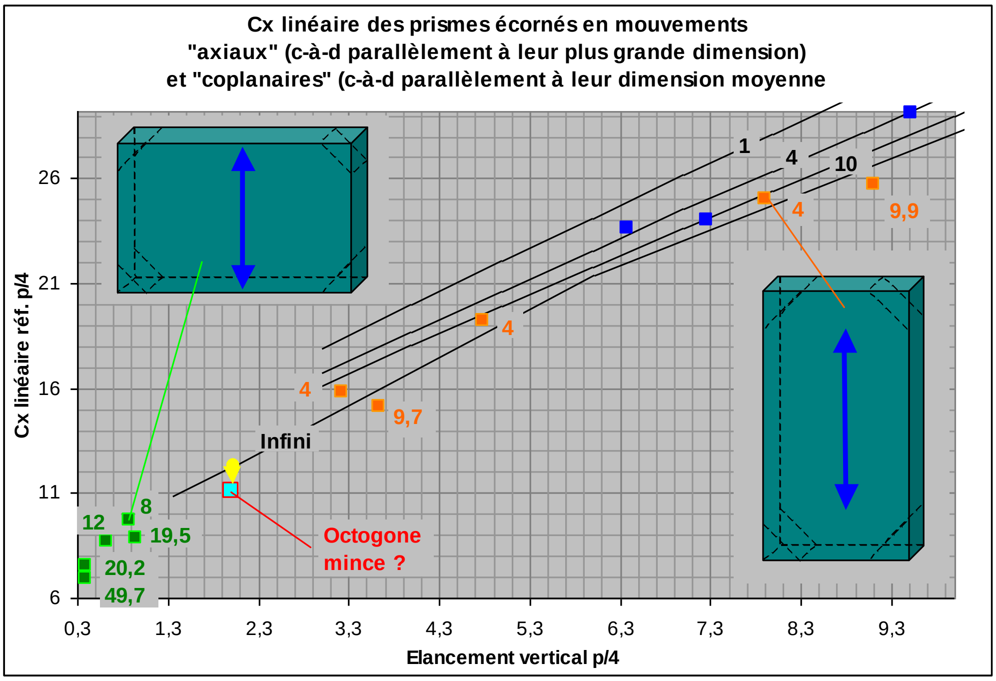
On pourrait donc supputer que la plus forte diminution de C_x linéaire apporté par l'écornage des prismes d'allongements **9,9** et **9,7** est due à leur plus fort quotient X/T (par rapport aux trois autres prismes écornés qui présentent un X/T plus faible).

Il semble donc que les prismes de faible épaisseur sont plus affectés par l'écornage…

Par contre, le rapport X/L semble inefficient…

Prismes écornés en mouvements « coplanaires » (c.-à-d. parallèlement à leur dimension moyenne) :

Voici ces prismes écornés représentés en vert ci-dessous conjointement avec les précédents (toujours en orange) :



On note qu'ils observent bien la même tendance à s'organiser selon l'allongement de leur section frontale.

À l'abscisse **2** de ce graphe, nous avons fait figurer de nouveau l'octogone régulier mince (ici en mouvement coplanaire), toujours en assimilant sa longueur de Traînée à celle d'un cercle de diamètre valant la moyenne de ceux des cercles inscrit et circonscrit à l'octogone (on peut ainsi estimer que le C_x linéaire de l'octogone régulier, en référence à sa cote sur plat W, vaut **5,55** [283], celui en référence **p/4** valant le double).

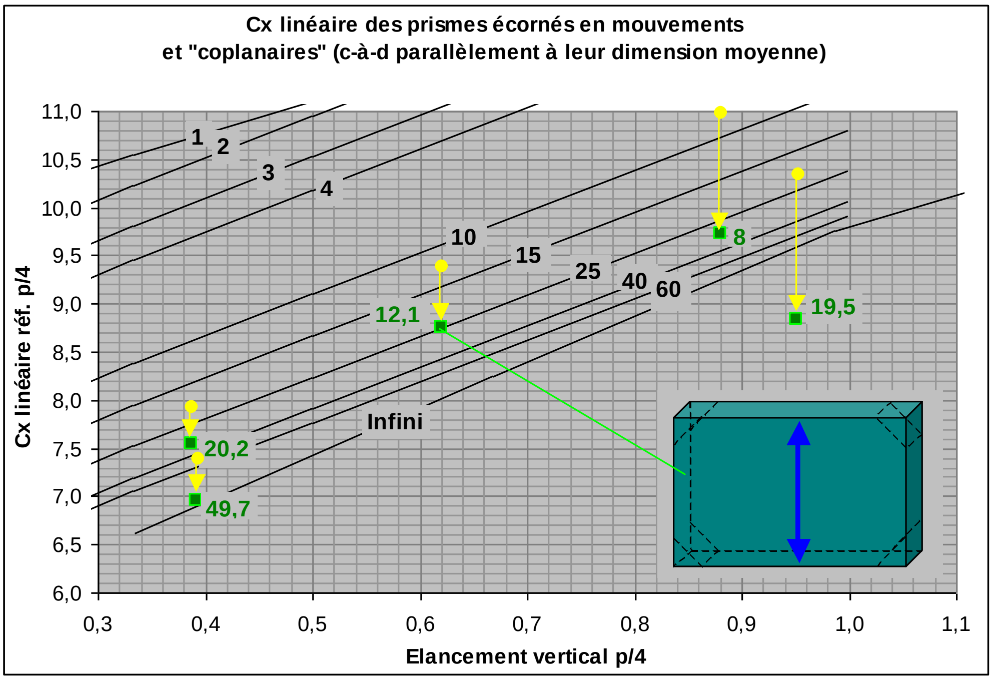
Comme l'élancement vertical **p/4** du prisme intègre circonscrit à ce corps est **2** et que l'allongement de sa section frontale est infini on peut dessiner sa marque sur le

---

[283] …puisque le C_x linéaire coplanaire du disque vaut **5,333** en référence à son diamètre.

graphe. L'écornage du carré infiniment mince (ce qui donne l'octogone) diminue son $\mathbf{C_x}$ linéaire coplanaire de **9,3 %**.

Présentés à part, les prismes de Sheaffer en mouvement coplanaire font aussi montre d'un diminution de leur $\mathbf{C_x}$ lors de l'écornage :



Une nouvelle fois, nous pressentons que la partie droite de notre carroyage (elle a été dessinée sans marques étalons [284]) peut être imprécise.

Nous sommes sûr de cette imprécisions dans cette plage d'élancement **p/4** puisque la prolongation de notre carroyage pour les plus petits élancements **p/4** ne vise pas correctement notre carroyage pour les plus forts élancements **p/4** : cela ce remarque dans les deux lignes noires en bas à gauche de ce graphe. Une refonte manuelle des lignes du carroyage dans cette plage améliorerait donc beaucoup les choses.

Quoi qu'il en soit de ces améliorations possibles et pour en revenir au cas des prisme de Sheaffer écorné, une observation des dimensions de ces prismes nous souffle l'idée que la plus grande chute de $\mathbf{C_x}$ linéaire des deux prismes de droite (d'allongement **8** et **19,5**, cellules grisées ci-dessous) pourrait être due à une plus forte valeur de leur quotient X/L (soit une longueur L plus faible, relativement aux autres dimensions)…

Nom du modèle de prisme	L (cm)	W (e) (cm)	T (h) (cm)	X, ou cote d'écornage	Rapport X / T	Rapport X / W	Rapport X / L	Allongement de du prisme non-écorné	D'où quart-périmètre non écorné	D'où élancement /quart-périmètre
1a	0,961	0,32	0,032	0,248	7,75	0,775	0,258	30,03	0,497	0,64
3a	3,18	0,635	0,064	0,195	3,05	0,307	0,061	49,69	1,622	0,39
5a	1,636	0,818	0,084	0,267	3,18	0,33	0,16	19,48	0,860	0,95
2a	2,563	0,521	0,127	0,161	1,27	0,309	0,063	20,18	1,35	0,39
6a	1,93	0,648	0,16	0,198	1,24	0,306	0,103	12,06	1,05	0,62
8a	1,275	0,632	0,16	0,197	1,23	0,31	0,15	7,97	0,72	0,88

[284] Come on le voit sur ce graphe, nous n'avons pas de données concernant les prismes à base non carrée entre les élancements **p/4 0,5** et **6**.

Ce qui tendrait à accréditer l'idée qu'en mouvements coplanaires, l'écornage des prismes diminue plus leur $\mathbf{C_x}$ linéaire (relativement) lorsque leur longueur **L** est plus faible, donc qu'ils sont plus compacts.

Comparaison de nos résultats avec les résultats donnés par l'équation de Johnson :

Sheaffer cherchait à évaluer l'équation que son mentor David L. Johnson avait créée afin de déterminer les caractéristiques de Traînée de corps quelconque d'après des descripteurs classiques tels que leur *sphéricité* ou le quotient de leur surface totale par la surface de la sphère de même volume, etc.

Ce problème est évidemment récurrent dans le travail des chercheurs puisque sa résolution intéresserait beaucoup l'industrie.

L'équation de Johnson (équation 5 du texte de Sheaffer) est celle-ci :

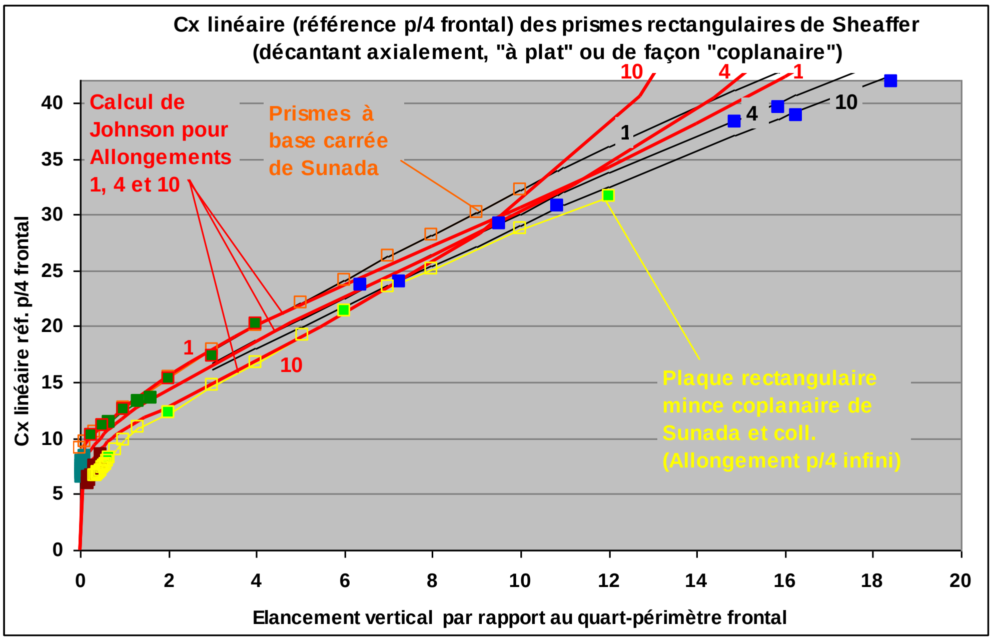
$$\mathbf{K = 0,246 + 0,531(\psi) + 0,258\ (D_s/D_n) - 0,036\ (D_{max}/D_n)}$$

Dans cette équation, **K** est le critère de Traînée utilisé par Sheaffer et Johnson, $\boldsymbol{\psi}$ est la sphéricité (soit le quotient de la surface $\boldsymbol{\pi\, D_s^2}$ de la sphère de même volume que le corps par la surface du corps), $\mathbf{D_s}$ est le diamètre de cette sphère de même volume, $\mathbf{D_{max}}$ est la dimension maximale du prisme et $\mathbf{D_n}$ le diamètre du cercle de surface équivalente à la surface frontale du prisme.

Nous avons vu plus haut que ce critère **K** donne facilement notre $\mathbf{C_x}$ linéaire, en référence $\mathbf{D_s}$, par l'égalité $\mathbf{C_{xLin\ Réf.D_s} = 3\ \pi/K}$.

Cette équation de Johnson est donc assez facile à mettre en œuvre, aussi avons-nous calculé par ce moyen le carroyage du plan de nos graphes (ce carroyage serait donc celui que proposerait Johnson par utilisation de son équation).

Voici en rouge ledit carroyage (préconisé implicitement par Johnson) sur l'un de nos premiers graphes dressant le panorama des prismes (non troués, non écornés) de Sheaffer :



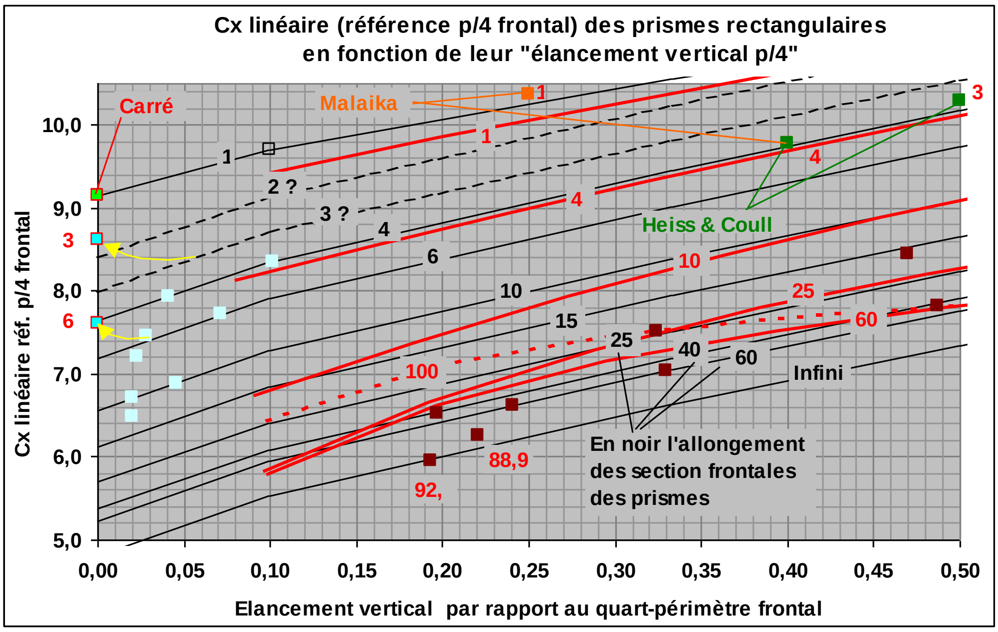
Le résultat n'est pas trop mauvais, du moins de l'abscisse **0** à l'abscisse **10**, abscisse où se produit un curieux croisement de courbes.

Dans cette plage **0** à **10**, le carroyage de Johnson pour l'allongement **4** recouvre même notre propre carroyage.

Le gros défaut du carroyage de Johnson pour l'allongement **10** est cependant de se situer sur ou même plus bas que la courbe jaune de Sunada et coll. que nous tenons pour vraie (au moins pour ses marques à cœur vert fluo).

Enfin il faut noter qu'au-delà de l'abscisse **10** ou **11** le carroyage rouge de Johnson diverge complètement, ce qui apparaît également dans les tableaux de résultats de Johnson où il confesse (pour ces corps d'élancement **p/4** supérieur à **10**) des erreurs de **24** à **46 %**. Encore faut-il préciser que, grâce à un artifice mathématique, ces erreurs sont minimisées [285].

En dessous de l'abscisse **2**, le carroyage rouge tiré de l'équation de Johnson semble plus conforme à la réalité. Un zoom sur cette zone dessine ce panorama :



(nous avons ajouté à ce panorama les lignes d'allongements **25**, **60** et **100**)

Jusqu'à l'allongement **60,** ces lignes rouges ne se placent pas si mal en ordonnées, surtout la ligne pour l'allongement **4**. Dans tous les cas, elles donnent un pronostic de C_x linéaire dans le bon ordre de grandeur.

---

[285] Dans les faits, le choix fait par Sheaffer dans la définition du paramètre K divise parfois par deux l'erreur maximale admise par lui : En effet, l'erreur relative sur l'estimation du nombre K vaut $(K_{Est} - K_{Vrai})/K_{Vrai}$. Or notre C_x linéaire vaut **3 π/K**, comme indiqué ici ; l'erreur relative sur notre C_x linéaire est donc : $(C_{xLinEst} - C_{xLinVrai})/C_{xLinVrai}$, soit : $[(3\pi/K_{Est}) - (3\pi/K_{Vrai})]/3\pi/K_{Vrai}$. Après simplification, notre erreur devient $(K_{Vrai} - K_{Est})/K_{Est}$, quotient qui peut- être très différent de celui utilisé par Sheaffer (parfois le double, avons-nous dit). On peut d'ailleurs écrire cette dernière erreur $[(K_{Vrai} - K_{Est})/K_{Vrai}]*[K_{Vrai}/K_{Est}]$, produit dont le premier terme entre crochets est, au signe près, l'erreur de Sheaffer. Donc, selon que K_{Est} est plus fort ou moins fort que K_{Vrai}, notre erreur sera plus ou moins forte (et notablement) que celle de Sheaffer. Dans les deux cas, pourtant, les prismes décanteront à la vitesse autorisée par leur C_x linéaire.

Le curieux rapprochement des lignes rouges **25** et **60** dévoile un rebroussement en ordonnées : ainsi la ligne rouge d'allongement **100** se montre plus haute que la **60** et souvent la **25**. Le cas de l'allongement **60** constitue donc une limite pour l'équation de Johnson, ce qui n'est déjà pas si mal…

Il est important d'ajouter ici que le directeur de thèse de Sheaffer, David Leith, a également publié un texte qui reprend la même équation en **ψ** de Johnson mais en lui donnant des coefficients un peu différents [286]. La mise en œuvre de cette équation ne conduit pas à un meilleur carroyage que celle citée par Sheaffer.

Les prismes rectangulaires de Sunada, Ishida, Tokutake et Okada

Dans un de leur texte, complété par un autre, ces chercheurs présentent leurs calculs, par la méthode BEM (Boundary Element Method, soit la Méthode des Intégrales aux Frontières) de prismes rectangulaires de dimensions variables.

Nous avons déjà étudié plus haut certains de leurs résultats (pour les plaques minces rectangulaires). Aussi irons nous assez vite dans l'exploitation de leurs travaux sur les prismes rectangulaires.

Tout au plus répéterons-nous que ces auteurs utilisent, comme coefficient de Traînée, le double de notre **C_x** linéaire. Nous disions d'ailleurs à ce propos : « On peut donc constater qu'ils sont en avance sur leur époque, époque où les chercheurs persistent à utiliser, pour le même usage, un **C_x** quadratique dénué de signification à ces Reynolds… ».

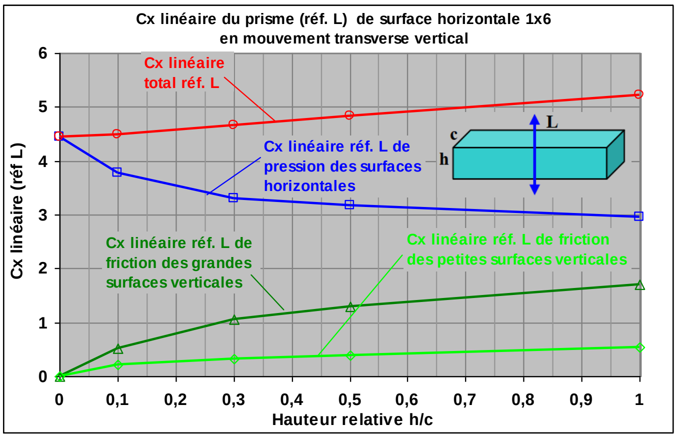
Au demeurant, le choix de ce coefficient de Traînée par ces mêmes auteurs reste assez confus puisqu'il est toujours défini en passant par le Reynolds (celui-ci étant basé sur une dimension donnée des prismes [287]).

[286] Nous n'avons pas réussi à comprendre s'il s'agit d'une amélioration ou d'une ancienne version.

[287] On gagnerait à toujours baser le Reynolds sur une longueur caractérisant l'écoulement (comme le diamètre pour le cylindre infini en déplacements transverses puisque ce diamètre est aussi la longueur de la trajectoire des particules de fluide sur le cylindre -comme la corde d'une aile est la longueur caractéristique de cette aile, s'agissant de son Reynolds-). Néanmoins, dans nos bas Reynolds, ce scrupule reste assez artificiel (puisque l'écoulement y est censé dépourvu de décollement). Il faut juste préciser que les calculs (ceux de Sunada et coll., par exemple) ne sont valides que pour des corps se déplaçant en régime de Stokes…

Prisme de largeur c, de longueur L = 6c et de hauteur h variant de c à 0 en mouvement transverse vertical :

Il est difficile de résumer en un titre le mouvement et la forme d'un parallélépipède rectangle ; mais le schéma présent dans le graphe explicite au mieux ces données :

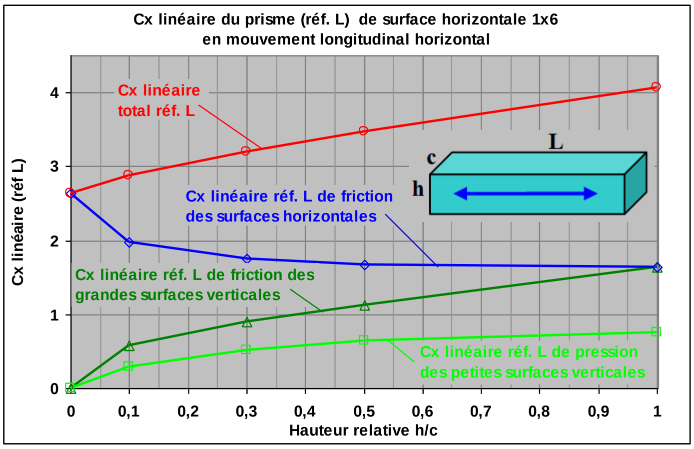


On note que lorsque la hauteur relative **h/c** varie, le **C_x** linéaire du prisme varie assez peu. Les ordonnées des courbes vertes à l'abscisse nulle sont suggérées par la logique (pas de surface => pas de force).

L'ordonnée des deux courbes rouge et bleue est donc forcément la même (le **C_x** linéaire total, à l'abscisse nulle, étant un **C_x** linéaire de friction) ; nous avons pris cette ordonnée dans un autre texte de Sunada et coll.

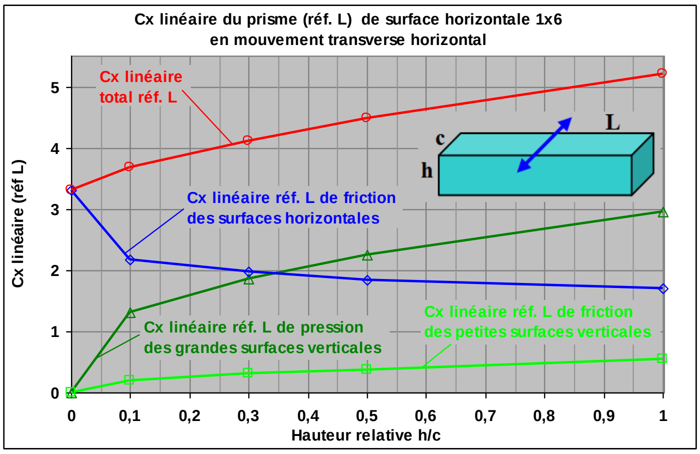
La petite remontée que cette ordonnée implique est assez curieuse (à tout le moins intéressante)…

Prisme de largeur c, de longueur L = 6c et de hauteur h variant de c à 0 en mouvement axial :



Ici aussi nous avons trouvé l'ordonnée commune des courbes supérieures dans le même autre texte de Sunada et coll.

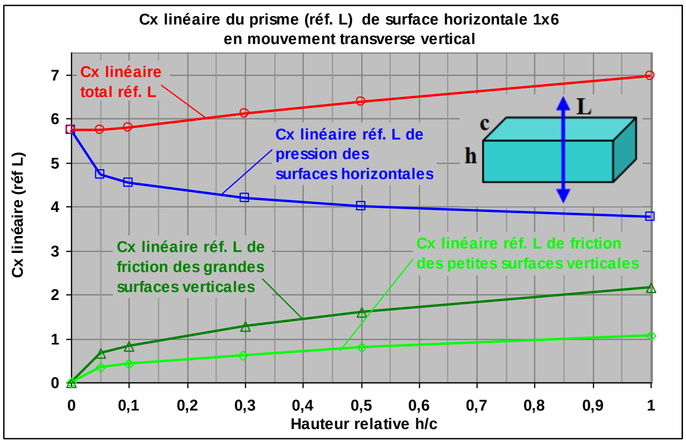
Prisme de largeur c, de longueur L = 6c et de hauteur h variant de c à 0 en mouvement transverse horizontal :



Mêmes provenance pour l'ordonnée à l'abscisse nulle des courbes rouge et bleue.

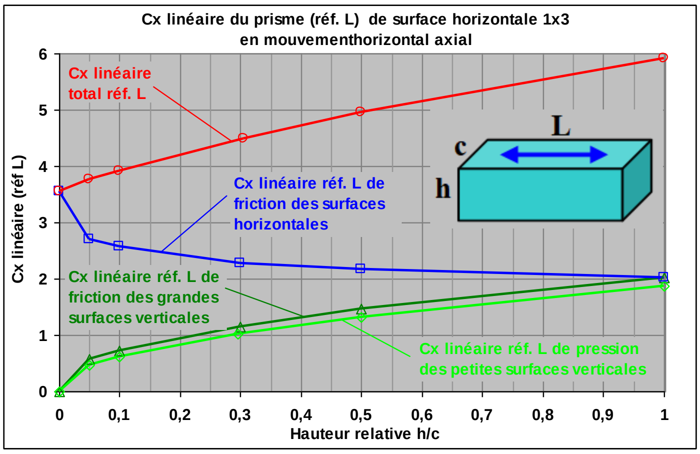
Prisme de largeur c, de longueur L = 3c et de hauteur h variant de c à 0 en mouvement transverse vertical :

Les mêmes auteurs ont étudié les caractéristiques de Traînée d'un prisme plus court :

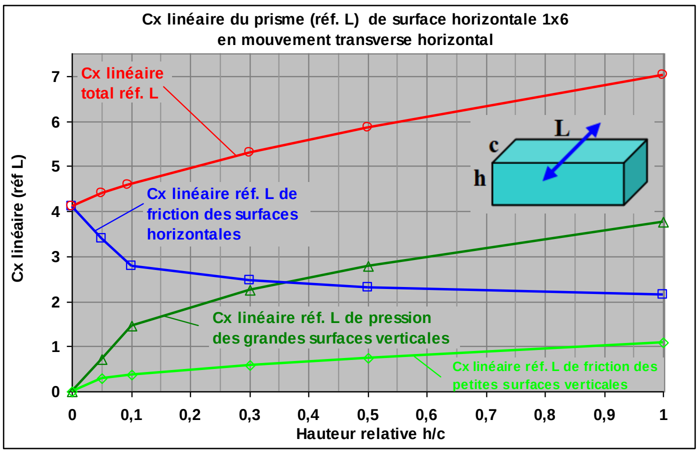


La petite remontée des courbes rouge et bleue à l'abscisse nulle (plaque infiniment mince) est également curieuse et intéressante.

Prisme de largeur c, de longueur L = 3c et de hauteur h variant de c à 0 en mouvement axial :

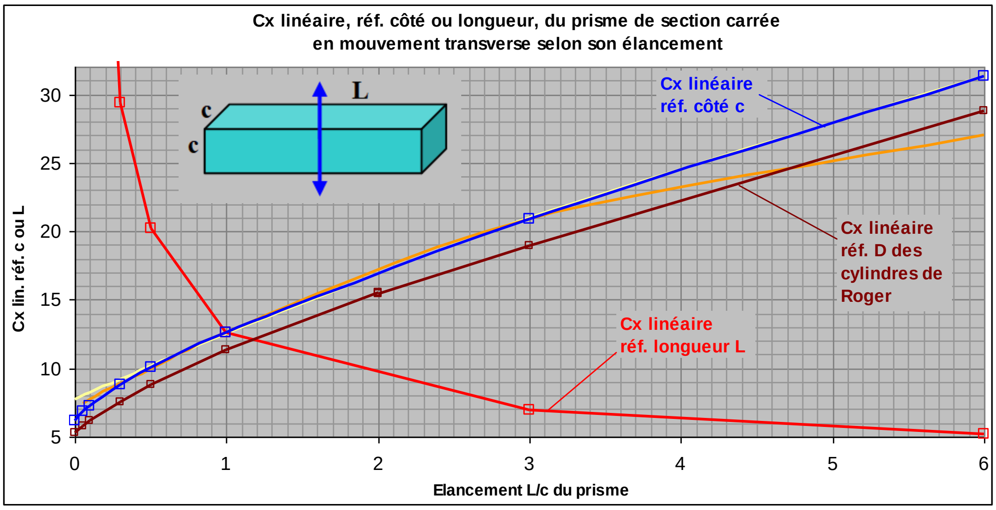


Prisme de largeur c, de longueur L = 3c et de hauteur h variant de c à 0 en mouvement transverse horizontal :



C_x linéaire du prisme de section carrée en mouvement transverse :

les résultats précédents sont passionnants. Ils nous permettent, entre autre, de dresser ce panorama du C_x linéaire du prisme de section carrée (la partie des courbes pour les abscisses inférieures à **1** étant le fruit de notre précédente exploitation de la première page du texte de Sunada et coll.) :



La courbe bleue est forte intéressante ; elle est confirmée par celle (en marron) des cylindre de Roger.

La courbe bleue admet une régression parabolique (précise à mieux que **1%**) pour les élancements allant de **0,3** à **3** :

$$\mathbf{C_{xLin.\ Réf.\ c} = -0{,}4279*\lambda^2 + 5{,}8725*\lambda + 7{,}157}$$

(c'est la courbe orange)
On note qu'elle diverge fortement après l'élancement **3**.

Pour les élancements allant de **0,5** à **6**, une autre régression est précise à mieux que **0,75%** :

$$\mathbf{C_{xLin.\ Réf.\ c} = -0{,}1597*\lambda^2 + 4{,}8804*\lambda + 7{,}7525}$$

(c'est la courbe jaune cheminant sous la bleue)

Il est inutile de rappeler que les deux courbes bleue et marron de ce dernier graphe sont essentielles en ceci qu'elles constituent les limites pour le C_x linéaire des colonnes hexagonales en mouvement transverse (ce C_x linéaire ne pouvant que se situer entre les deux) ; ces colonnes hexagonales sont très étudiées en météorologie puisqu'elles sont les formes qu'adoptent les cristaux de glace en haute atmosphère ; nous en avons déjà parlé plus haut.

Mise en forme de ces résultats de Sunada et coll. pour les étendre à tous les prismes rectangulaires :

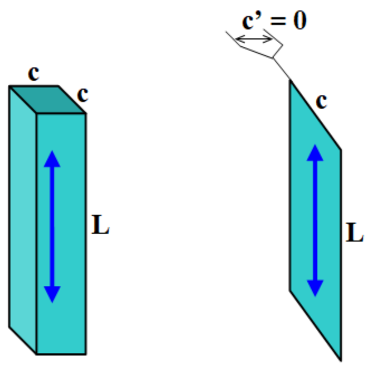
Nous avons repris la méthode que nous avons mise au point plus haut pour l'exploitation des mesures de Traînée des prismes rectangulaires effectuées par Sheaffer.

Rappelons, que pour unifier tous ces prismes, il faut adopter une définition commune pour leur élancement (et ceci quel que soit leur sens de déplacement).

De même, il faut choisir une longueur de référence commune pour le $\mathbf{C_x}$ linéaire de ces prismes, ceux-ci se présentant très différemment selon les trois mouvements possibles [288].

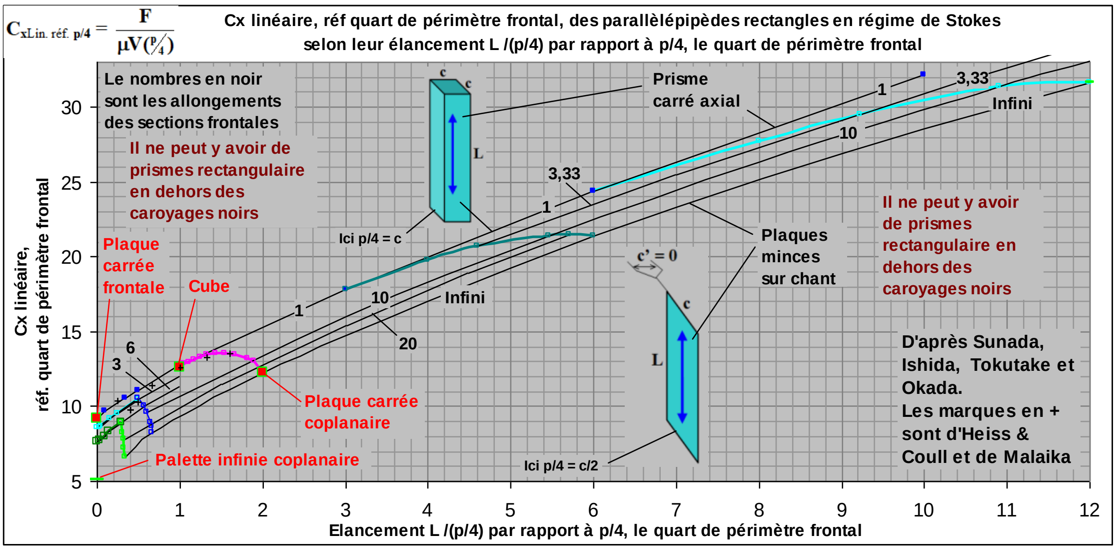
Comme pour les prismes de Sheaffer, nous avons choisi pour l'élancement le quotient de la longueur **L** (prise parallèlement au mouvement) par le quart du périmètre de la section frontale. Nous avons nommé ce quotient *l'élancement **p/4***.

Avec une telle définition, « l'élancement **p/4** » du prisme de section carrée est l'élancement classique **L/c** (schéma ci-dessous). Par contre « l'élancement **p/4** » des plaques infiniment minces décantant sur chant (c-à-d de façon coplanaire) vaut **L /(c/2)**, soit la moitié de l'élancement intuitif **L/c** par lequel on aurait pu les définir (le problème c'est que cette dernière définition *intuitive* ne peut plus être utilisée dès que ces plaques infiniment minces prennent une épaisseur **c'** (fût-elle faible) :



Munis de telles conventions (l'élancement **p/4** comme élancement et ***p/4*** comme longueur de référence pour le $\mathbf{C_x}$ linéaire), nous avons pu regrouper les caractéristiques de Traînée des prismes de Sunada et coll. sous la forme suivante :

[288] Nous voulons dire par là qu'une plaque plane doit être vue de façon très différente selon qu'elle est en déplacement frontal ou en déplacement coplanaire : dans le premier cas sa longueur dans le sens du déplacement est nulle, dans le deuxième cas ce n'est plus le cas.



Lesdits prismes de Sunada dessinent sur ce graphe les courbes de couleurs. La courbe noir supérieure à marques bleu dense carrées est aussi tirée des textes de Sunada et coll. : c'est celle du prisme carré en déplacement axial.

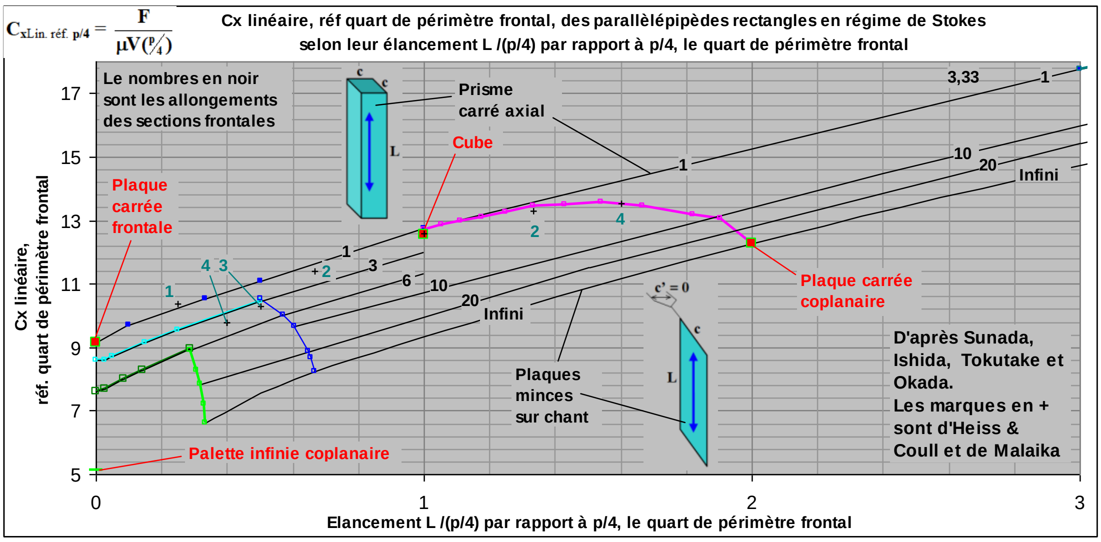
En reliant les marques de même allongement de section frontale (cet allongement étant précisé sur le graphe par des nombres noirs), nous avons tracé le carroyage de courbes noires. Ainsi qu'on l'a dit, l'allongement de la section frontale du prisme de section carrée est **1** : ce prisme dessine donc le carroyage noir du haut.

La courbe noire du bas représente le **C_x** linéaire (réf. **p/4**) des plaques minces en déplacement coplanaire (cette courbe s'appuie sur cinq marques de Sunada.

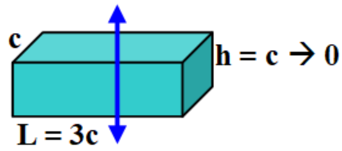
Les courbes noires intermédiaires ont juste été arrondies par nous manuellement pour suivre le mouvement des courbes noires supérieure et inférieure.

Une chose importante à réaliser est qu'<u>il ne peut exister de prismes rectangulaires en-dehors de nos carroyages</u> (en-dessous du carroyage noir marqué **Infini** et au-dessus du carroyage noir marqué **1**) (cela est rappelé sur le graphe).

Un zoom sur la partie gauche du graphe précédent décrit mieux les résultats de Sunada et coll. et met en lumière certaines de ses curiosités :



La courbe bleu clair représente les prismes d'allongement de section frontale **L/c = 3** , leur épaisseur **h** évoluant de **c** à **0** (ceci de droite à gauche sur le graphe).



(leur élancement **p/4** passe donc de **c/(8c/4)** à **0/(8c/4)** (soit de **0,5** à **0**)
(on note que l'élancement de leur section frontale est constant et égal à **3**)

La courbe vert dense représente de même les prismes d'allongement **L/c = 6**, leur épaisseur **h** évoluant également de **c** vers **0** (l'élancement de leur section frontale est constant et égal à **6**).

Au titre des curiosités de ce dernier graphe on peut remarquer l'évasement disparate des carroyages **20** et **Infini**, ceux-ci étant pourtant appuyés sur des marques des auteurs japonais.

Les facettes planes de la courbe fuchsia, quant à elles, sont peut-être révélatrices d'imprécisions de nos relevés (plutôt que des calculs de Sunada et coll.). Nous ne parlons pas ici de la facette de droite conduisant à la plaque carrée coplanaire qui pourait être arrondie par des valeurs intermédiaires mais bien, par exemple, de la facette existant entre les abscisses **1,66** et **1,9**. Ces imprécisons sont sans importance dans la pratique (en erreur **%**), mais elles peuvent attirer l'attention sur d'éventuelles erreurs…

Toujours sur ce dernier graphe, nous avons porté en bleu glauque l'allongement des marques expérimentales en **+** de Malaika et Heiss & Coull : leur répartition ne contredit pas nos carroyages.

Ces panoramas, basés sur les valeurs de Sunada que nous croyons exactes, nous apparaissent donc très seyants.

La courbe pour l'allongement **10** nous étant apparue comme une simple translation verticale de la courbe pour l'allongement **1**, et l'échelonnement des courbes étant très régulier, nous avons pensé à construire une régression générale donnant le C_x linéaire de n'importe quel prisme (dans certaines limites d'allongement et d'élancement).

Voici le libellé de cette régression générale dans la langue de notre tableur :

= 0,0104*B13^3 -0,219*B13^2 +3,43*B13 +9,741 -0,0012*F11^3 +0,0318*F11^2 -0,4119*F11

…du moins si B13 est l'élancement **p/4** du prisme et si F11 est l'allongement de sa section frontale.

Dans la plage d'élancements **p/4** allant de **1** et **8** et pour un allongement de section frontale compris entre **1** et **10**, cette régression ne commet que des erreurs inférieures ou égales à **1%**.

Cette régression rendra peut-être des services…

S'agissant d'allongements de section frontale plus forts (allongements au-delà de **40** ou **50**) la régression :

= 0,0052*B13^3 -0,17* B13 ^2 + 3,44* B13 + 5,8 +33/(F11+8,45)

…donne le C_x linéaire (réf. **p/4**) des prismes d'élancement **1** à **12** à moins de **3%** près, toujours si B13 est l'élancement **p/4** du prisme et si F11 est l'allongement de sa section frontale.…

Comparaison de ce carroyage (d'après Sunada et coll.) avec celui que nous avions construit d'après les prismes de Sheaffer :

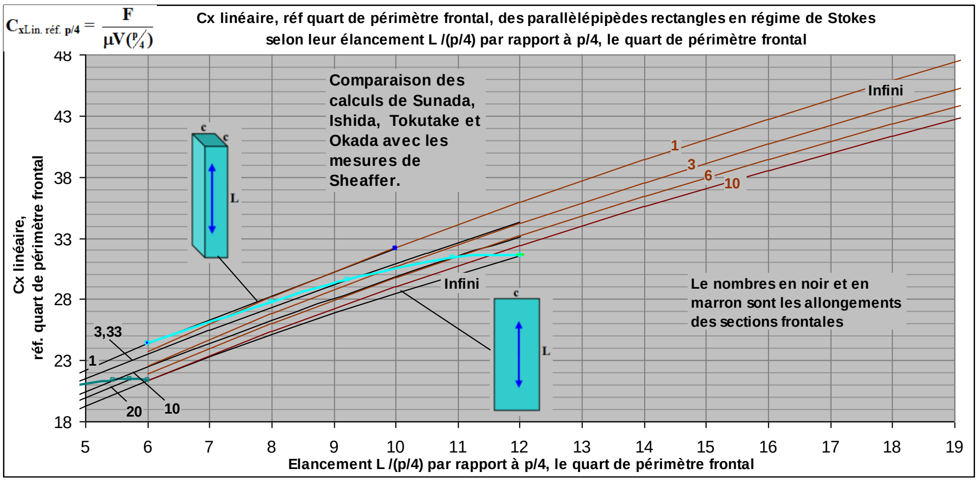
Comme nous l'avons déjà dit, nous pensons que les auteurs japonais disent le vrai. Encore faut-il que ce vrai soit compatible avec les mesures de Sheaffer que nous avons exploité plus haut.

À la fin de notre exploitation des mesures de Sheaffer, nous avions émis une régression valide pour les élancements **p/4** allant de **6** à **19** et pour les allongements de section frontale allant de **1** à **10** :

$$C_{x\text{lin Réf.L}} = 8{,}1\ \text{All}^{-0{,}045}\ \text{Élan}^{-0{,}4}$$

…**All** étant l'allongement de la section frontale des prismes et **Élan** leur élancement **p/4**.

Voici les carroyages (**1**, **3**, **6** et **10**) que dessine cette régression (en marron) :



On remarque que ces carroyages marron sont bien dans le bon ordre de grandeur.

Nous sommes donc ici témoins d'une rencontre plutôt satisfaisante entre les très difficiles mesures en bassin de décantation et les calculs mathématiques de Sunada et coll.

Comme nous l'avons assez dit, cependant, nous pensons que ce sont ces calculs mathématiques qui disent la vérité.

Extension de la plage de Stokes vers de plus hauts Reynolds :
Extension de la plage de Stokes pour la sphère :

Les travaux d'Oseen puis de Lamb, ont apporté une correction à la Traînée de Stokes pour la sphère dans la plage de Reynolds de **0,1** à **5**. Dans cette plage, ils proposent une relation assez simple donnant le $\mathbf{C_x}$ quadratique selon le Reynolds :

$$C_{xQuad} = \frac{24}{Re_D} + \frac{9}{2}$$

On rencontre souvent également la présentation :

$$C_{xQuad} = \frac{24}{Re_D}\left[1 + \frac{3Re_D}{16}\right]$$

Cette valeur du $\mathbf{C_x}$ quadratique est donnée par certaines sources pour être conforme à la réalité expérimentale depuis les très faibles Reynolds diamétraux jusqu'au Reynolds de **5**, mais elle semble convenir plutôt jusqu'au Reynolds **unitaire** (nous le verrons plus bas). [289] [290]

Il nous incombe de vérifier que notre coefficient linéaire peut accepter cette correction d'Oseen-Lamb. Calculons la Traînée de la sphère à ces Reynolds :

Cette Traînée est :

$$F = \tfrac{1}{2}\rho V^2 (\pi D^2/4)\, C_{xQuad}$$

…c'est-à-dire :

$$F = \tfrac{1}{2}\rho V^2(\pi D^2/4)\left[\frac{24}{Re_D} + \frac{9}{2}\right]$$

$$F = \tfrac{1}{2}\rho V^2(\pi D^2/4)\left[\frac{24}{Re_D}\right] + \tfrac{1}{2}\rho V^2(\pi D^2/4)\left[\frac{9}{2}\right]$$

Intéressons-nous au premier terme de cette équation. Nous en avons déjà effectué la simplification plus haut en donnant au $\mathbf{R}_{eD}$ sa valeur :

$$R_{eD} = \frac{VD}{\nu} = \frac{VD}{\frac{\mu}{\rho}}$$

Ce premier terme se réduit alors en :

$$\tfrac{1}{2}\rho V^2(\pi D^2/4)\left[\frac{24\mu}{VD\rho}\right] = 3\pi\mu VD$$

[289] Le libellé de cette correction d'Oseen-Lamb montre bien à quel point le $\mathbf{C_x}$ quadratique est fort aux faibles Reynolds puisqu'il suffit d'y ajouter **9/2** pour en corriger la valeur dans la plage d'Oseen et ceci sans en modifier significativement la valeur pour plus les faibles Reynolds.

[290] En fait, les travaux de Clift, Grace et Weber, qui font autorité, proposent un autre libellé, valide pour $\mathbf{0{,}01 < R_{eD} < 20}$:

$\mathbf{C_{xQuad} = [24/R_{eD}]\,[1 + 0{,}1315\, R_{eD}^{(0{,}82-0{,}05 Log_{10}(R_{eD}))}]}$ (voir notre texte Le C_x de la sphère).

Quant au deuxième terme, on peut d'ores et déjà prendre conscience qu'il est le produit d'un coefficient **9/2** par la Pression Dynamique et par la section frontale de la sphère.

La Traînée de la sphère en régime d'Oseen-Lamb s'avère donc être la somme de la Traînée linéaire **3πμVD** et d'un reliquat de Traînée quadratique **9/2 q S** :

$$F = 3\pi\mu VD + \frac{9}{2} q\, S$$

Le coefficient $\frac{9}{2}$ est donc le C_x quadratique qui existe de façon latente (non significative) en régime de Stokes mais qui commence à s'exprimer en régime d'Oseen-Lamb.

Mais il est possible d'aller plus loin et de formaliser notre C_x linéaire en régime de Stokes–Oseen-Lamb. Dans ces deux plages contigües, le deuxième terme de la Traînée de la sphère (le terme quadratique, nous venons de le dire), à savoir :

$$½\, \rho V^2(\pi D^2/4) \left[\frac{9}{2}\right]$$

…peut s'écrire encore :

$$\frac{9}{16} \pi\, \rho V^2 D^2\, \frac{\mu VD}{\mu VD}$$

…soit :

$$\frac{9}{16} \pi\, \mu VD\, \frac{\rho VD}{\mu}$$

…où l'on reconnaît, dans le dernier quotient, le Reynolds R_{eD}.

Ce deuxième terme (terme quadratique) de la Traînée de la sphère s'écrit donc :

$$\frac{9}{16} \pi\, \mu VD\, R_{eD}$$

La Traînée complète de la dite sphère est donc :

$$F = 3\pi\mu VD + \frac{9}{16} \pi\, \mu VD\, R_{eD}$$

Or nous avons défini notre C_x linéaire comme le quotient de la Traînée par **μVD**.

Le C_x linéaire de la sphère sur les plages conjointes de Stokes et Oseen-Lamb est donc :

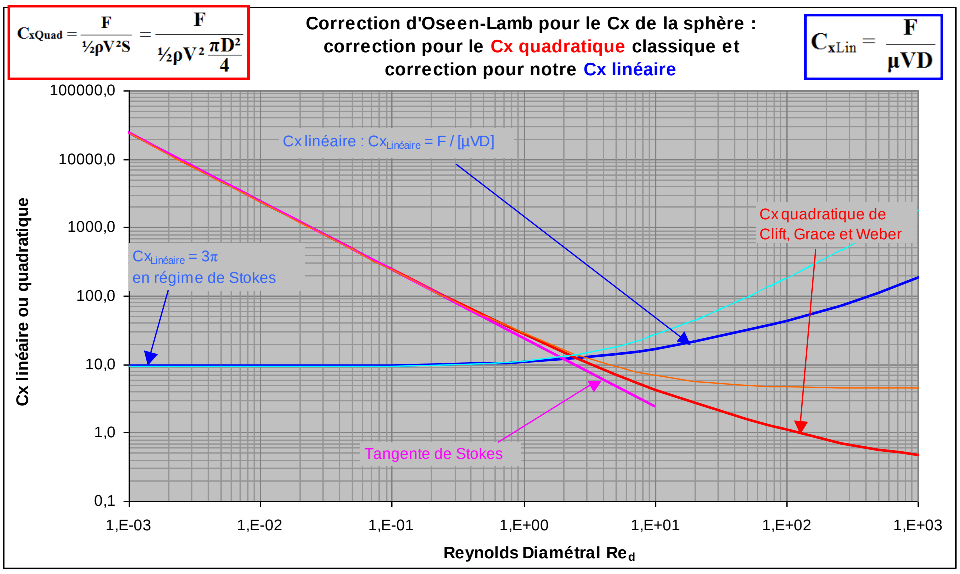
$$\boxed{C_{xLin} = 3\pi + \frac{9}{16}\pi\, R_{eD}}$$

…qui est notre C_x linéaire de la sphère sur les plages conjointes de Stokes et d'Oseen-Lamb. Comme le libellé du C_x quadratique d'Oseen-Lamb d'après lequel nous l'avons calculé, il est valide jusqu'au Reynolds diamétral de **5**, bien que certains auteurs le juge plutôt valide jusqu'au Reynolds unitaire.

Observons que le coefficient $9\pi/16$ vaut $\approx$ **1,77**. Pour les Reynolds petits, par exemple **0,1**, ce deuxième terme (qui est le reliquat quadratique de la Traînée) vaut donc **0,177** qui est petit devant 3π.

Par contre, pour les Reynolds supérieurs, ce reliquat quadratique devient plus significatif. Pour le Reynolds (limite) de **5**, il vaut presque autant que le terme linéaire 3π.

Voici une représentation de ces corrections d'Oseen-Lamb par note tableur (en orange pour le C_x quadratique et en bleu clair pour le C_x linéaire) :



La correction d'Oseen-Lamb pour le C_x quadratique (en orange) peut être comparée avec la courbe standard de Clift, Grace et Weber (en rouge), ladite courbe standard représentant la réalité expérimentale : il apparaît que cette correction d'Oseen-Lamb est bonne jusqu'au Reynolds unitaire mais un trop forte au-dessus du Reynolds unitaire et spécialement pour le Reynolds de **5** qui devait constituer sa limite (bien que cette appréciation dépend évidemment du degré de précision requis).

Au demeurant, Clift, Grace et Weber proposent une équation qui recouvre assez bien leur courbe standard rouge (formée, quant à elle, de 3 segments de courbes différentes, voir à ce sujet notre texte LE C_x DE LA SPHÈRE). Cette équation *osculatrice* est valide jusqu'au Reynolds de 1000 ! :

$$C_{xQuad} = \frac{24\left[1 + 0{,}15 Re_D^{0{,}687}\right]}{Re_D}$$

…ce qui s'écrit encore :

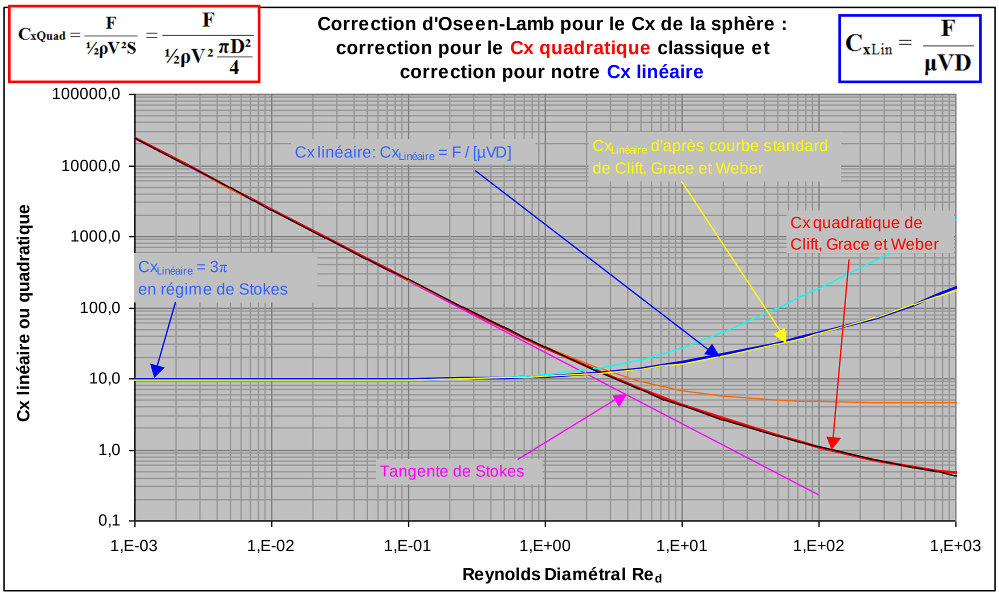
$$C_{xQuad} = \frac{24}{Re_D} + 3{,}6 Re_D^{-0{,}313}$$

Un travail identique à celui que nous avons effectué à partir de la correction d'Oseen-Lamb conduit à un $\mathbf{C_x}$ linéaire pour la sphère sur la plage de Stokes et sur la plage de Clift, Grace et Weber (appelons-là comme ça), cette plage s'étendant jusqu'au Reynolds de **1000** :

$$\boxed{C_{xLin} = 3\pi + \frac{9\pi}{2} R_{eD}^{0{,}687}}$$

…$\mathbf{C_x}$ linéaire de la sphère, corrigé à partir des travaux de Clift, Grace et Weber, valable depuis les très petits Reynolds jusqu'au Reynolds **1000**.

Comme prévisible, ce libellé dessine la courbe jaune ci-dessous qui se trouve dans l'épaisseur du trait bleu dense (ce trait représentant notre $\mathbf{C_x}$ linéaire tiré précédemment de la version in extenso de la courbe de Clift, Grace et Weber) :

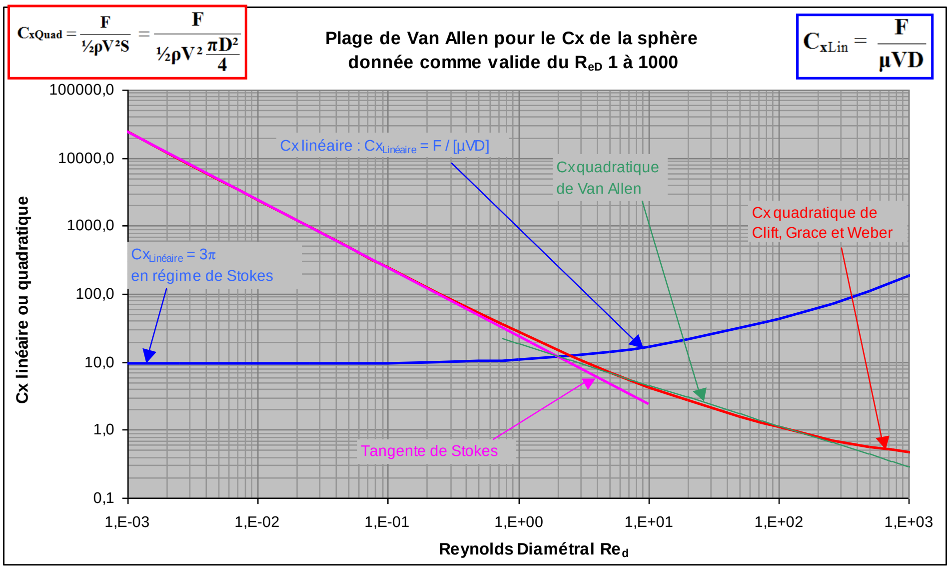


Le trait noir sur la courbe rouge est le libellé en $\mathbf{R_{eD}^{0,687}}$ proposé par Clift Grace et Weber…

Une autre extension de la plage de Stokes est connue comme la plage de Van Allen : elle s'étend depuis le Reynolds **1** au Reynolds **1000**. Elle donne un $\mathbf{C_x}$ quadratique valant :

$$C_{xQuad} = \frac{18{,}5}{R_{eD}^{0{,}6}}$$

Comme l'indique sa formulation, et <u>quels que soient ses mérites théoriques</u>, elle dessine, sur nos graphes Log/Log, un segment de droite (segment vert) qui est assez loin de la courbe rouge standard du $\mathbf{C_x}$ quadratique dans cette plage :



Après conversion, le C_x linéaire, dans cette plage de Van Allen, est donc :

$$C_{xLin} = 7{,}265\ R_{eD}^{0,4}$$

Extension de la plage de Stokes pour le disque :

Le graphe déjà présenté donne une représentation du C_x quadratique du disque, à ceci près, comme nous l'avons déjà dit, que le petit sommet au Reynolds de **300** n'est pas accepté par Clift et coll.. Au contraire, ceux-ci optent pour une constance du C_x quadratique (à la valeur **1,17**) dès les Reynolds supérieurs à **133** [291].

Bien-sûr, pour un corps comme le disque (mais également pour d'autres corps, en dehors de la sphère) se pose le problème de la stabilité de route :

→ en premier lieu il faut constater qu'en régime intermédiaire [292], un disque non fixé ou libre tend à se placer en travers de l'écoulement, c.-à-d. de façon à présenter sa plus grande section face à l'écoulement [293]. Cette tendance à la mise en travers est une constante dans la plage de Newton (les grand Reynolds où les forces d'inertie dominent) et elle impose la nécessité d'empennages aux aéronefs, sous-marins et projectiles [294].

Dans cette plage des grands Reynolds, la tendance du disque à se mettre en travers a été constatée par Eiffel au moyen de relevés du déplacement du point d'application des efforts aérodynamiques [295]. Cette tendance n'est cependant constatable

[291] "There is some indication that C_D passes through a minimum of about 1.03 for Re ≈ 400 […], but most data are correlated within 10% by Eq. (6-3) with C_D = 1.17 for Re >133."

[292] Par *régime intermédiaire* il est signifié : *régime un peu au dessus du régime de Stokes*.

[293] "In the intermediate regime, particles adopt preferred orientations and C_D , varies with Re although less strongly than at low Re. Particles usually align themselves with their maximum cross section normal to the direction of relative motion […]. In this regime there is no appreciable secondary motion so that results for flow past fixed objects of the ame shape can be used if the orientation corresponds to a preferred orientation.

[294] …quand la stabilisation de ces mobiles n'est pas obtenue par d'autre moyen tel la stabilisation gyroscopique (pour les obus) ou par orientation très vive de la propulsion (comme pour les fusées actuelles).

[295] Par raison de symétrie, le Centre des efforts aérodynamique est forcément au centre du disque lorsque celui-ci se présente de façon normale (donc *en travers*). Mais dès que le même disque cesse d'être

que *statiquement* car l'inertie du corps tend, bien-sûr, à le faire tourbillonner comme un confetti [296].

On peut donc voir la tendance des particules à se mettre en travers dans un écoulement en régime intermédiaire comme les prémisses de l'influence de l'écoulement inertiel (qui prédominera aux forts Reynolds). Cet écoulement inertiel commence donc à se faire sentir en régime intermédiaire, mais la prééminence des effets de viscosité dans ce régime intermédiaire amortit [297] ses effets oscillatoires.

→ en second lieu il faut prendre conscience qu'un disque non fixé ou *libre* (en chute « aérienne » frontale [298] par exemple, ou en chute frontale dans un liquide) adopte une trajectoire en feuille morte dès que le Reynolds devient assez fort, ceci sous l'effet des efforts d'inertie (devenus plus forts alors que les effets *amortissant* de la viscosité diminuent). Clift et coll. relaye sur ce point les apports de Willmarth et coll. qui ont montré que les mouvements secondaires [299] d'un disque en *chute libre* apparaissaient à partir d'un certain Moment d'Inertie adimensionnel **I*** :

$$\mathbf{I^* = \pi \gamma E / 64}$$

…égalité où γ est le quotient ρ_p / ρ_f (quotient de la Masse volumique de la particule sur celle du fluide) et **E** est le quotient de l'épaisseur du disque sur son diamètre (son élancement, finalement).

Ce Moment d'Inertie adimensionnel sera donc plus faible (et donc moins capable de déclencher des mouvements *secondaires*) pour des Masses Volumiques de la particule plus proche de celle du fluide (donc moins de tendance à la chute et peut-être moins d'inertie) et pour des élancements **E** plus faibles (les disques en devenant également moins pesant et de moindre inertie)…

Le graphe 6.3 de la page 145 de l'ouvrage de Clift, Grace et Weber indique que c'est à peu près à partir du Reynolds de **100** que se fait sentir l'influence de ce Moment d'Inertie adimensionnel **I*** [300] : en dessous de ce Reynolds de **100**, le disque chute de façon stable (comme s'il était fixé) quel que soit **I***. Au-dessus il est l'objet de mouvement secondaires d'oscillations qui ont la vertu d'augmenter son $\mathbf{C_x}$ et cette augmentation de $\mathbf{C_x}$ est d'autant plus forte que **I*** est grand.

Nous avons saisi ce graphe 6.3 qui fait le point sur la Traînée du disque pour le régime dit *intermédiaire* (régime situé au-dessus du régime de Stokes où certains effets de l'inertie commencent à se faire sentir :

normal (qu'il prend de l'incidence d'un côté ou de l'autre), le Centre des efforts se déplace rapidement vers ce qui est devenu son bord d'attaque.

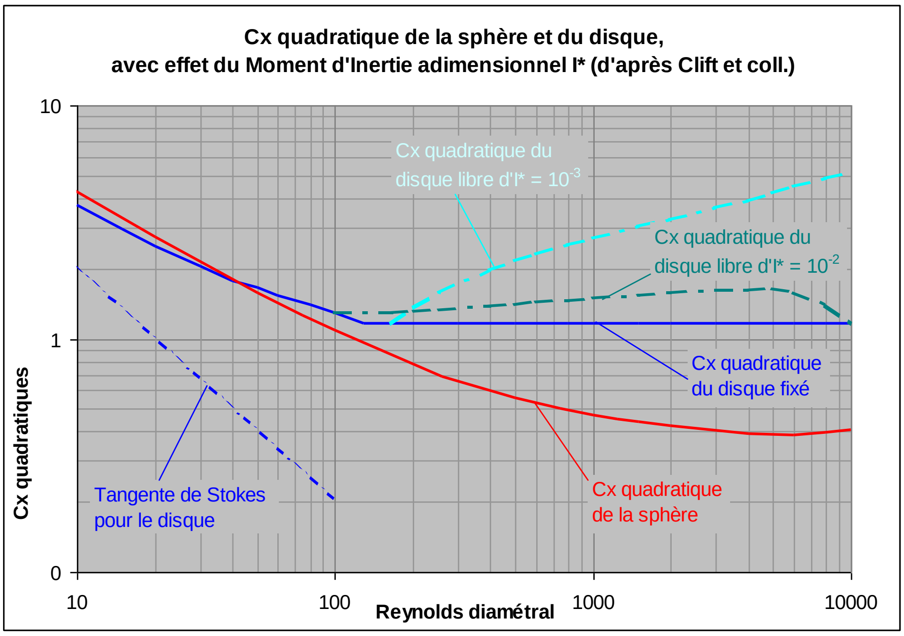
[296] Cette tendance *statique* à la stabilité peut être mise en lumière si l'on amorti suffisamment (par un frottement visqueux) le mouvement du disque…

[297] En utilisant le mot *amortit* nous voulons bien évoquer la *dissipation d'énergie* qui se produit dans les *amortisseurs* d'un véhicule.

[298] Par *frontale* nous voulons dire *déplacement du disque perpendiculairement à son plan*.

[299] Par *mouvement secondaire* ces auteurs signifient que le disque cesse de présenter un unique mouvement de translation vertical mais commence à osciller et à sortir de son plan.

[300] "For 0.1 < $\mathbf{R}_{eT}$ < 100 [$\mathbf{R}_{eT}$ étant le Reynolds du disque à sa vitesse de chute stabilisée ou *terminale*] […] a disk in free motion moves steadily with its axis vertical (McNown. J. S., and Malaika. J.) and the drag is identical to that on a fixed disk at the same relative velocity."



Le $\mathbf{C_x}$ quadratique de la sphère est reproduit ici en rouge pour comparaison.

Comme on le voit à gauche du graphe, pour le Reynolds **10**, le $\mathbf{C_x}$ quadratique du disque fixé s'est écarté de la droite où il est confiné en régime de Stokes (droite que nous avons nommée *tangente de Stokes pour le disque)*.

La cassure de la courbe bleue dense (celle relative au disque *fixé*) un peu au-dessus du Reynolds **100** a été voulue par Clift et ses collègues.

Au-dessus du même Reynolds **100** l'influence de l'inertie commence à créer des oscillations dans le mouvement du disque libre : ainsi que nous l'avons dit à l'instant, le critère de déclenchement de ces oscillations est, pour Willmarth et coll., le Moment d'Inertie adimensionnel **I***. Clift et coll. précisent bien, cependant, que les deux courbes bleu clair et bleu glauque sont approximatives…

Il nous est bien-sûr aisé de transformer en $\mathbf{C_x}$ linéaires tous les $\mathbf{C_x}$ quadratiques représentés ci-dessus en ordonnées.

À titre d'ultime révision, effectuons cette transformation : il suffit pour ce faire de se baser sur les définitions du $\mathbf{C_x}$ quadratique usuel et du $\mathbf{C_x}$ linéaire dont nous faisons la promotion :

$$\mathbf{C_{xQuad}} = \frac{\mathbf{F}}{\frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}\mathbf{V}^2\frac{\boldsymbol{\pi}\mathbf{D}^2}{\mathbf{4}}}$$

(quotient où $\boldsymbol{\pi}$ **D²/4** exprime la section frontale de la sphère ou du disque)

Il est licite de recombiner **ρV** et **D** comme ci-dessous, en faisant apparaître **μ** :

$$\mathbf{C_{xQuad}} = \frac{\mathbf{8F}}{\frac{\boldsymbol{\rho}\mathbf{VD}}{\boldsymbol{\mu}}\boldsymbol{\mu}\mathbf{V}\boldsymbol{\pi}\mathbf{D}}$$

…ce qui conduit à :

$$C_{xQuad} = \frac{8F}{R_{eD}\ \pi\mu VD}$$

Il suffit à présent de reconnaître dans une partie de ce quotient la définition de notre $\mathbf{C_x}$ linéaire, à savoir :

$$C_{xLin} = \frac{F}{\mu VD}$$

…pour s'autoriser à écrire :

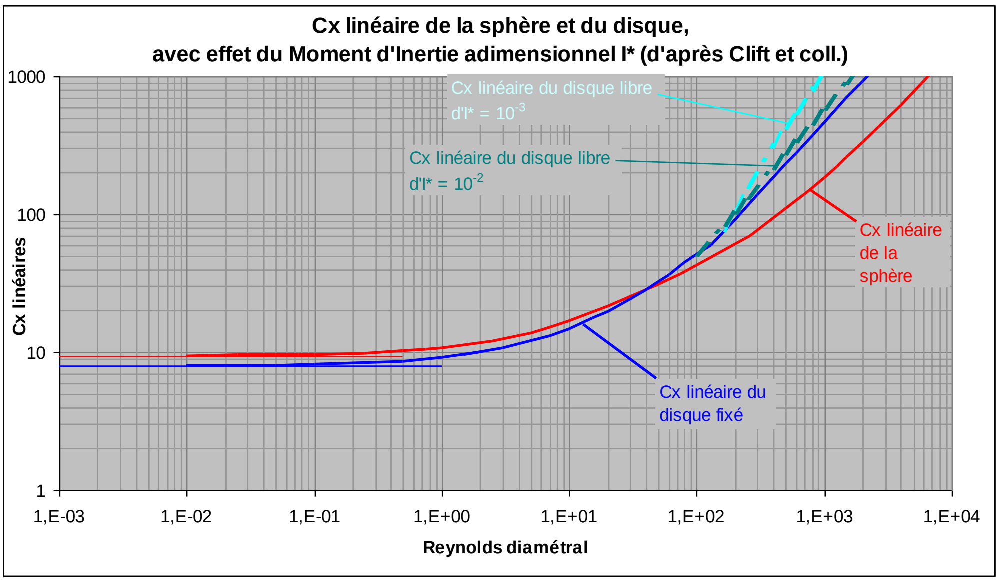
$$C_{xQuad} = \frac{8\ C_{xLin}}{\pi\ R_{eD}}$$

ou évidemment :

$$C_{xLin} = \frac{\pi}{8}\ R_{eD}\ C_{xQuad}$$

…ces deux égalités n'étant valables que pour les $\mathbf{C_x}$ quadratiques référencés à leur surface frontale (comme ici le disque et la sphère) et pour des $\mathbf{C_x}$ linéaires référencés à leur diamètre (comme nous l'avons fait pour le disque et la sphère)…[301]

Voilà ce que donne cette transformation (nous avons étendu la plage de Reynolds vers le bas selon les indications de Clift et coll.) :



Les $\mathbf{C_x}$ linéaires du disque et de la sphère rejoignent leur valeur constante aux alentours du Reynolds **0,1**.

La mise en garde de Clift et coll. doit être réitérée pour les courbes bleu clair et bleu glauque : ces courbes ne sont qu'approximatives…

[301] En l'occurrence, il faut toujours se référer à la définition des $\mathbf{C_x}$ quadratique et linéaire à partir de la force de Traînée en newtons…

Au demeurant, la stabilité des corps non fixés (en chute *libre* dans un fluide) sort du cadre de ce texte [302].

S'agissant à présent des cylindres d'élancement faible à infini, nous avons d'autre part déjà montré l'évolution de leur C_x quadratique (puis de leur C_x linéaire) en dehors de la plage de Stokes telle que relayée par Wang et Wusheng dans leur texte.

Extension hors de la plage de Stoke pour le cylindre de longueur finie :

Nous avons consacré plus haut un paragraphe aux expériences de Jayaweera et Cottis et nous les avons comparées avec celles de Kajikawa. Le graphe qui termine ce paragraphe pourra servir de modèle pour l'extension du C_x linéaire hors de la plage de Stokes.

Extension hors de la plage de Stokes et d'Oseen pour le cylindre infini par Burke Huner :

En 1977, Burke Huner a publié une thèse portant sur ses expérimentations de décantation transverse de cylindres d'acier dans deux huiles à des Reynolds allant de **0,23** à **2,6**.

Les cylindres présentaient des diamètres allant de **~ 0,5 mm** à presque **1 mm** ; leur élancement **L/D** allaient de **9,40** à **48,90** et leur Masse Efficiente (la différence entre leur masse et la masse du fluide déplacé) de **11,9 mg** à **225,6 mg**.

Comme on le sait, le produit de cette Masse Efficiente par l'accélération locale de la pesanteur donne leur Poids Efficient qui est également, en valeur absolue, la Traînée.

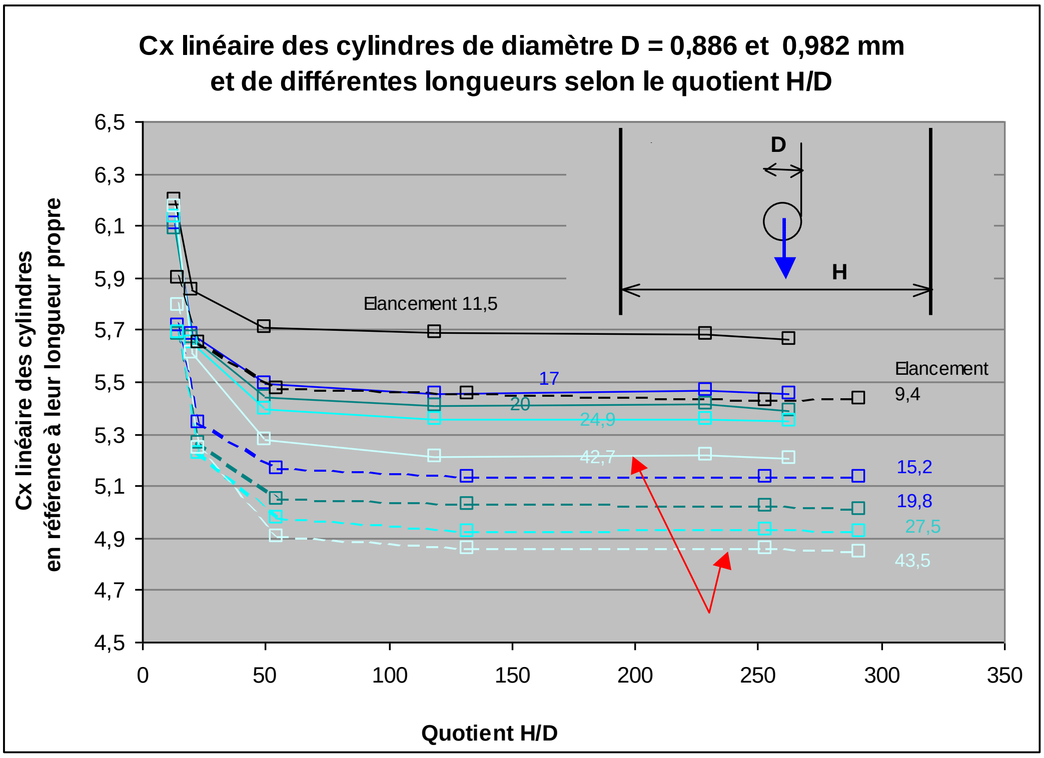
La cuve où décantaient les cylindres d'Huner était de section horizontale carrée (**25,8** x **50 cm**). Le fluide avait une profondeur de **27 cm**.

La longueur des cylindres était bien-sûr présentée parallèlement à la longueur de la cuve.

Huner a réduit progressivement la largeur de la cuve de **25,8 cm** à **1,30 cm** de façon a observer l'influence de ces parois verticales sur la Traînée des cylindres.

Il a obtenu ce graphe, où les abscisses sont le rapport de la largeur **H** de la cuve au diamètre **D** des cylindres :

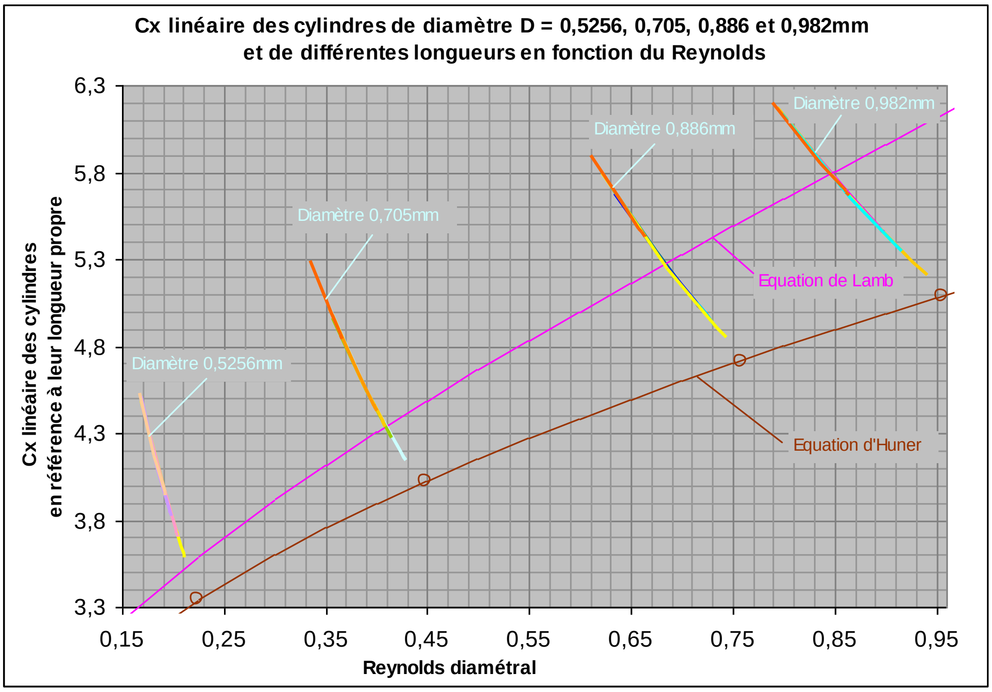
[302] Ceci bien que ce soit par les notions de stabilité (en l'occurrence stabilité des fusées) que nous avons commencé notre promenade dans la Mécanique des Fluides, il y a quelques dizaines d'années…



On peut constater que, quel que soit le diamètre des cylindres, il faut que les parois soient écartées d'au moins **50** ou **100** fois le diamètre pour qu'elles soient sans effet. C'est plus faible que ce qu'indiquait White, mais il convient de noter que le Reynolds des expériences d'Huner est de l'ordre de l'unité.

Les deux flèches rouge attirent l'attention sur le fait qu'il y a, dans ce graphe, deux échelonnements en ordonnées (un par fluide).

En reprenant les mêmes résultats d'expériences que précédemment et en y ajoutant les résultats pour les deux autres diamètres, <u>mais en les présentant d'une façon différente de celle d'Huner</u>, nous avons obtenu ce curieux graphe :



(nous reviendrons plus bas sur la courbe marron marquée « Équation d'Huner »)

On constate avec surprise que les $\mathbf{C_x}$ linéaires de ces quatre jeux de cylindres de différentes longueurs ($\mathbf{C_x}$ linéaires en référence à leur longueur propre) se recouvrent, dessinant quatre famille de courbes assez tendues se chevauchant l'une l'autre (familles de courbes que nous nommerons courbes arc-en-ciel).

Les marques qui dessinent chacune des courbes constitutives de ces arc-en-ciel correspondent à des élancements allant de courts entre des parois proches (en haut de chaque courbe) à long entre des parois *suffisamment* éloignées (en bas de chaque courbe).

Il apparaît alors que le $\mathbf{C_x}$ linéaire de cylindre de longueur infinie décantant dans un fluide non borné trouverait sa place dans le prolongement de chaque famille de courbes arc-en-ciel sur la courbe marron (nous y reviendrons).

La courbe de Lamb (en fuchsia), quant à elle, est disqualifiée en ces trop hauts Reynolds.

Après étude de ce phénomène (qu'Huner n'a pas décrit), on en trouve l'explication en explicitant la valeur du Reynolds diamétral de chaque cylindre :

$$\mathbf{R_{eD}} = \frac{\mathbf{VD}}{\boldsymbol{\nu}}$$

En effet **VD** (produit de la vitesse de décantation par le diamètre du cylindre) vaut aussi **VL*D/L**. Or **VL**, par définition du $\mathbf{C_x}$ linéaire [303], peut être exprimé de la façon suivante :

$$\mathbf{VL} = \frac{\mathbf{F_{tot}}}{\boldsymbol{\mu}\ \mathbf{C_{xlinRéf\,.L}}}$$

…égalité où $\mathbf{F_{tot}}$ est la force de Traînée en Newton.

D'où l'on peut tirer l'égalité déjà établie plus haut :

$$\mathbf{R_{eD}} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{4}}\frac{\mathbf{C}}{\mathbf{C_{xLinRéf\,.L}}}$$

…où $\mathbf{C} = \dfrac{(\rho_{cyl} - \rho_f)\rho_f\ \mathbf{D^3 g}}{\mu^2}$, ce critère ayant déjà été posé également plus haut lors de notre résolution de l'équation de Lamb *irrésolue* en décantation.

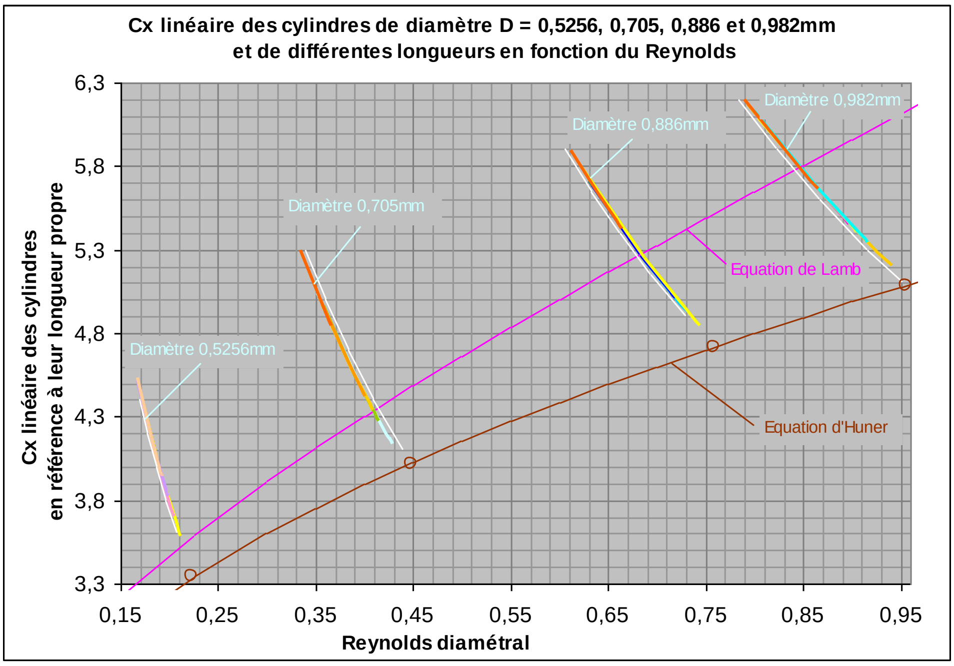
Cette valeur du Reynolds diamétral n'a nécessité aucune prise d'option physique : elle est juste une construction mathématique basée sur la définition du Reynolds diamétral et la définition du $\mathbf{C_x}$ linéaire.

[303] Rappelons que la définition mathématique du $\mathbf{C_x}$ linéaire est valide dans ce régime non strictement de Stokes même si elle y a une signification physique plus lâche, de la même façon que la définition du $\mathbf{C_x}$ quadratique est valide dans tous les régimes, même dans ceux où elle n'a pas de signification physique…

S'agissant de la décantation des cylindres, il est alors très utile de noter que le critère **C** reste constant pour chaque diamètre (à gravité, fluide et Masse Volumique des cylindres constants) ceci quel que soit l'élancement des cylindres.

On tire alors facilement de tout cela la conclusion que, pour chaque diamètre (donc pour chaque **C**), $\mathbf{C_x}$ linéaire et Reynolds diamétral sont liés par une relation hyperbolique écrite ci-dessus.

En calculant le critère **C** pour chaque diamètre de cylindre (les autres paramètres de **C** restant inchangés) nous avons alors pu dessiner les quatre tronçons d'hyperboles pour les Reynolds fréquentés par les quatre cylindres ; ce sont les quatre courbes blanches très proches de chaque arc-en ciel de courbes ci-dessous :



Pour déterminer **C**, nous avons utilisé la Masse Volumique moyenne de **7892 Kg/m** tirée de l'analyse des Poids Efficients au mètre (donc la Traînée au mètre) donnés par Huner (pour chaque diamètre). Celui-ci a en effet déterminé directement, par pesée, le Poids Efficient de chaque cylindre baignant dans l'huile [304].

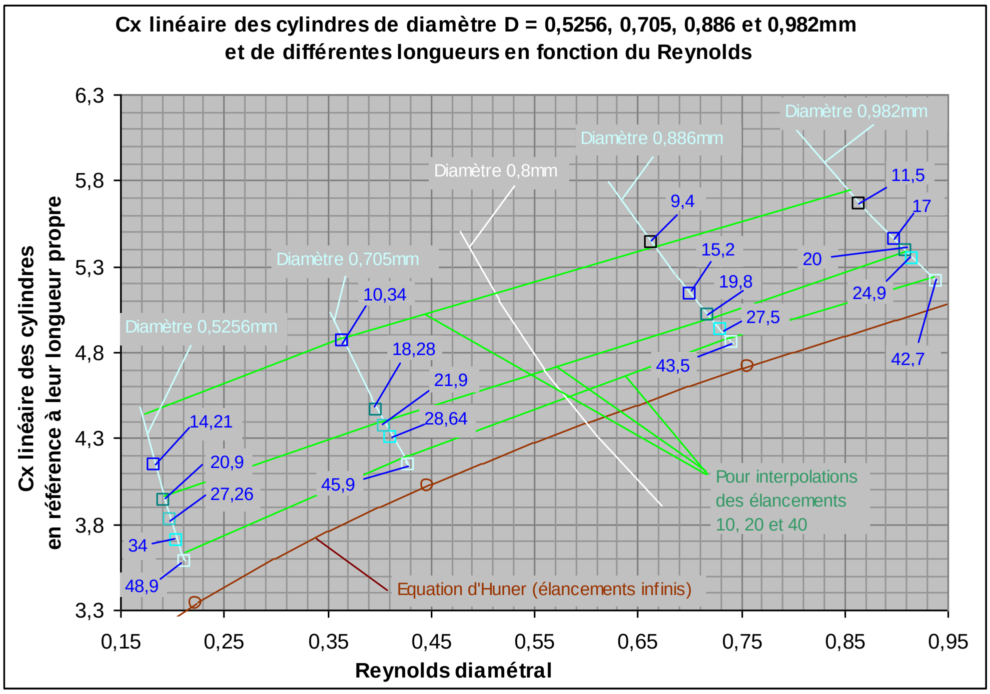
Le critère **C** que nous avons utilisé plus haut pour les cylindres de longueur infinie apparaît donc justifié même ici pour des cylindres de longueurs courtes à modérées.

En d'autres termes, le dessin de ces tronçons d'hyperboles est tout à fait naturel puisque connaître la Masse Volumique des cylindres, leur diamètre et leur longueur ainsi que la Masse Volumique du fluide donne automatiquement leur Poids Efficient qui est leur Traînée. Connaître la viscosité dynamique du fluide donne alors leur $\mathbf{C_x}$ linéaire en référence longueur (cette longueur étant connue) et en fonction de la Vitesse **V** de décantation. Comme cette vitesse de décantation est liée au Reynolds par sa définition **VD/ν** on peut donc dessiner $\mathbf{C_{xLin\ Réf.L} = F(R_{eD})}$…

[304] Les diamètres et les longueurs qu'il a mesurés seraient donc accessoires si les diamètres ne servait pas à l'établissement du Reynolds et la longueur à celui du $\mathbf{C_x}$ linéaire en référence longueur.

S'agissant de la confrontation des tronçons d'hyperboles nés du critère mathématique **C** avec des données expérimentales, comme c'est le cas ici, le très léger écart entre les segments blancs et leur arc-en-ciel respectif est tout à fait normal, et donc sans importance. Par contre la faiblesse de cet écart met en lumière la qualité des expériences d'Huner…

En ne faisant dessiner au tableur que le **C_x** linéaire (et le Reynolds) des cylindres décantant au plus grand espacement **H** des parois (cas où la présence de ces parois est censée ne plus agir significativement sur l'écoulement), on obtient les marques carrées ci-dessous :



Nous avons porté en bleu dense les élancements de ces cylindres (décantant, répétons-le, entre parois suffisamment lointaines).

L'échelonnement très régulier de ces élancements incite à proposer les courbes vertes qui relieraient les élancements ronds **10**, **20** et **40**.

Nous verrons d'ailleurs plus loin, toujours en lisant Huner, que sur une même courbe arc-en-ciel les marques s'approchent de la courbe marron de façon hyperbolique à mesure que croît l'élancement.

D'autre part, notre libellé évoqué plus haut donnant le Reynolds en fonction du critère **C** et du **C_x** linéaire permet de tracer les tronçons d'hyperboles pour des diamètres ronds, ceci afin de *carroyer* l'espace du graphe : nous n'avons ci-dessus effectué cette opération simple que pour le diamètre *rond* **0,8 mm**, pour la Masse Volumique de l'acier **7892 Kg/m^3** et pour ce même fluide de **~ 0,1 P_a***s de Viscosité Dynamique (en blanc).

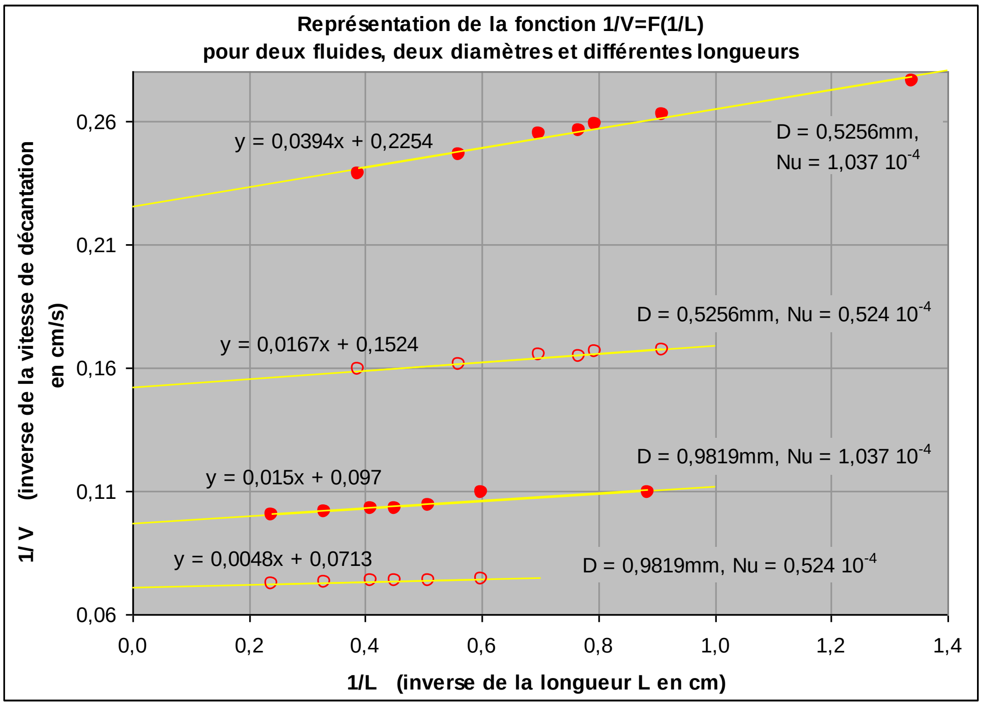
Un carroyage général du graphe avec de tels tronçons d'hyperboles (pour chaque diamètre rond) permettrait de pronostiquer et **C_x** linéaire et Reynolds diamétral de cylindres circulaires en acier (de **7892 Kg/m^3**), de diamètre et longueur quelconques, décantant dans ce même fluide de **~ 0,1 P_a***s de Viscosité Dynamique.

La courbe marron de ces trois derniers graphes est le régression proposée par Huner pour le $\mathbf{C_x}$ linéaire des cylindres de longueur infinie. Les quatre marques circulaires sont d'ailleurs les $\mathbf{C_x}$ linéaires résolus à partir de la Masse Volumique **7892 Kg/m²** : on remarque qu'elles sont dans le prolongement des tronçons d'hyperboles blancs de notre pénultième graphe, ce qui est logique.

Nous expliquons à présent comment Huner a obtenu cette régression marron :

C_x linéaire des cylindres circulaires infinis en déplacements transverses en régime d'Oseen, par Huner :

Huner a poursuivi son étude en remarquant que l'inverse de la vitesse de décantation des différents cylindres d'un même diamètre et dans le même type d'huile dessine, en fonction de l'inverse de la longueur de ces cylindres, une portion de droite :



Ce graphe (réalisé après saisie par nous des vitesses de décantation dans les tableau d'Huner) représente quatre groupes de mesures, chaque groupe correspondant au même diamètre dans le même fluide.

Sont bien dessinées par ces marques quatre portions de droite jaunes (les formules des quatre régressions linéaires étant même proposées par notre tableur).

Le reliquat de chaque régression linéaire (**0,2254**, **0,1524**, etc.) n'est autre que l'ordonnée de l'intersection de cette régression avec l'axe des **y**, donc l'inverse de la vitesse de décantation du cylindre de longueur infinie (ou de **1/L** nul) dans ce fluide non borné, du moins pour le diamètre considéré.

> Qu'on ne s'y trompe pas : Le fait que l'inverse de la vitesse soit lié linéairement à l'inverse de la longueur des cylindres ne signifie pas que la vitesse est liée linéairement à la longueur des cylindres : il ne faut pas oublier le reliquat dans l'équation de chaque droite…

Cette méthode simple permet l'extrapolation des vitesses de décantation des cylindres de longueur finie en celles de cylindres de longueur infinie.

Allant plus loin, Huner a même réussi à déterminer la pente de chaque régression linéaire ci-dessus.

Cette connaissance permet de calculer la vitesse de décantation d'un cylindre infini dans un fluide non borné d'après la vitesse de décantation d'un seul cylindre de diamètre donné de longueur finie dans le même fluide toujours non borné [305].

Cette méthode est donc un complément de la précédente (qui utilise les régressions linéaires sur le graphe ci-dessus) ; elle donne d'ailleurs à peu près les pentes de ces régressions linéaires.

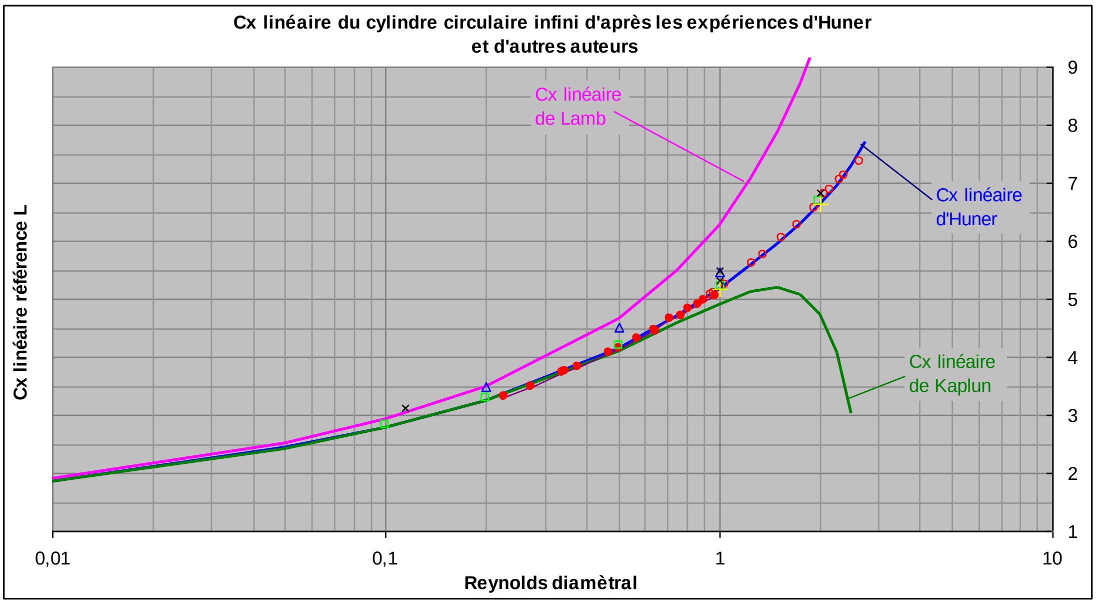
Le libellé en est :

$$\mathbf{V_{L\infty}} = \mathbf{V_{L\text{finie}}} \left[1 + \frac{1{,}36}{\lambda}(\mathbf{R_{e\,D}})^{-\frac{5}{8}}\right]$$

…équation dans laquelle $\mathbf{V_{L\infty}}$ est la vitesse du cylindre de longueur infini décantant dans un fluide non borné, $\mathbf{V_{L\text{finie}}}$ la vitesse du cylindre de longueur finie décantant dans le même fluide toujours non borné, λ l'élancement du cylindre de longueur finie, et $\mathbf{R_{eD}}$ le Reynolds diamétral de ce dernier cylindre lors de sa décantation.

Comme il est souhaitable, cette dernière équation est vérifiée quand on donne un élancement infini au cylindre de longueur finie.

Huner peut alors mettre en panorama le résultat de toutes ses mesures ; voici cette mise en panorama sous forme de $\mathbf{C_x}$ linéaires :



[305] Ce cylindre de longueur finie d'un certain diamètre serait donc un point isolé sur le graphe précédent ; et comme on ne peut tirer une régression linéaire d'un seul point…

Les marques rondes rouges, pleines ou vides, sont les mesures d'Huner (dans chaque fluide) ; les marques vertes carrées sont de Schlamp, les deux marques en croix jaune pâle sont de Takami et Keller. On note aussi les marques d'autres auteurs.

La courbe de Kaplun est une courbe calculée par expansion asymptotique.

Il est patent que la formule de Lamb décolle de la réalité des mesures et de la courbe de Kaplun dès le Reynolds **0,01**.

Fort de ces résultats, Huner propose une équation générale donnant le $\mathbf{C_x}$ linéaire du cylindre infini en mouvement transverse et en régime d'Oseen dans un fluide non borné :

$$\boxed{\mathbf{C_x}_{\text{Lin Réf.L}} = 4\pi\left[\frac{1}{2{,}002 - \mathrm{Ln}(R_{eD})} - \frac{0{,}87}{\left(2{,}002 - \mathrm{Ln}(R_{eD})\right)^3} + \frac{0{,}514\left(1 - \mathrm{Exp}(-R_{eD})\right)}{\left(2{,}002 - \mathrm{Ln}(R_{eD})\right)^4}\right]}$$

…libellé où $\mathbf{R_{eD}}$ est le Reynolds diamétral du cylindre qui apparaît valide jusqu'au Reynolds de **2,5** [306].

Comme on le voit, l'architecture de ce libellé, qui reprend le deuxième terme (en **0,87**) de Kaplun, le rend équivalent à celui de Lamb pour les Reynolds $\mathbf{R}_{eD}$ inférieurs à **0,01**. Pour les Reynolds supérieurs, il pourrait donc constituer un extension intéressante à ceux de Lamb puis de Kaplun.

Notons que, comme ces deux derniers libellés, il est irrésolu dans le cas de la décantation puisqu'il prend $\mathbf{R}_{eD}$ comme variable et que ce Reynolds dépend de la vitesse de décantation donc du $\mathbf{C_x}$ linéaire. Cette impasse calculatoire trouve facilement sa solution, comme évoqué précédemment, par l'usage d'un curseur. Par ce moyen simple, une courbe donnant le $\mathbf{C_x}$ linéaire (donc la vitesse de décantation) en fonction du critère adimensionnel unique **C** peut être construite. C'est la courbe bleue dense que nous avons présentée plus haut.

Reste à lui trouver une régression.

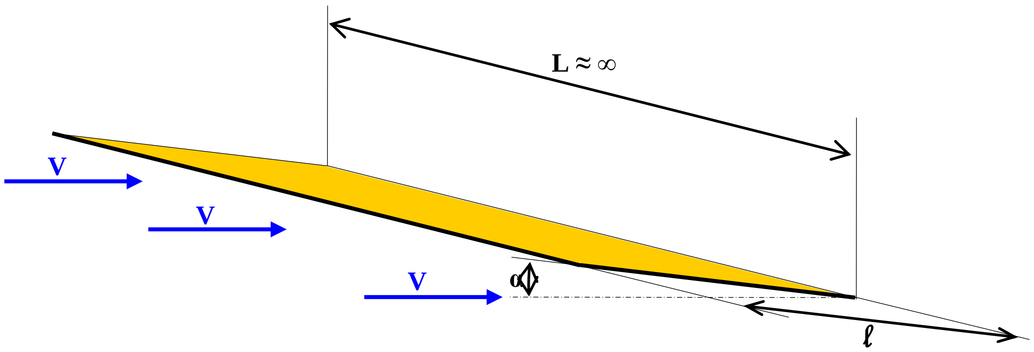
Cx linéaire de la palette de longueur infinie en incidence et en régime d'Oseen par Isao Imai : :

Dans son texte traitant du déplacement transverse en incidence des cylindres infinis de section elliptique en régime d'Oseen, Isao Imai donne, en une formule imposante, le $\mathbf{C_x}$ quadratique de tels corps dans ce régime.

Voyons d'abord le cas particulier où l'épaisseur relative de la section elliptique est nulle, ce cas étant bien-sûr celui de la palette de longueur infinie en incidence [307] :

[306] Huner donne d'autres régressions polynomiales qui ne fonctionnent pas…

[307] …comme le disque est le cas particulier du sphéroïde aplati d'épaisseur nulle.



Voici le libellé de ce <u>C_x quadratique</u> dans la forme qui sied à Excel :

= (16*PI() /R_e)* ((2*S-1-COS(2*α))/D) -(PI()*R_e/(4*D)) *(S^2 +0,5*(1-2*COS(2*α)-COS(4*α))*S -(1/24)*(9+8*COS(2*α)-7*COS(4*α)) +(1/D)*((1/12)*(30+23*COS(2*α)-10*COS(4*α) -3*COS(6*α))*S -(1/12)*(14+21*COS(2*α)+6*COS(4*α)-COS(6*α))))

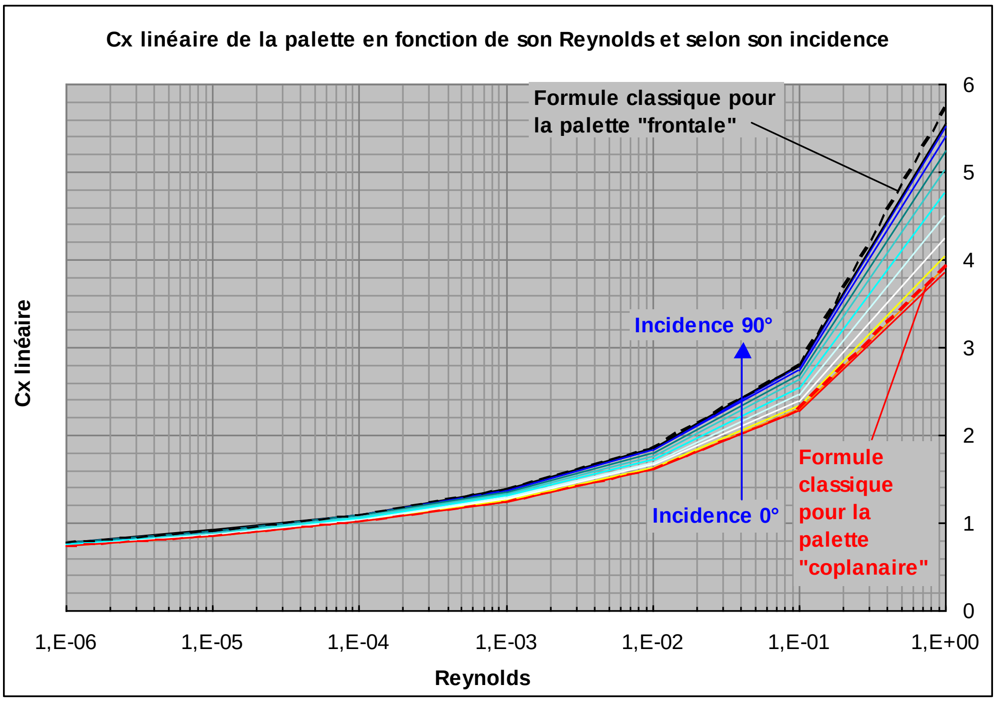
avec : D = 4*S^2 -2*(1+COS(2*α))

et : S = Ln(16/R_e) -0,577216

...0,577216 étant **γ**, la constante d'Euler-Mascheroni.

Dans la formule ci-dessus (que nous nommerons « formule *monstre* » dans le texte qui suit [308]), R_e est le Reynolds de l'écoulement et α l'incidence.

Une application fidèle de cette formule *monstre* d'Imai révèle le comportement suivant des palettes, selon leur incidence et selon leur Reynolds :



308 …ceci bien que la formule donnant la Traînée du cylindre de section elliptique en incidence soit encore plus complexe puisqu'elle doit tenir compte, en plus, de l'épaisseur relative de la section elliptique.

Sur ce graphe, l'arc en ciel de couleur représente les courbes du $\mathbf{C_x}$ linéaire de la palette selon son incidence (tel que calculé par Imai d'après la formule *monstre* ci-dessus).

Les deux courbes tiretées noire et rouge représentent, quant à elles le $\mathbf{C_x}$ linéaire de la palette infinie en mouvement coplanaire et frontal calculée classiquement par les égalités :

$$\mathbf{C_{xLin\ 0°}} = \frac{\mathbf{4\pi}}{\mathbf{3{,}1946 - Ln(R_{e\ell})}}$$

$$\mathbf{C_{xLin\ 90°}} = \frac{\mathbf{4\pi}}{\mathbf{2{,}2 - Ln(R_{e\ell})}}$$

On remarque que, spécialement pour les Reynolds inférieurs à **0,1**, ces deux courbes tiretées sont très proches des courbes d'Imai pour **90** et **0°**. Par contre pour les Reynolds supérieurs à **0,1**, elles sont prises en défaut…

Ce constat encourage évidemment, vu la complexité de l'équation d'Imai, a en rechercher une régression plus simple, du moins pour les Reynolds inférieurs à **0,1**.

On pense alors à rendre le reliquat présent au dénominateur de ces deux formules classiques (**3,1946** ou **2,2**) dépendant de l'incidence, de sorte qu'il évolue dans la plage **3,1946** à **2,2** lorsque l'incidence **α** varie de **0** à **90°**.

Après quelques recherches, on trouve assez facilement que la formulation :

$$\boxed{\mathbf{C_{xLin\ Réf.L\ \alpha}} = \frac{\mathbf{4\pi}}{\mathbf{2{,}21 + cos(\alpha)^{2,3} - Ln(R_{e\ell})}}}$$

…est précise à mieux que **0,21 %** pour les Reynolds inférieurs ou égaux à **0,01** et pour toutes les incidences. Elle donne le $\mathbf{C_x}$ linéaire, en référence à sa longueur **L** très grande, de la palette en incidence **α** et en régime d'Oseen selon le Reynolds basé sur sa corde *ℓ*.

Au demeurant, adopter dans l'encadré ci-dessus le dénominateur $\mathbf{2{,}207 + cos(\alpha)^{2,41} - Ln(R_{e\ell})}$ permet d'atteindre une précision meilleure que **0,32 %** pour tous Reynolds inférieur ou égal à **0,1** (et pour toutes les incidences).

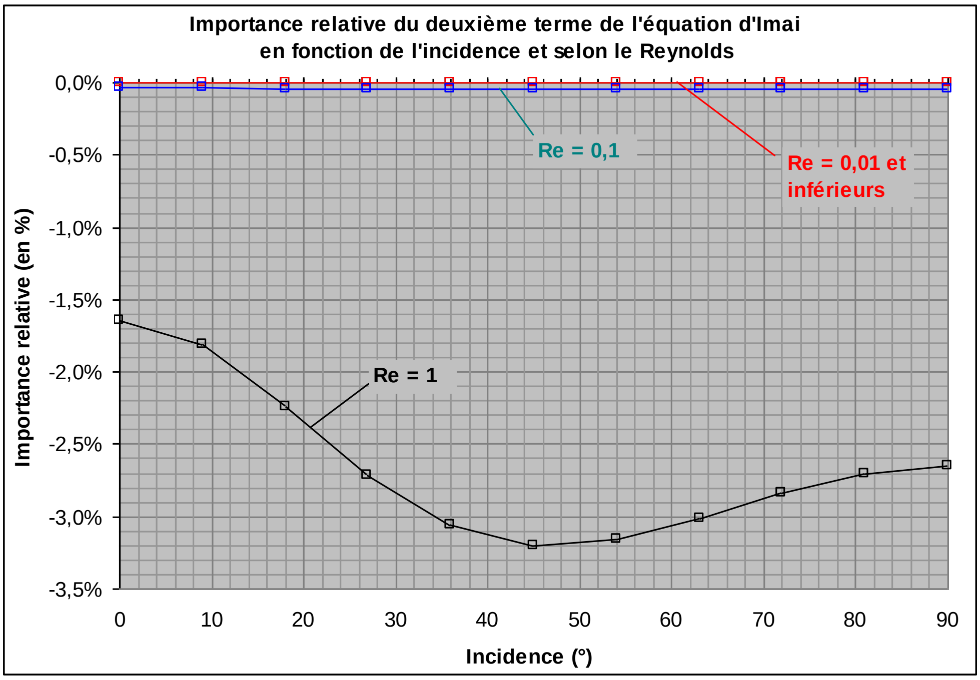
Ce résultat est assez élégant, surtout lorsqu'on songe qu'il remplace l'équation monstre d'Imai, du moins pour les Reynolds mentionnés.

La question qui se pose alors naturellement est de faire la liaison mathématique entre l'équation monstre d'Imai et la nôtre.

Il est assez facile de vérifier que, dans ladite équation monstre du $\mathbf{C_x}$ quadratique, seul le premier terme, à savoir :

(16*PI() /R_e)* ((2*S-1-COS(2*α))/D)

…est significatif pour les Reynolds inférieurs ou égaux à **0,1** ; c'est ce qui apparaît sur le graphe suivant qui montre l'importance du reste de l'équation d'Imai (selon le Reynolds) relativement à ce premier terme :



On voit sur ce graphe que si le reste de l'équation d'Imai pèse entre **1,5** et **3 %** du premier terme au Reynolds **1**, dès le Reynolds **0,1** ce même reste ne pèse presque plus rien…

On peut donc tirer de ce graphe la conclusion que le premier terme de l'équation monstre d'Imai (cité à l'instant) représente, à moins de **1** millième près, la valeur de toute cette équation monstre pour les Reynolds inférieurs ou égaux à **0,1**.

Ce même premier terme du $\mathbf{C_x}$ quadratique, dont nous venons de voir qu'il est prépondérant pour $\mathbf{R_e \leq 0{,}1}$, donne bien-sûr accès, dans la même plage de Reynolds, au $\mathbf{C_x}$ linéaire de la palette en incidence lequel s'écrit, en explicitant les quantités S et D :

$$C_{xLin\ Réf.L\ \alpha} = \frac{4\pi\left\{\left[Ln(16/R_{el}) - 0{,}577216\right] - \cos^2(\alpha)\right\}}{\left[Ln(16/R_{el}) - 0{,}577216\right]^2 - \cos^2(\alpha)}$$

…**0,577216** représentant toujours γ, la constante d'Euler-Mascheroni.

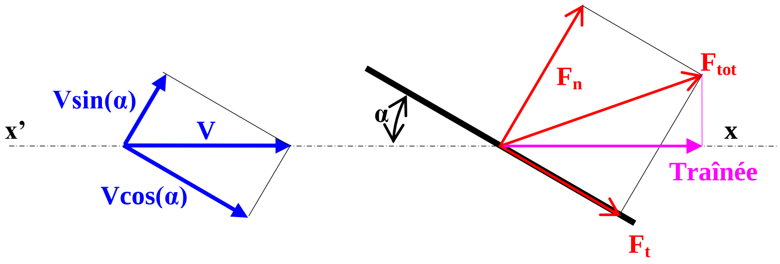
En rédigeant ce $\mathbf{C_x}$ linéaire (valide uniquement pour les Reynolds inférieurs ou égaux à **0,1**), nous avons quand même considérablement simplifié l'équation monstre d'Imai dans cette plage de Reynolds.

Mais comment rapprocher analytiquement ce $\mathbf{C_x}$ linéaire (tiré du premier terme d'Imai) du libellé beaucoup plus simple de notre régression ? Nous avons échoué à le faire…

Ces deux formules du $\mathbf{C_x}$ linéaire de la palette en incidence étant énoncées, il existe une autre formule donnant le $\mathbf{C_x}$ linéaire de la même palette en incidence, mais cette fois en régime de Stokes avéré ; c'est l'objet du paragraphe qui suit.

Calcul utilisant les propriétés d'additivité des écoulements en régime de Stokes :

Le principe d'additivité des écoulements en régime de Stokes permet de déterminer facilement le $\mathbf{C_x}$ linéaire d'un corps en incidence $\boldsymbol{\alpha}$ si l'on connaît les $\mathbf{C_x}$ linéaires de ce corps présenté aux incidences **0** et **90°**. Effectuons cette démonstration pour une plaque rectangulaire en incidence (même si cette démonstration vaut pour tous les corps en régime de Stokes, à une nuance importante près que nous mentionnerons incessamment) :



Sur le schéma ci-dessus, on reconnaît la plaque rectangulaire en noir. Elle est immergée dans un écoulement de direction **V** (horizontal, sur le schéma).

La force normale $\mathbf{F_n}$ sur cette plaque peut être calculée d'après la seule composante normale **Vsin(α)** de la vitesse **V** ; c'est :

$$\mathbf{F_n = \mu\, LV\, C_{xLin\,90°}\, \sin(\alpha)}$$

…du moins si $\mathbf{C_{xLin\,90°}}$ est le $\mathbf{C_x}$ linéaire de la plaque en mouvement frontal (c.-à-d. à l'incidence **90°**) et **L** la longueur de référence (non définie, ici).

On calcule de même facilement la force tangentielle $\mathbf{F_t}$ d'après la seule composante tangentielle **Vcos(α)** de la vitesse :

$$\mathbf{F_t = \mu\, LV\, C_{xLin\,0°}\, \cos(\alpha)}$$

En composant les composantes $\mathbf{F_n}$ **et** $\mathbf{F_t}$ (en application du principe d'additivité) on peut dessiner la force totale hydrodynamique $\mathbf{F_{tot}}$ sur la plaque. Mais c'est la projection de cette résultante sur la direction **x'x** de la vitesse **V** qui nous intéresse dans le présent texte (force fuchsia ci-dessus, nommée Traînée). Cette projection de la résultante est également la somme des projections de ses composantes $\mathbf{F_n}$ et $\mathbf{F_t}$. Cette Traînée est donc :

$$\textbf{Traînée} = \mathbf{\mu\, LV \left[C_{xLin\,0°} + (C_{xLin\,0°} - C_{xLin\,90°}) \cos^2(\alpha)\right]}$$

…soit, pour la plaque en incidence $\boldsymbol{\alpha}$ par rapport à **V,** un $\mathbf{C_x}$ linéaire :

$$\boxed{\mathbf{C_{xLin\,Réf.L\,\alpha} = C_{xLin\,90°} - (C_{xLin\,90°} - C_{xLin\,0°}) \cos^2(\alpha)}}$$

…qui est le $\mathbf{C_x}$ linéaire de la plaque exposée à l'incidence $\boldsymbol{\alpha}$ à la vitesse **V**, $\mathbf{C_{xLin\,0°}}$ étant le $\mathbf{C_x}$ linéaire de la plaque à l'incidence **0°** (c.-à-d. en déplacement coplanaire) et $\mathbf{C_{xLin\,90°}}$ le $\mathbf{C_x}$ linéaire de la plaque à l'incidence **90°** (c.-à-d. en déplacement frontal), l'ensemble de ces $\mathbf{C_x}$ linéaires étant établis en référence à une certaine longueur **L** (non définie, ici).

Comme nous l'avons dit, la loi encadrée ci-dessus est valable pour tous les corps en régime de Stokes (les corps pour lesquels $\mathbf{C_{xLin\,0°}} = \mathbf{C_{xLin\,90°}}$, à savoir les corps présentant une *isotropie sphérique* comme la sphère ou le cube, la respectant également).

Notons que nous utilisons ici le $\mathbf{C_x}$ linéaire défini comme la projection de l'effort hydrodynamique total $\mathbf{F_{tot}}$ sur la direction de la vitesse **V** : ce $\mathbf{C_x}$ est donc celui des avionneurs qui, aux hauts Reynolds, s'intéressent à la projection de l'effort aérodynamique total sur la direction de la vitesse de l'avion.

Ceci posé, d'autres coefficients de Traînée sont possibles, en particulier les coefficients nommés ci-dessus $\mathbf{C_{xLin\,0°}}$ et $\mathbf{C_{xLin\,90°}}$ qui correspondent aux coefficients tangentiel et normal utilisés par les fuséistes (voir à ce sujet notre texte « Les repères en aérodynamique ».

Notons au passage qu'en projetant sur le plan normal à l'écoulement les deux composantes $\mathbf{F_n}$ et $\mathbf{F_t}$. de la Force hydrodynamique totale $\mathbf{F_{tot}}$, on obtient de la même façon le Coefficient Adimensionnel Linéaire de Portance en régime de Stokes du corps à l'incidence **α** ; nommons-le $\mathbf{C_{yLin}}$:

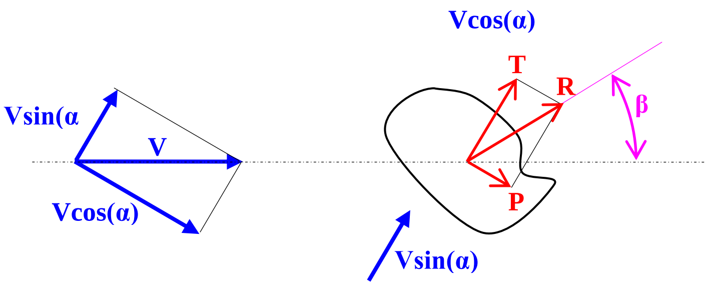
$$C_{yLin\ Réf.L\ \alpha} = ½\,(C_{xLin\,90°} - C_{xLin\,0°})\,\sin(2\alpha)$$

Nous nous servirons de cette équation plus bas…

<u>Note sur les cas où le principe d'additivité est *pratique* :</u>

Dans les calculs précédents, nous avons placé par la pensée la plaque rectangulaire normalement et tangentiellement à l'écoulement. Dans ces deux positions, la plaque ne développe pas de composante non parallèle à la vitesse de l'écoulement (pas de Portance, donc). C'est ce qui nous a permis de prendre en compte facilement les forces normale et tangentielle sur la plaque.

Si cependant le corps considéré avait développé une Portance pour une seule des composantes de la vitesse (**Vsin(α)**, par exemple ci-dessous) :



…cette composante **Vsin(α)** développant sur le corps une Portance **P** en plus de la Traînée **T** [309], la poursuite du calcul aurait été soumise à l'obligation de connaître soit cette portance **P** (en plus de la Traînée **T**), soit l'angle **β** de la résultante (si c'est celle-ci qui est connue)…

Autrement dit, on ne peut profiter de la loi d'additivité des écoulements en régime de Stokes que lorsque l'on connaît (et tient compte) des Portances et Traînées dans deux cas d'écoulement.

Autrement dit encore, pour appliquer la loi d'additivité, il faut sommer intégralement les deux écoulements et leurs conséquences (Traînées, Portances et Moment s'il en est).

Dans les cas les plus simples, cela correspond à connaître la Traînée, à deux incidences, de corps qui ne présentent pas de Portance à ces incidences (comme le disque ou la plaque rectangulaire en position normale ou coplanaire ou, d'une façon générale, les corps

[309] Portance et Traînée sont ici définies à la manière des avionneurs, c.-à-d. comme les projections de la résultante aérodynamique sur la vitesse et sa normale…

placés dans un écoulement selon l'un de leur axe de symétrie, comme l'ellipsoïde ou le cylindre court).

Mais revenons à la Traînée et au $\mathbf{C_x}$ linéaire :

Le calcul du $\mathbf{C_x}$ linéaire en incidence utilisant la loi d'additivité des écoulements que nous venons d'effectuer est valide, comme nous l'avons dit, en régime de Stokes avéré. Or les formules donnant le $\mathbf{C_x}$ linéaire de la palette de longueur infinie en déplacement frontal ou coplanaire ont été trouvées, par contre, pour un écoulement d'Oseen. Au reste, ces deux formules :

$$C_{xLin\ Réf.L\ 90°} = \frac{4\pi}{2{,}2 - Ln(R_{e\ell})}$$

$$C_{xLin\ Réf.L\ 0°} = \frac{4\pi}{3{,}1946 - Ln(R_{e\ell})}$$

…contiennent le terme $R_{e\ell}$, Reynolds basé sur la largeur de la palette :

$$R_{e\ell} = \frac{V\ell}{\nu}$$

…où ν est le quotient de la viscosité dynamique μ sur la Masse Volumique ρ du fluide.

Cette mention à la Masse Volumique du fluide est contraire à l'hypothèse présidant aux écoulements de Stokes, à savoir que la Masse Volumique du fluide y est indifférente.

En écoulement d'Oseen, il n'est donc pas permis d'utiliser le principe d'additivité comme nous venons de le faire pour déterminer le $\mathbf{C_x}$ linéaire de la palette en incidence.

Cependant, l'application numérique du libellé encadré ci-dessus [310] se révèle conforme aux résultats de l'équation monstre d'Imai (formule établie pour le régime d'Oseen) à **0,21 %** près pour les Reynolds inférieurs ou égaux à **0,1** (ceci bien-sûr pour toutes les incidences).

Cette précision augmente d'ailleurs lorsque le Reynolds diminue, atteignant déjà **0,07 %** pour le Reynolds **0,01**.

Ce bon comportement de l'équation monstre d'Imai par rapport aux calculs effectués en application du principe d'additivité (mais à partir de $\mathbf{C_x}$ linéaires de la palette frontale ou coplanaire établis en régime d'Oseen) tend donc à la légitimer (au moins pour un ingénieur pragmatique).

À notre sens, ce constat légitime également (toujours pour l'ingénieur pragmatique) l'utilisation pour la palette en incidence de notre régression encadrée ci-dessus, à savoir :

$$C_{xLin\ Réf.L\ \alpha} = \frac{4\pi}{2{,}21 + \cos(\alpha)^{2{,}3} - Ln(R_{e\ell})}$$

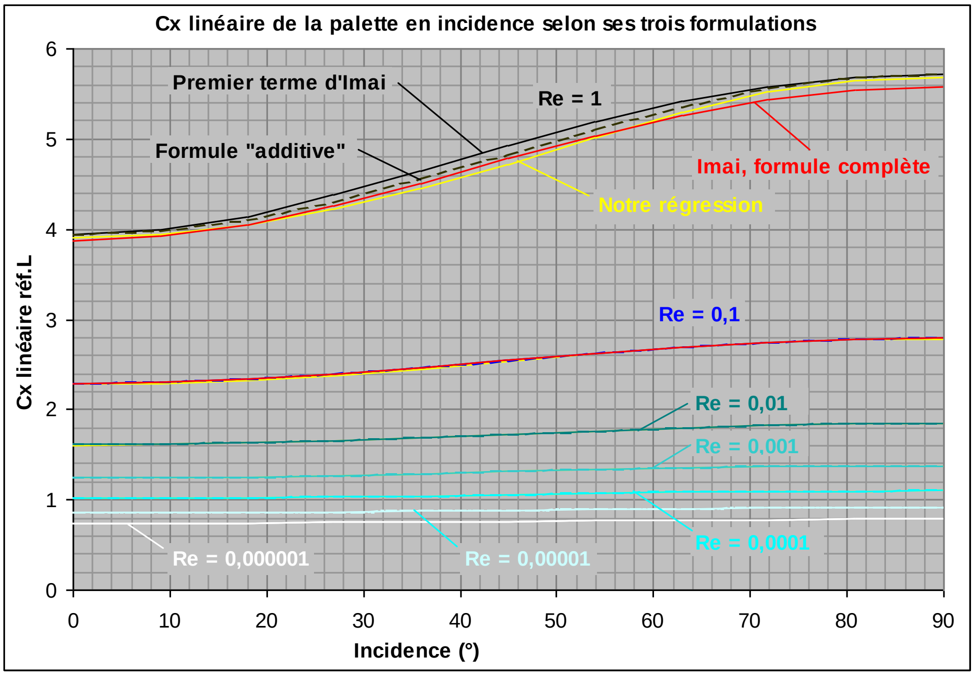
---

[310] …du moins en donnant à $\mathbf{C_{xLin\ 90°}}$ et $\mathbf{C_{xLin\ 0°}}$ les valeurs classiques qui valent pour le régime d'Oseen…

À ce stade de notre étude de la palette en incidence, nous avons donc rencontré trois formulations possibles chacune pouvant être appliquée sur une certaine plage de Reynolds :

La formulation « *additive* » (valide en régime de Stokes avéré), le premier terme de l'équation monstre d'Imai (valide pour les Reynolds ≤ **0,1**), et notre régression représentant l'équation complète d'Imai (valide pour les Reynolds ≤ **0,01** [311]).

Il est forcément instructif de représenter graphiquement ces trois formulations pour divers Reynolds :



Au Reynolds **1**, la formule complète (ou *monstre*) d'Imai, qui donne les valeurs exactes, est en rouge.

En comparaison, les trois autres courbes sont prises en défaut (bien qu'elles restent dans le bon ordre de grandeur).

Au Reynolds **0,1**, par contre, on retrouve une quasi unanimité (la formule complète d'Imai est toujours en rouge). Notre régression jaune se montre à peine derrière le premier terme d'Imai et la formule additive (toujours en tiretés).

Au Reynolds **0,01**, c'est un hasard si l'on aperçoit notre régression jaune qui n'est que **0,21 %** plus faible que la formule additive (en tiretés) et le premier terme d'Imai (trait continu), ce premier terme représentant parfaitement la formule complète.

La conclusion qui s'impose donc, à l'analyse de ce graphe de comparaison, est que notre régression donnant le $\mathbf{C_x}$ linéaire de la palette en incidence est tout à fait valide pour les Reynolds inférieurs ou égaux à **0,1** tandis qu'elle reste dans le bon ordre de grandeur pour le Reynolds **1**.

---

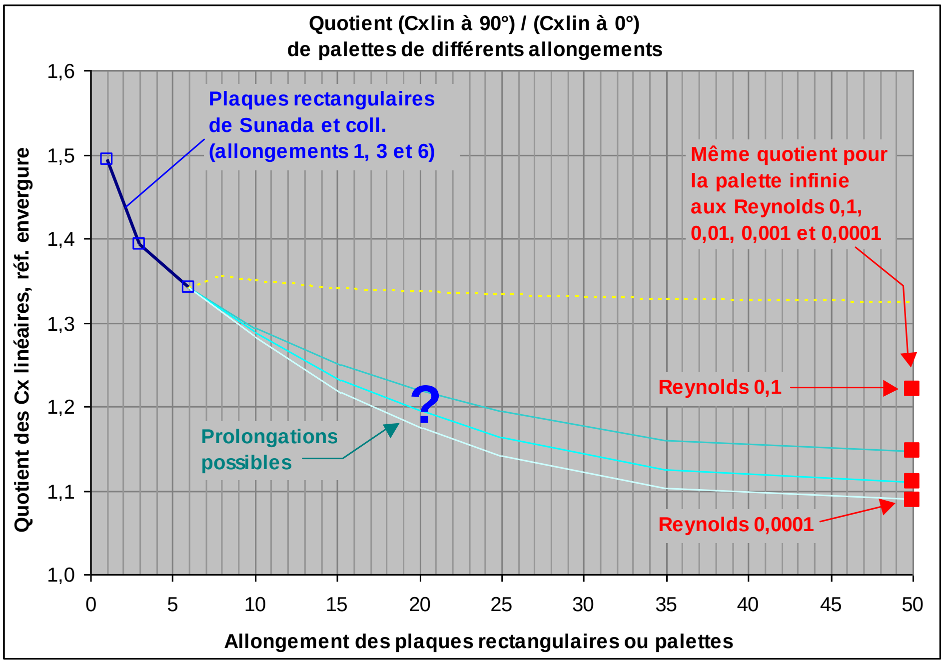
[311] …du moins si l'on adopte le dénominateur simple $\mathbf{2{,}21+\cos(\alpha)^{2{,}3}-Ln(R_{e\ell})}$.

Une autre conclusion s'impose également : c'est que la variation du $\mathbf{C_x}$ linéaire de la palette selon son incidence est, en régime d'Oseen, d'autant plus faible que le Reynolds est faible (au Reynolds **0,01**, seulement **14,7 %** d'accroissement du $\mathbf{C_x}$ linéaire de **0** à **90°**)). Tout se passe donc comme si, à faible Reynolds, l'écoulement en régime d'Oseen ramenait à presque rien les effets de l'incidence de la palette infinie. Une observation des résultats de Sunada et coll. en régime de Stokes traité par nous plus haut pour une plaque mince rectangulaire d'allongement **6**, montre que son $\mathbf{C_x}$ linéaire passe de **3,31** à **4,44** (soit un accroissement de **34 %**) lorsque son incidence passe de **0** à **90°**. Ce quotient est donc plus fort que les **14,7 %** relevé par nous à l'instant pour la palette infinie en régime d'Oseen au Reynolds **0,01**.

Ce problème de la jonction du régime de Stokes au régime d'Oseen est constant et demeure une difficulté de taille (au moins dans notre esprit) [312] : à quel Reynolds le régime d'Oseen cède-t-il la place au régime de Stokes ?

La réponse est « Jamais » si l'on utilise les équations de la Traînée de la palette infinie en régime d'Oseen en y plaçant un Reynolds très faible !

Voici d'ailleurs, à ce sujet, le moignons de courbe bleu dense qui dessine le quotient des $\mathbf{C_x}$ linéaires à l'incidence **0** et **90°** des plaques d'allongement**1**, **3** et **6** étudiées plus haut par Sunada et coll. :



À l'allongement **50** (pris ici comme un allongement ≈ infini), nous avons placé les quatre marques carrées rouges formées par les mêmes quotients des $\mathbf{C_x}$ linéaires (référence envergure infinie) de la palette infinie à **0** et **90°** et à différents Reynolds (en régime d'Oseen, donc) : Comment le moignon de courbe bleu dense peut-il être raccordé à l'une de ces quatre marques ?

Si les effets de l'inertie du fluide se font sentir au Reynolds **0,01**, se font-ils encore sentir au Reynolds **0,001** (et ainsi de suite) ?

[312] Nous ne parlons ici que du régime d'Oseen qui naît des premiers effets de l'inertie du fluide, non de celui (plus complexe) qui naît des effets de parois.

(la courbe tiretée jaune est le même quotient obtenu à partir de nos régressions en logarithme pour les résultats de Sunada et coll. : il apparaît que l'une au moins de ces régression n'est pas convenable. [313])

Il faudra donc attendre qu'un chercheur calcule la Traînée en régime de Stokes de plaques rectangulaires de grands allongements pour connaître le fin mot de cette histoire.

Une autre question vient à l'esprit : quels sont les rapports entre la formule monstre d'Imai et les libellés classiques de la palette en déplacements frontaux et coplanaires en régime d'Oseen, c.-à-d. :

$$C_{xLin\,90°} = \frac{4\pi}{2{,}2 - Ln(R_{e\ell})}$$

$$C_{xLin\,0°} = \frac{4\pi}{3{,}1946 - Ln(R_{e\ell})}$$

Lorsque l'on pose **α = 0** et **90°** dans le premier terme de l'équation d'Imai, on est conduit, après simplification, à des **C_x** linéaires de même construction que ceux cités à l'instant. Les reliquats, pour chaque incidence sont cependant :

2,1953731 au lieu de **2,2**

…et **3,1953731** au lieu de **3,1946**.

Autant dire à peu près les mêmes ! [314]…

Cx linéaire du cylindre de section elliptique et de longueur infinie en incidence :

Cas des cylindres elliptiques d'épaisseur relative <1 sans incidence :

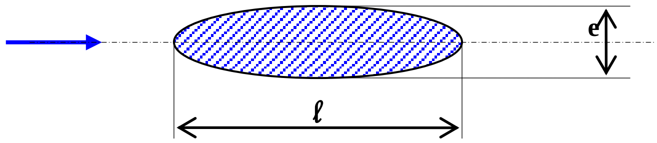
Toujours dans le même texte traitant du déplacement en incidence des cylindres infinis de section elliptique en régime d'Oseen, Isao Imai donne Traînée et Portance de tels cylindres elliptiques en fonction de leur incidence et selon le Reynolds basé sur la corde (c.-à-d. le diamètre ℓ parallèle à l'écoulement).

Afin de ne pas surcharger le présent texte, nous ne nous sommes intéressé qu'à la Traînée de ces cylindres de section elliptique et dans les seuls cas où ils se présentent aux incidences **0** et **90°**.

Dans le cas particulier de l'incidence nulle (c.-à-d. lorsque le grand diamètre ℓ de cette section (qui est aussi sa corde) est parallèle à la vitesse :

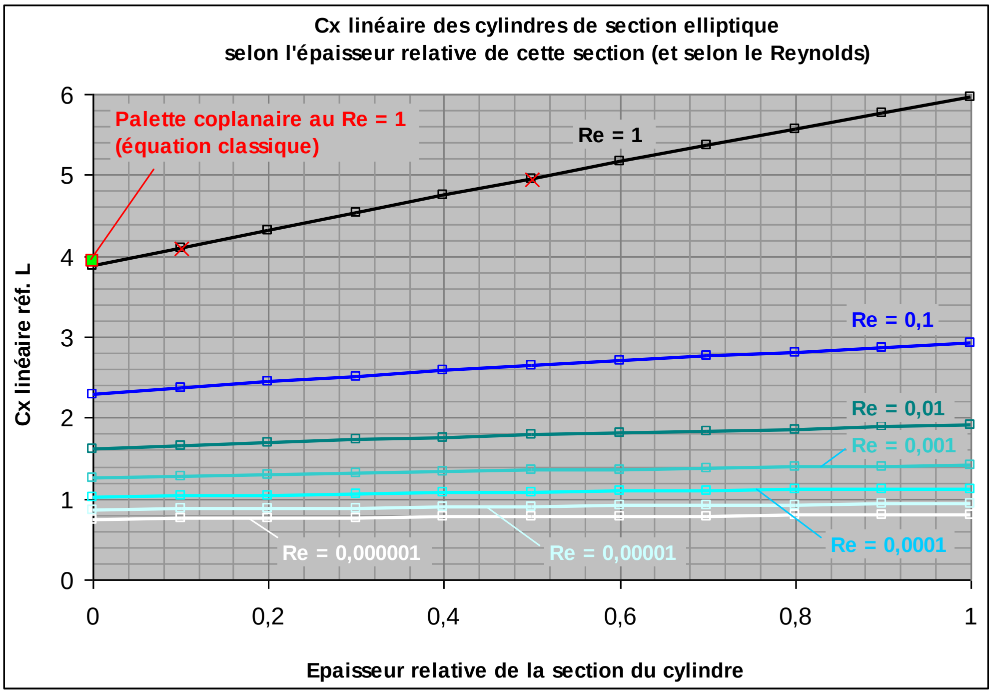
[313] On peut trouver deux régressions du même type logarithmique dont le quotient prolongent place la courbe tiretée jaune à la marque de la palette infinie pour le Reynolds **0,1**.

[314] Cela fait une différence de **0,1** pour cent sur le **C_x** linéaire au Reynolds **0,1** et encore moins pour les Reynolds inférieurs…



…Imai donne le $\mathbf{C_x}$ quadratique ; la formulation en reste assez compliquée, mais il est aisé d'en tirer le $\mathbf{C_x}$ linéaire (en référence longueur **L** infinie du cylindre) et de tracer la courbe de son évolution en fonction de l'épaisseur relative des sections et du Reynolds.

Voici cette évolution :



Les marques en x rouges aux épaisseurs relatives **0,1** et **0,5** sont celles de M. B. Bush qui a refait les mêmes calculs [315], au Reynolds longitudinal **1**, avec d'autres méthodes.

Comme on le remarque, l'évolution de ce $\mathbf{C_x}$ linéaire est quasi rectiligne en fonction de l'épaisseur relative de la section.

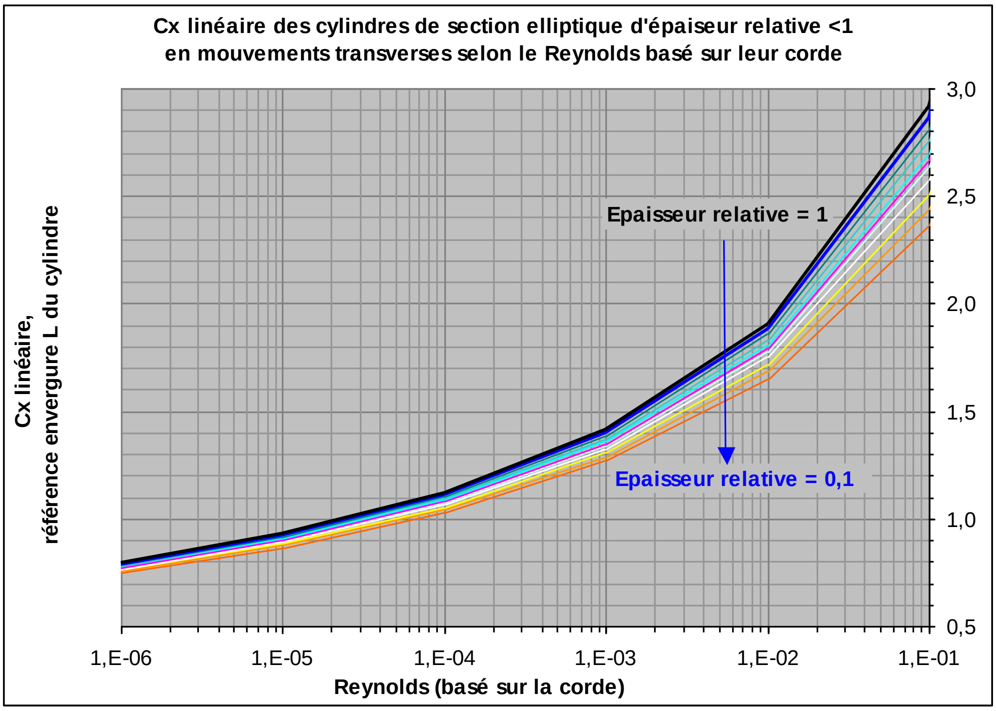
Cette quasi rectitude nous a permis de composer une régression qui s'avère seulement précise à **2,7 %** pour les épaisseurs relatives allant de **0,2** à **0,9** (ces deux bornes comprises). Cette régression est :

$$\mathbf{C_{xlin\ Réf.L} = [0,74 - 0,021\ ép^2 + 0,075 * ép] * [1,085 R_{e\ell}^{0,26}\ (ép+3,5) + 1]}$$

…équation où **ép** est l'épaisseur relative **e/ℓ** et $\mathbf{R_{e\ell}}$ le Reynolds basé sur la corde **ℓ** du cylindre (ici le grand diamètre parallèle à l'écoulement).

La précision de cette dernière régression n'étant pas excellente, nous en avons recherché une autre à partir de la représentation alternative suivante du $\mathbf{C_x}$ linéaire :

[315]… et pour un incidence quelconque du cylindre de section elliptique, cas que nous n'abordons pas ici.



La forme de ces courbes nous donne l'idée qu'elles relèvent toutes du libellé d'architecture classique :

$$C_{x\text{lin Réf.L}} = \frac{4\pi}{\text{Reliquat} - \text{Ln}(R_{e\ell})}$$

Ce libellé dessine en effet, pour une certaine valeur (quelconque) dudit reliquat, la courbe fuchsia ci-dessus.

Lorsque l'on dresse la courbe des valeurs de ce reliquat selon les épaisseurs relatives (valeurs telles que la courbe variable fuchsia recouvre au mieux l'une des courbes du cylindre elliptique), on trouve qu'il évolue assez précisément selon une loi parabolique.

Après optimisation, on trouve que la régression suivante est précise à mieux que **0,4 %** pour toutes les épaisseurs relatives de **0** à **1** (ces bornes comprises) et pour les Reynolds < **0,1** :

$$\boxed{C_{x\text{lin Réf.L}} = \frac{4\pi}{0{,}52\,\text{ép}^2 - 1{,}72\,\text{ép} + 3{,}1946 - \text{Ln}(R_{e\ell})}}$$

…régression donnant le $\mathbf{C_x}$ linéaire (référence longueur **L** du cylindre) du cylindre de section elliptique présenté <u>sans incidence</u> à l'écoulement, où **ép** est l'épaisseur relative **e/ℓ <1** et $\mathbf{R_{e\ell}}$ le Reynolds basé sur la corde **ℓ** du cylindre (ici le grand diamètre parallèle à l'écoulement).

L'observation de ce libellé montre que pour l'épaisseur relative nulle le reliquat présent devant le logarithme népérien est bien celui dévoué classiquement à la palette en régime d'Oseen. Pour l'épaisseur relative unitaire (cas du cylindre) ce reliquat vaut **1,9946**, alors que le reliquat classique est **2,002**.

Postérieurement à la découverte de cette régression, nous avons eu connaissance, grâce à la thèse de Masliyah, du fait qu'Harrison et Bairstow, Cave et Lang avaient résolu approximativement (respectivement en 1924 et 1923) les équations d'Oseen pour ce problème du cylindre de section elliptique. Ils ont trouvé (ici après une conversion faisant apparaître notre épaisseur relative **ép** prise conformément aux us aéronautiques) :

$$C_{xLin\ Réf.L} = \frac{4\pi}{\frac{1}{ép+1} - \gamma - Ln\left(\frac{R_{e\ell}}{\left(\frac{16}{ép+1}\right)}\right)}$$

...γ étant toujours la constante d'Euler-Mascheroni, soit **0,577216**.

Ce libellé s'écrit encore :

$$C_{xLin\ Réf.L} = \frac{4\pi}{\frac{1}{ép+1} - Ln(ép+1) + 2{,}19537 - Ln(R_{e\ell})}$$

La quantité $\frac{1}{ép+1} - Ln(ép+1)$ présente au dénominateur admet la régression :

$$0{,}503ép^2 - 1{,}66ép + 0{,}97$$

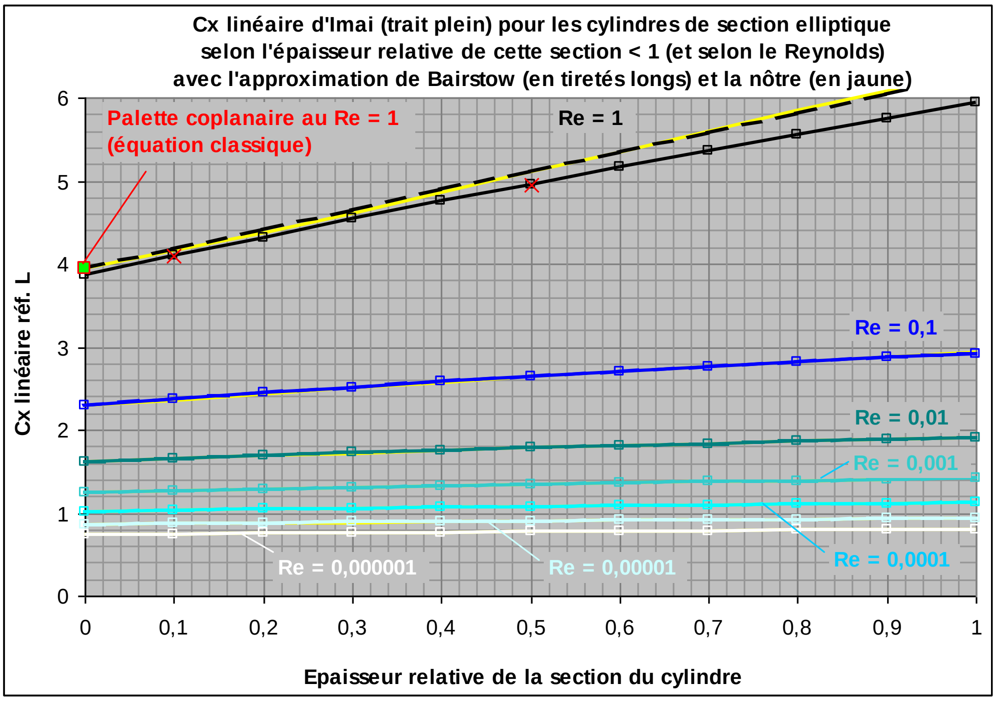
…ce qui ramène l'approximation d'Harrison ou Bairstow et coll. à :

$$C_{xLin\ Réf.L} = \frac{4\pi}{0{,}503\ ép^2 - 1{,}66ép + 3{,}16537 - Ln(R_{e\ell})}$$

Ce libellé est assez proche du nôtre [316].

Voici ce que donne cette simplification d'Harrison et Bairstow et coll. (en tiretés) et notre régression (en jaune) par rapport aux courbes d'Imai pour les différents Reynolds :

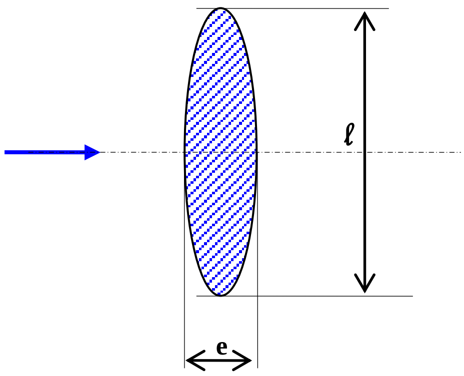
[316] Nous revenons sur cette proximité à l'instant.



Pour le Reynolds unitaire, notre régression pragmatique (en jaune) fait à peu près jeu égal avec l'approximation d'Harrison et Bairstow. Pour les autres Reynolds, elle est à peu près indiscernable des courbes d'Imai comme l'approximation des mêmes auteurs.

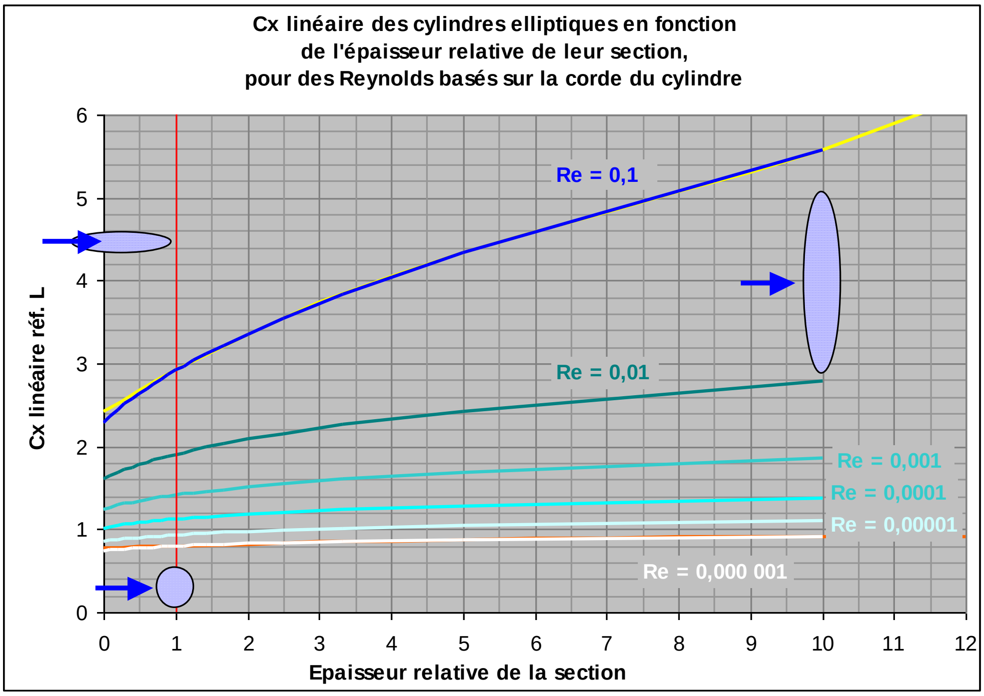
Cas des cylindres elliptiques d'épaisseur relative >1 sans incidence :

Imai donne également le $\mathbf{C_x}$ quadratique du même cylindre elliptique infini d'épaisseur relative **e/ℓ** < **1** lorsqu'il se présente à l'incidence **90°** (donc frontalement), soit comme sur le schéma ci-dessous :



La connaissance de ce $\mathbf{C_x}$ quadratique donne évidemment le $\mathbf{C_x}$ linéaire des cylindres infinis de section elliptique dont la corde (c.-à-d. le diamètre horizontal de la section, parallèle à la vitesse) est plus faible que le diamètre vertical, l'épaisseur relative étant alors supérieure à l'unité (la forme et la présentation de ces deux corps étant les mêmes, seule la dénomination de **e** et **ℓ** étant inversée).

Si l'on prend garde au fait que ce diamètre vertical (et frontal) est la base du Reynolds des calculs d'Imai (alors que précédemment la base de ce Reynolds était la corde [317]), on peut alors dessiner le reste des courbes du $\mathbf{C_x}$ linéaire du cylindre (à savoir le $\mathbf{C_x}$ linéaire des cylindres de section elliptique d'épaisseur relative hauteur ℓ/corde **e** supérieure à l'unité pour les différents Reynolds (c'est la partie droite du graphe ci-dessous) :



Sur ce graphe, la verticale rouge à l'abscisse **1** représente la frontière entre les deux Cx linéaires :

→ celui donné explicitement par Imai est à gauche et déjà connu de nous puisqu'il figure sur notre pénultième graphe ;

→ et celui qu'il donne implicitement est à droite.

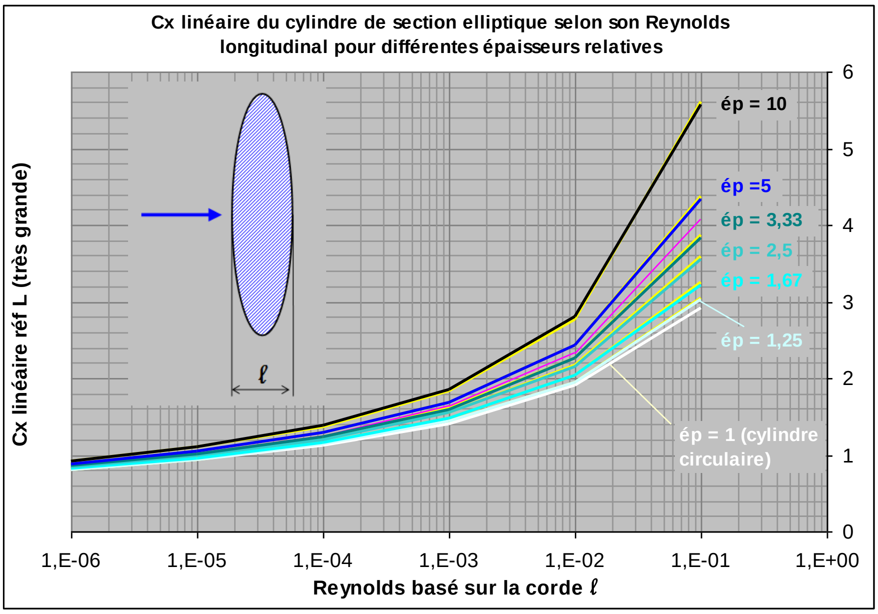
Les parties droites des courbes (c.-à-d. pour les épaisseurs relatives supérieures à **1**) admettent des régressions paraboliques d'ordre **3**, au moins jusqu'à l'épaisseur relative **10** (comme la courbe jaune que l'on devine derrière la courbe bleue dense supérieure).

Cependant, la construction d'une régression générale donnant le $\mathbf{C_x}$ linéaire des cylindres elliptiques en fonction de leur épaisseur relative (ici supérieure à **1**) et selon leur Reynolds menace d'être trop indigeste…

Pour trouver cette régression, il faut changer sa fusée d'épaule et demander au tableur la représentation alternative suivante (toujours pour les épaisseurs relatives >**1**) :

---

[317] Prendre ce diamètre vertical comme base du Reynolds est conforme à la physique et assez naturel pour des corps se présentant ainsi frontalement. Nous verrons cependant plus loin que par soucis d'unification des courbes, on peut être amené à garder comme base du Reynolds la corse (c.-à-d. le diamètre mesuré parallèlement à l'écoulement).



Ici le $\mathbf{C_x}$ linéaire est exprimé pour chaque épaisseur relative **ép** et en fonction du Reynolds (celui-ci étant à présent basé sur la corde ℓ [318]).

La forme des courbes nous donne alors l'idée d'expérimenter à nouveau le libellé suivant :

$$\mathbf{C_{xlin\ Réf.L}} = \frac{\mathbf{4\pi}}{\mathbf{Reliquat - Ln(R_{\ell})}}$$

…ledit Reliquat étant commandé par un curseur.

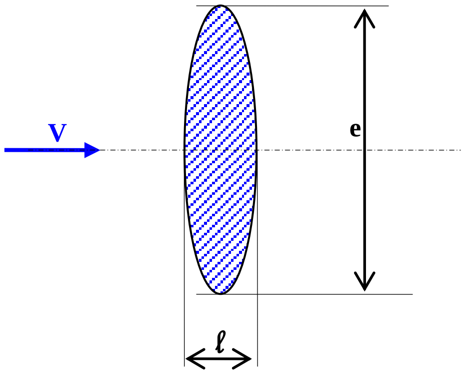
Ce libellé dessine la fine courbe fuchsia sur le graphe ci-dessus, courbe qui vient recouvrir de façon satisfaisante chacune des autres courbes selon la valeur du Reliquat (et donc selon la position du curseur).

Lorsque l'on dresse la courbe des valeurs de ce reliquat selon les épaisseurs relatives, on trouve qu'il évolue d'une façon logarithmique. Après un affinage de cette loi à l'aide de curseur, on dégage le libellé suivant :

$$\boxed{\mathbf{C_{xlin\ Réf.L}} = \frac{\mathbf{4\pi}}{\mathbf{2{,}037 - 0{,}91 Ln(ép) - Ln(R_{\ell})}}}$$

…libellé qui donne, en régime d'Oseen, le $\mathbf{C_x}$ linéaire du cylindre de section elliptique sans incidence (en référence à la longueur **L** supposée très grande du cylindre) et en fonction de l'épaisseur relative **ép = e/ℓ ≥1** de sa section et selon le Reynolds $\mathbf{R_{e\ell}}$ longitudinal de ce cylindre (c.-à-d. le Reynolds basé sur la corde ℓ de la section (mesurée parallèlement à la vitesse , c.-à-d. telle que sur le schéma ci-dessous) :

[318] Prendre comme base du Reynolds le diamètre mesuré parallèlement à l'écoulement n'est pas très « physique », mais est licite. Ce choix permettra de dessiner les courbes du $\mathbf{C_x}$ linéaire, selon le même Reynolds, des épaisseurs < et > 1.



Cette régression est précise à mieux que **1,11 %** pour les Reynolds inférieurs ou égaux à **0,1** dans la plage d'épaisseur relative allant de **1** à **10** (ces bornes comprises) : ce sont les courbes jaunes qui affleurent sous les autres ci-dessus [319].

Si par contre on ne s'intéresse qu'aux Reynolds ≤ **0,01**, on peut adopter dans le même libellé les nombres **2,02** et **–0,91** ; la précision sera alors meilleure que **0,75 %**

Dans sa thèse, Masliyah cite la simplification d'Harrison et Bairstow, Cave et Lang pour ces cylindres elliptiques d'épaisseur relative >**1**. Après correction d'un signe et adaptation à nos conventions de l'épaisseur relative, cette simplification s'écrit toujours :

$$C_{x\text{Lin Réf.L}} = \frac{4\pi}{\frac{1}{\text{ép}+1} - \gamma - \text{Ln}\left(\frac{R_{e\ell}}{\left(\frac{16}{\text{ép}+1}\right)}\right)}$$

...γ étant toujours la constante d'Euler-Mascheroni, soit **0,577216**.

De fait, dans leur texte, Bairstow et coll. indiquent p. 428 que leur libellé convient aussi bien aux épaisseurs relatives inférieures à **1** que supérieures à **1** (le Reynolds étant toujours basé sur le diamètre parallèle à l'écoulement).

Ce libellé s'écrit encore et toujours :

$$C_{x\text{Lin Réf.L}} = \frac{4\pi}{\frac{1}{\text{ép}+1} - \text{Ln}(\text{ép}+1) + 2{,}19537 - \text{Ln}(R_{e\ell})}$$

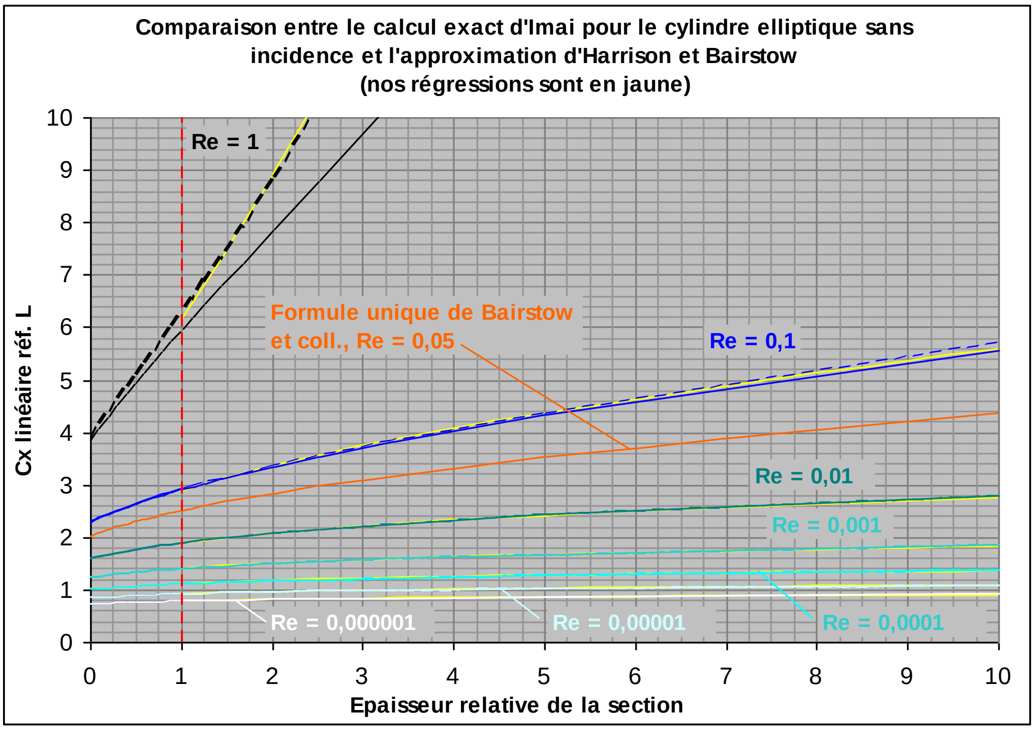
Le terme $\frac{1}{\text{ép}+1} - \text{Ln}(\text{ép}+1)$ admet une régression logarithmique assez précise, de sorte que, finalement, la simplification d'Harrison ou Bairstow peut être présentée sous la forme :

$$C_{x\text{Lin Réf.L}} = \frac{4\pi}{2{,}0411 - 0{,}918\,\text{Ln}(\text{ép}) - \text{Ln}(R_{e\ell})}$$

[319] Cette précision a seulement été testé par nous pour tous les Reynolds ronds (**0,000 001**, **0,000 01**, etc. jusqu'à **0,1**).

Cette régression est, dans son écriture, assez proche de la nôtre.

L'approximation d'Harrison ou Bairstow et coll. donne, du moins pour les Reynolds ≤ **0,01**, des courbes (en tiretés ci-dessous) très proches de celles d'Imai (que nous prenons pour les courbes *exactes*, en trait continu ci-dessous) :



Le Reynolds de toutes ces courbes, par soucis d'unification, est <u>basé sur le diamètre des sections elliptiques parallèle à la vitesse (la corde au sens aéronautique du terme)</u>.

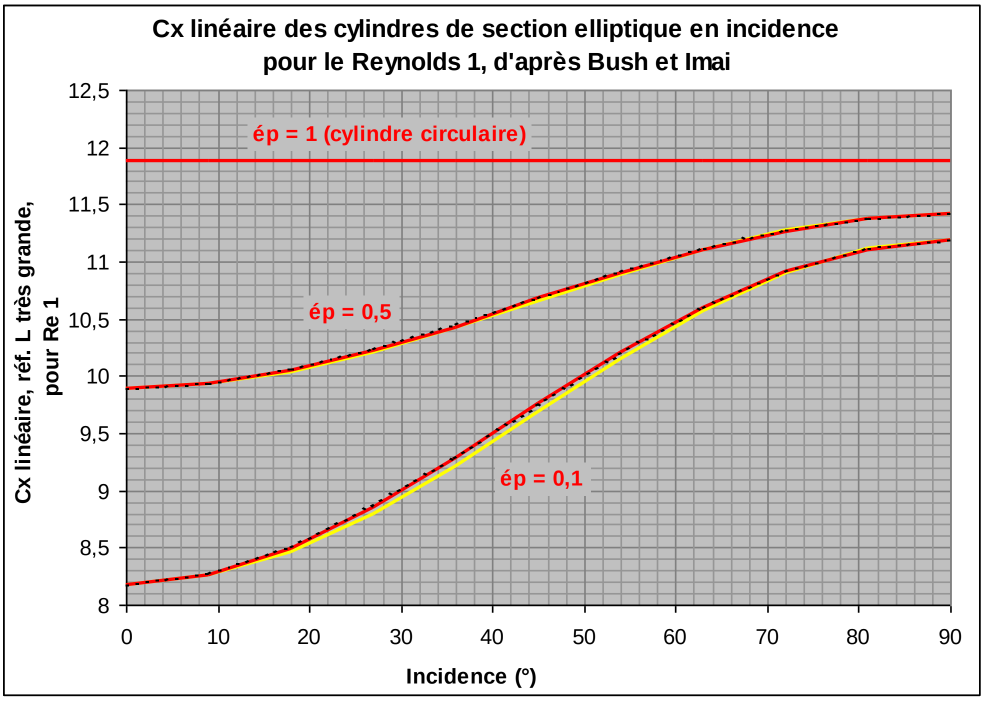
Pour les épaisseurs relatives supérieures à l'unité, ce Reynolds est donc artificiellement réduit (par rapport au Reynolds basé sur l'épaisseur qui est utilisé généralement pour cette présentation *frontale* du corps à l'écoulement) ; en tout état de cause, les parties des deux courbes noires d'abscisses >**2** sortent par trop du régime d'Oseen : leur Reynolds basé sur l'épaisseur est > **4** et l'amont de leur section doit d'ailleurs être le lieu d'un tourbillon de recirculation ou zone d'eaux mortes…

Notre propre régression apparaît en jaune sous certaines courbes.

Confions pour en finir avec ce sujet que nous n'avons pas réussi à unifier nos deux régressions pragmatiques encadrées ci-dessus pour le cylindre elliptique d'épaisseur relative < et > **1** alors que l'approximation de Bairstow, Cave et Lang convient parfaitement à toute la plage d'épaisseur relative possible (c'est notre courbe orange sur le graphe ci-dessus nommée *Formule unique de Bairstow et coll.*).

Quelques renseignements sur la Traînée du cylindre de section elliptique en incidence quelconque :

Nous nous étions promis de ne pas traiter la Traînée du cylindre de section elliptique en incidence. Mais nous pouvons dire rapidement que les deux exemples de Bush et d'Imai (pour les épaisseurs relatives de **0,5** et **0,1**) dessinent au Reynolds longitudinal unitaire [320] deux courbes en **S** entre l'incidence nulle et l'incidence **90°** (ce sont les courbes rouges, ci-dessous) :



Cela donne l'idée que le C_x linéaire de tels corps suit une loi en **sinus**^{2}.

De fait, quand on teste les libellés :

$$\mathbf{C_{xLin\ ép,\ \alpha} = C_{xLin\ ép,\ 0°} + (C_{xLin\ ép,\ 90°} - C_{xLin\ ép,\ 0°})\ sin(\alpha)^2}$$

…ou bien-sûr :

$$\mathbf{C_{xLin\ ép,\ \alpha} = C_{xLin\ ép,\ 90°} - (C_{xLin\ ép,\ 90°} - C_{xLin\ ép,\ 0°})\ cos(\alpha)^2}$$

…(libellés où l'indice **ép** renvoie toujours à l'épaisseur relative du cylindre considéré), on dessine les deux courbes jaunes ci-dessus.

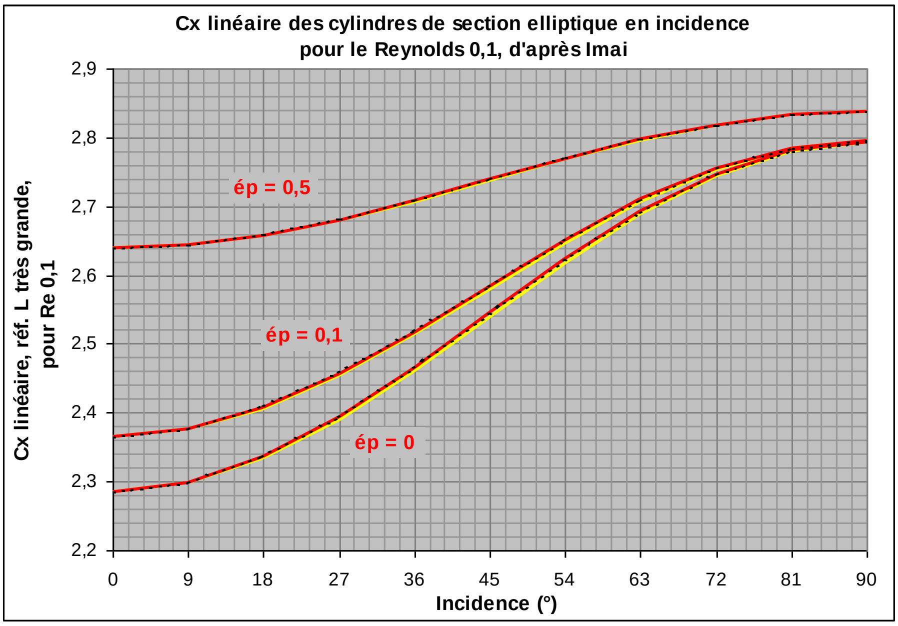
On doit constater que la courbe jaune pour l'épaisseur relative **0,5** est peu discernable de la courbe de Bush et d'Imai et que l'autre courbe jaune pour l'épaisseur relative **0,1** est relativement proche de la courbe des mêmes auteurs.

Pour cette dernière épaisseur relative **0,1**, l'exposant **1,88** au cosinus (au lieu de **2**) donne un résultat presque parfait (courbe tiretée noire ci-dessus à cette épaisseur), alors que pour l'épaisseur relative **0,5** cet exposant **1,88** reste convenable (courbe tiretée noire à cette épaisseur).

---

[320] …c.-à-d. le Reynolds basé sur la corde de la section elliptique (cette corde étant mesurée parallèlement à l'écoulement).

Pour le Reynolds longitudinal **0,1** [321], Imai a également fait le même calcul. Voici, en rouge, les C_x linéaires qu'on peut en tirer, avec en jaune les régressions en $\mathbf{sin(\alpha)^2}$:



On note que ces régressions jaunes en $\mathbf{sin(\alpha)^2}$ décrochent très légèrement aux incidences intermédiaires. En tiretés noirs, sur les courbes rouges, sont dessinées une autre régression en $\mathbf{sin(\alpha)^{1,94}}$. Cette dernière régression apparaît donc comme plus précise.

Si l'on note que cet exposant **1,94** est plus proche de **2** que le précédent (**1,88**), on ne peut que subodorer que notre régression pour le régime d'Oseen :

$$C_{xLin\ ép,\ \alpha} = C_{xLin\ ép,\ 90°} - (C_{xLin\ ép,\ 90°} - C_{xLin\ ép,\ 0°})\ \cos(\alpha)^{(1,88\ ou\ 1,94)}$$

…s'approche, à mesure que le Reynolds décroît, de l'équation établie plus haut pour un corps quelconque en suivant le principe d'additivité des écoulements en régime de Stokes…

Ce serait donc faire montre d'acharnement précisionnel que de ne pas considérer que, pour les Reynolds longitudinaux [322] inférieurs (ou même égaux) à **0,1** l'équation *additive* :

$$\boxed{C_{xLin\ ép,\ \alpha} = C_{xLin\ ép,\ 90°} - (C_{xLin\ ép,\ 90°} - C_{xLin\ ép,\ 0°})\ \cos^2(\alpha)}$$

…donne, pour chaque épaisseur **ép < 1** avec suffisamment de précision le C_x linéaire en régime d'Oseen d'un cylindre infini de section elliptique en incidence, C_x

[321] …c.-à-d. le Reynolds basé sur la corde de la section elliptique (cette corde étant mesurée parallèlement à l'écoulement).
[322] …c.-à-d. le Reynolds basé sur la corde de la section elliptique (cette corde étant mesurée parallèlement à l'écoulement).

linéaire établi en référence à la longueur **L** supposée très grande du cylindre (courbes jaunes ci-dessus, à comparer avec les courbes exactes rouges d'Imai).

Comme tous ces libellés admettent les valeurs d'**α** négatives et que la section elliptique du cylindre est symétrique, l'encadré ci-dessus donne des résultats pour toutes les incidences possibles du même cylindre [323].

Il est alors intéressant de noter que, mathématiquement, dans les conditions précisées ci-dessus, à l'incidence **45°** le $\mathbf{C_x}$ linéaire du cylindre de section elliptique vaut la moyenne du $\mathbf{C_x}$ de ce cylindre à **0** et **90°** ; cela apparaît d'ailleurs lorsque l'on pose une règle sur le graphe précédent.

La palette infinie étant un cylindre infini d'épaisseur relative nulle, son $\mathbf{C_x}$ linéaire à **45°** est également la moyenne de son $\mathbf{C_x}$ linéaire à **0** et **90°** ; cette loi est respectée à **0,24 %** près (ou moins selon le Reynolds) par notre régression donnant le $\mathbf{C_x}$ linéaire de la palette en incidence en régime d'Oseen.

Pour la même incidence **45°**, et bien que cela ne soit pas notre sujet, on peut tirer de la loi tirée plus haut de l'additivité des écoulements en régime de Stokes une conclusion sur la Portance des corps :

$$\mathbf{C_{y\,Lin\,Réf.L\,45} = ½\,(C_{xLin\,90°} - C_{xLin\,0°})}$$

C.-à-d. que le $\mathbf{C_y}$ linéaire (ou Coefficient Adimensionnel Linéaire de Portance) d'un corps en régime de Stokes est maximal à l'incidence **45°** et y vaut la moitié de l'écart entre son $\mathbf{C_x}$ linéaire à **90°** et à **0°**.

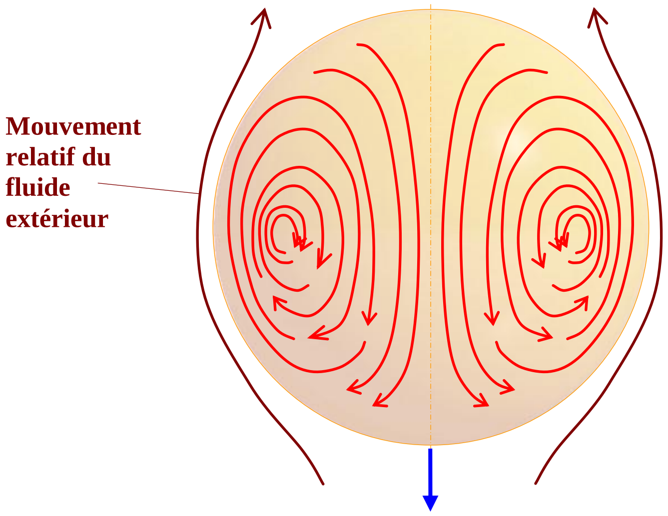
Nous ne pouvons dire si cette propriété se maintient en régime d'Oseen, mais Wu et Thompson démontrent dans leur texte qu'elle est vérifiée par la palette à **45°** au Reynolds (assez fort) de **0,06**.

Les mêmes auteurs pensent d'autre part que l'angle de Portance maximale d'une palette (sans parler de la valeur de cette Portance maximale) diminue à peu près linéairement de **45°** au Reynolds **1** jusqu'aux alentours de **15°** au Reynolds **1000** (à peu près linéairement du moins si les Reynolds sont représentés logarithmiquement et les incidences de façon linéaire). Cette diminution de l'angle de Portance maximale est attribuée par ces auteurs à la formation d'une zone d'eaux mortes (ou décollements) en aval de la palette…

[323] Il conviendra cependant de veiller au fait que pour les fortes incidences la section de l'ellipse devient *frontale*, ce qui tend à générer des décollements à son aval pour des Reynolds de plus en plus faibles…

Traînée des gouttes ou bulles dans d'autres fluides :

Ces corps paraissent devoir être traités de façon différente puisque l'écoulement du fluide extérieur sur leurs parois entraîne par sa viscosité le fluide qui les compose. Voici, par exemple, d'après P. Savic, une représentation de la circulation interne à une goutte d'eau se déplaçant dans de l'huile de périnée de castor :



Le diamètre de la goutte est **1,77 cm**, la vitesse de chute est de **1,16 cm/s**, ce qui donne un Reynolds de **~ 0,2**.

On remarque que la goutte chutant (selon la flèche bleue), le fluide extérieur crée une friction vers le haut, ce qui entraîne le fluide intérieur (l'eau) en un mouvement toroïdal…

Clift et coll. font évidemment état de la solution de Hadamard et de Rybczynski :

$$C_{xQuad} = \frac{16+24k}{R_{eD}(1+k)}$$

…où **k** est le quotient de viscosités μ_p/μ_f , quotient de la viscosité du fluide constituant la particule (ou bulle ou goutte) sur la viscosité du fluide où la particule se déplace.

Il apparaît vite que lorsque la particule est une bulle de gaz se déplaçant dans un liquide, **k** tend vers zéro et la C_x quadratique de cette bulle est simplement $16/R_{eD}$, soit les **2/3** du C_x quadratique des sphères solides (ce n'est d'ailleurs pas parce que la partie de la Traînée due à la friction tend vers zéro puisqu'en régime de Stokes pression et friction sont dues à la viscosité ; au demeurant, le C_x de pression, pour toutes les valeurs de **k**, vaut toujours le tiers du C_x complet de la sphère fluide : ce C_x de pression varie donc bien en fonction du quotient de viscosités **k**).

Dans le cas inverse d'une goutte de liquide tombant dans un gaz, le quotient de viscosités **k** tend vers l'infini et l'on retombe sur un C_x quadratique de $24/R_{eD}$ (qui est celui des sphères rigides).

Après conversion du C_x quadratique en C_x linéaire on trouve :

$$\boxed{C_{xLin} = \pi \frac{2+3k}{1+k}}$$

…qui est le C_x linéaire (en référence à son diamètre) de la sphère fluide se déplaçant dans un fluide (selon Hadamard et Rybczynski), **k** étant le quotient de viscosités μ_p/μ_f , quotient de la viscosité du fluide constituant la particule (ou bulle ou goutte) sur la viscosité du fluide où la particule se déplace.

Et pour la bulle de gaz dans un liquide ($k \approx 0$) $C_{xLin} = 2\pi$, alors que pour la goutte de liquide dans un gaz (**k** très grand) on retrouve le $C_{xLin} = 3\pi$ de la sphère rigide…

Le texte de Goodarz Ahmadi donne quant à lui :

$$F = 3\pi\, \mu\, VD\ \frac{1+\dfrac{2}{3k}}{1+\dfrac{1}{k}}$$

…ce qui revient au même.

À titre d'exemple pratique, Clift et coll. écrivent p. 125 :

« Par exemple, pour des gouttes d'eau dans l'air, la courbe du C_x quadratique selon le Reynolds suit précisément la courbe relative aux sphères rigides, ceci jusqu'à un Reynolds de 200 correspondant à un diamètre de goutte d'approximativement 0,85 mm. » [324]

Il est cependant nécessaire d'ajouter que Clift et coll. émettent des doutes sur la validité pratique de cette solution de Hadamard et Rybczynski pour les petits Reynolds. Ils écrivent, p. 35 :

« La théorie d'Hadamard-Rybczynski prédit que la vitesse stabilisée d'une sphère fluide [325] est 50 % plus forte que celle d'une sphère rigide de même taille et densité [326]. Cependant, il est communément observé que les petites [327] bulles et gouttes tendent à obéir à la loi de Stokes [pour nous $C_{xLin} = 3\pi$, note de BdeGM] plutôt qu'aux résultats d'Hadamard-Rybczynski. Mieux encore, la circulation interne est essentiellement absente. »

Guyon et coll. écrivent, quant à eux :

« En pratique, si la surface d'une bulle est partiellement rigidifiée par la présence d'agents tensio-actifs en solution qui se fixent à l'interface, on peut obtenir une valeur intermédiaire [entre 2π et 3π pour le C_x linéaire] ; ce sera souvent le cas, en pratique pour une bulle montant dans une eau insuffisamment purifiée. »

Sur ce dernier point Clift et coll. vont plus loin puisque p. 38 ils précisent que « les mesures nécessaires à la purification des dispositifs d'essais et les précautions

---

[324] C'est à peu près le constat que l'on peut tirer du C_x quadratique des gouttes de pluie et brouillard sur notre graphe généraliste déjà montré.

[325] Clift et coll. devraient plutôt écrire sphère *gazeuse* pour que le quotient de viscosité **k** soit vraiment proche de **zéro**.

[326] Pour cette sphère fluide, $K = 0$ et l'équation de Hadamard et Rybczynski prédit donc un C_x plus faible de **50 %**, ce qui donne une vitesse de chute stabilisée plus forte de **50 %** [note de BdeGM].

[327] C'est nous qui soulignons petites : Il apparaît en effet que ce n'est qu'en régime de Stokes que les bulles et gouttes défient la théorie d'Hadamard-Rybczynski

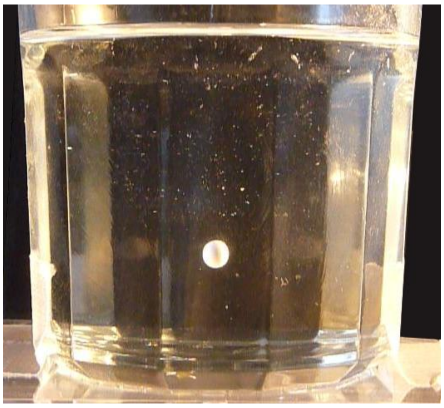
indispensables pour éviter toute nouvelle contamination sont tellement strictes qu'il faut accepter la présence de contaminants tensio-actifs dans la plupart des dispositifs d'essais de quelque importance. Pour cette raison, les prescriptions de la théorie d'Hadamard-Rybczynski ne sont pas souvent respectées en pratique, bien que cette théorie énonce des cas limites très intéressants. »

Influence des parois :

L'écoulement de Stokes est très sensible à la présence des parois : le mouvement d'un corps est très ralenti lorsque ce corps se déplace près d'une paroi.

Deux types de parois ont été pris en compte par les chercheurs : les parois latérales le plus souvent cylindriques (parois cylindrique de génératrices parallèles au mouvement de décantation, par exemple) et le fond du récipient dans lequel se produit la décantation (paroi normale au mouvement, donc).

Pour ce dernier type de parois (le fond), le phénomène est extrêmement net : lors de nos expériences de chute de billes dans un pot de confiture rempli de glycérine :

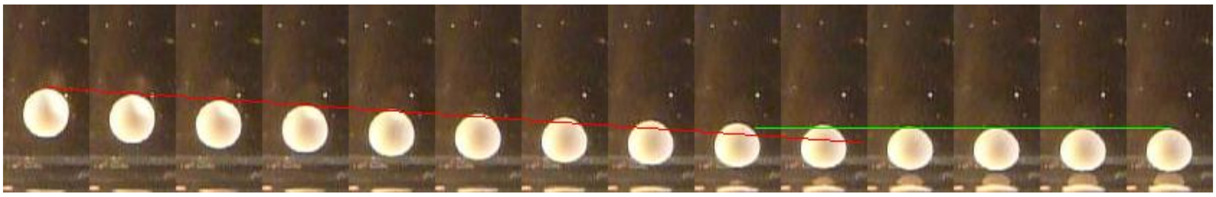


…nous avons été surpris du fort ralentissement de la bille à l'approche du fond du récipient (ralentissement qui est net dans le dernier centimètre avant le fond).

Il faut voir ce ralentissement de ses yeux pour l'apprécier au mieux : nous en avons publié une animation au lien :

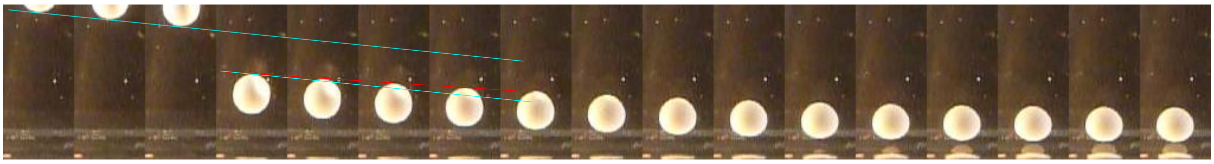
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Décantation_d'une_sphère_dans_la_glycérine_à_l'approche_du_fond.gif

Mais une concaténation des images d'une expérience, à l'approche du fond du récipient montre bien le phénomène :



Sur ces images concaténées nous avons capté par une droite rouge le mouvement de la sphère sur les trois premières images de gauche. Il apparaît que la vitesse de la sphère dont fait foi cette droite rouge est fortement diminuée pendant son approche du fond (le touché est attesté par l'horizontale verte).

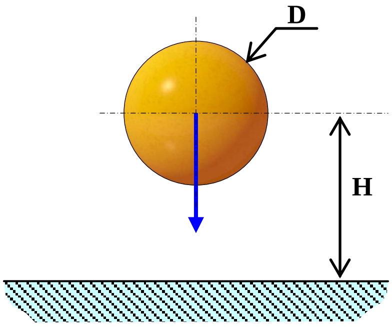
Mieux encore, la pente de la droite rouge ci-dessus n'est pas vraiment représentative de la vitesse de la sphère hors de l'influence du fond : l'influence du fond s'y fait déjà sentir, comme en témoigne la pente de la droite bleu clair ci-dessous (représentative de la vitesse de la sphère plus distante du fond) droite bleu clair dont la pente apparaît plus forte que celle de la droite rouge :



Pour ce cas de l'influence du fond, Goodarz Ahmadi relaye les études de Brenner (1961) qui conduisent, au premier ordre, à cette estimation du $\mathbf{C_x}$ quadratique :

$$\mathbf{C_{xQuad}} = \frac{\mathbf{24}}{\mathbf{R_{eD}}}\left[\mathbf{1} + \frac{\mathbf{D}}{\mathbf{2H}}\right]$$

…la distance **H** étant celle dessinée ci-dessous :



Comme nous l'avons vu précédemment et comme le lecteur en a l'intuition, le coefficient **[1+D/2H]** pondérera de la même façon notre coefficient linéaire. De sorte que l'on aura :

$$\mathbf{C_{x}}_{\mathrm{Lin}} = \mathbf{3\pi}\left[\mathbf{1} + \frac{\mathbf{D}}{\mathbf{2H}}\right]$$

…qui est, au premier ordre, le $\mathbf{C_x}$ linéaire de la sphère, en référence à son diamètre, à la distance **H** du fond.

Il est à remarquer que lorsque la sphère touche le fond (**H = D/2**) son $\mathbf{C_x}$ (linéaire ou quadratique) est multiplié par deux (d'après ce libellé de Brenner qui n'est valable qu'on premier ordre : on peut penser que le $\mathbf{C_x}$ sera en réalité multiplié par un facteur plus fort).

Mais il est aussi à remarquer qu'à la distance **H = 10D**, le $\mathbf{C_x}$ est encore augmenté de **5 %**. [328]

Finalement, on peut peut-être comparer cet « effet de fond » avec « l'effet de sol » (ou de coussin d'air) qui existe lorsqu'un ballon de baudruche s'approche du sol

[328] Pour les 3 sphères de gauche sur notre concaténation ci-dessus, le $\mathbf{C_x}$ est déjà majoré de **14 %**...

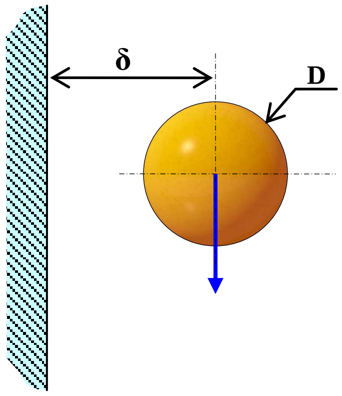
au terme de sa chute [329], cependant cet effet de sol est extrêmement faible dans le cas du ballon et beaucoup plus fort dans le cas de la sphère en régime de Stokes.

Un phénomène de la même importance se produit, toujours pour la sphère en régime de Stokes, lorsque cette sphère se déplace trop près d'une paroi du récipient qui contient le fluide. Dans nos maigres expériences, nous avons effectivement pu constater un net ralentissement de nos billes près des parois : ce ralentissement est d'ailleurs d'autant plus facile à constater qu'il se produit tout au long de la chute (et donc à vitesse vite stabilisée) et non pas, comme précédemment à l'approche du fond.

Pour ce dernier cas de l'influence d'une paroi parallèle au déplacement, Goodarz Ahmadi, relayant cette fois Faxén [330] (1923), donne le libellé du $\mathbf{C_x}$ quadratique suivant :

$$\mathbf{C_{xQuad}} = \frac{\mathbf{24}}{\mathbf{R_{eD}}}\left[\mathbf{1} - \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{16}}\left(\frac{\mathbf{D}}{\mathbf{2\delta}}\right) + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{8}}\left(\frac{\mathbf{D}}{\mathbf{2\delta}}\right)^{\mathbf{3}} - \frac{\mathbf{45}}{\mathbf{256}}\left(\frac{\mathbf{D}}{\mathbf{2\delta}}\right)^{\mathbf{4}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{16}}\left(\frac{\mathbf{D}}{\mathbf{2\delta}}\right)^{\mathbf{5}}\right]^{\mathbf{-1}}$$

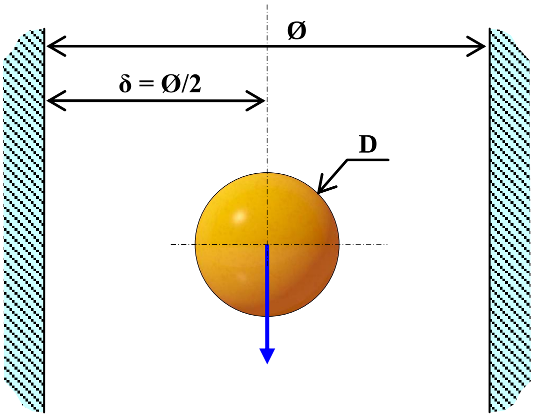
…ce libellé étant valable à forte distance **δ** d'une paroi plane, **δ** étant défini comme suit :



Clift et coll. se sont intéressés plus spécialement à l'influence des parois cylindriques parallèles au mouvement de décantation lorsque la décantation se fait dans l'axe du cylindre (la particule étant à la distance **δ = Ø/2** de toutes les parois) :

[329] Des mesures de ce ralentissement pourraient constituer un travail estudiantin passionnant.

[330] Faxén qu'il écrit Faxon…

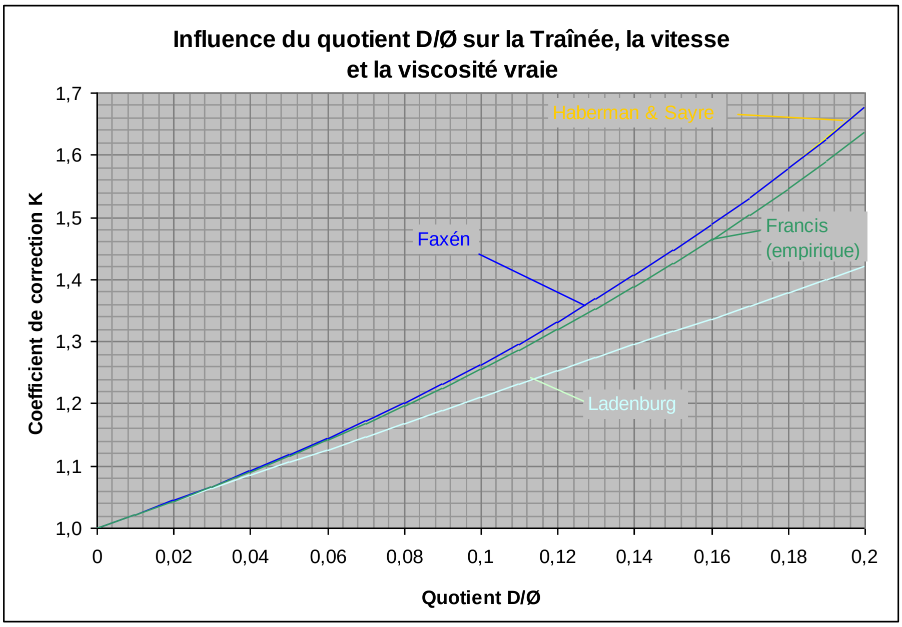


Pour ce cas de la particule décantant dans l'axe d'un cylindre vertical, c'est le quotient **D/Ø** qui va être le paramètre principal (**Ø** étant le diamètre du cylindre).

La vitesse de chute de la particule se trouve être corrigée (diminuée, en l'occurrence) d'un facteur **k**, ce facteur **k** étant fonction du quotient **D/Ø.**

Les libéralités que permet le caractère linéaire des calculs en régime de Stokes font que ce coefficient de correction **k** s'applique également à la Traînée, aux $\mathbf{C_x}$ quadratique et linéaire ainsi qu'à la viscosité si celle-ci est déterminée à partir de mesures de chute dans un récipient cylindrique de diamètre significativement trop faible :

Clift et coll. relayent alors les valeurs de Faxén [331], Haberman & Saye, Ladenburg, ainsi que la valeur empirique de Francis :



Il apparaît sur ce graphe que le libellé analytique de Haberman & Saye (en jaune) où λ signifie **D/Ø** :

$$\mathbf{k} = \frac{1 - 0{,}75857\lambda^5}{1 - 2{,}1050\lambda + 2{,}0865\lambda^3 - 1{,}7068\lambda^5 + 0{,}72603\lambda^6}$$

[331] Ici pour ce cas de la particule décantant au centre d'un cylindre.

…dessine, pour les valeurs raisonnables de **λ** auxquelles nous nous restreignons (de **0** à **0,2**), la même courbe que le libellé de Faxén (en bleu dense) :

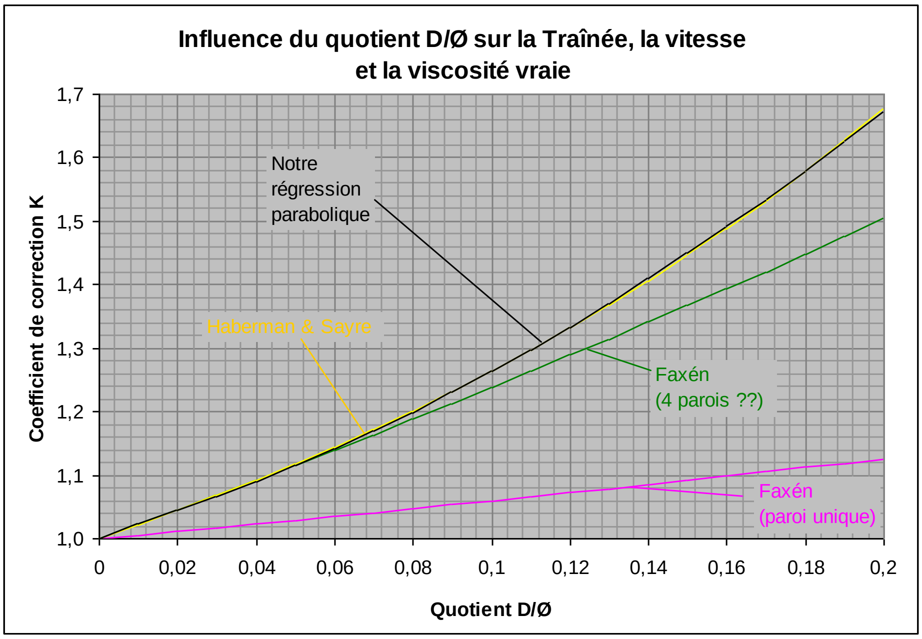
$$\mathbf{k} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1 - 2{,}104\lambda + 2{,}09\lambda^3 - 0{,}95\lambda^5}}$$

…l'analyse mathématique des deux libellés expliquant d'ailleurs bien cela [332].

Au demeurant, ce serait faire de l'acharnement analytique que de ne pas proposer une régression parabolique pour ce même coefficient **k** :

$$\mathbf{k = =7{,}6411\ \lambda^2 + 1{,}8226\ \lambda\ + 1}$$

Cette régression parabolique dessine la courbe noire ci-dessous, en comparaison avec la courbe jaune de Haberman & Sayre :



Le libellé de Faxén (en fuchsia), donnant le coefficient de correction **k** pour une particule se déplaçant à distance assez grande **δ** d'une paroi plane unique, a été porté sur ce dernier graphe pour mémoire (avec **D/(2δ)** comme abscisse).

Nous avons pas le savoir mathématique qui permettrait d'expliquer le passage de ce libellé de Faxén (pour un plan vertical unique) à celui d'Haberman et Sayre (pour une paroi cylindrique), mais il nous vient l'idée assez fruste que la hauteur des ordonnées au-dessus de **1** de la courbe de Faxén (en fuchsia) doit être multipliée par **4** pour être comparable la hauteur des ordonnées de Haberman et Sayre au dessus de **1** également, c.-à-d. que :

$$\mathbf{4*(k_{Faxén}-1) +1 \approx\ k_{Haberman\&Sayre}}$$

Ce calcul fruste dessine la courbe verte notée « Faxén (4 parois ??) ».

[332] Par exemple, la puissance cinquième de **0,2** vaut **3,2 dix millièmes**.

La proximité de cette courbe verte avec celle d'Haberman et Sayre accrédite l'idée, au moins pour les abscisses inférieures à **0,08**, que la décantation d'une particule entre quatre plans déterminant une section carrée de côté **2δ**) s'approcherait de la décantation dans l'axe d'un cylindre du même *diamètre* **Ø = 2δ**…

Cette dernière remarque, qui est de nous, possède au moins des vertus mnémotechniques…

Terminons-en en précisant que lors de nos maigres expériences, le diamètre de notre sphère était de **6 mm** et le diamètre moyen de notre récipient était de **75 mm**, ce qui, donne un quotient de diamètre de **0,08** qui produit un coefficient de correction **k** de **1,2** : tout se passe donc comme si notre glycérine était **20 %** plus visqueuse…

Nous avons pu mesurer une vitesse de chute de notre bille blanche de **6,57 mm/s**. Or la vitesse qu'elle devrait atteindre (en dehors de tout effet de paroi et de fond) est de **7,64 mm/s**. Si l'on tempère la vitesse comme ci-dessus en fonction du rapport **D/Ø** (dont ou a vu qu'il pronostiquait une viscosité augmentée de **20 %**, donc une vitesse diminuée d'autant) on obtient : **7,64/1,2 = 6,37 mm/s**…

Il est d'autre part satisfaisant de remarquer qu'avec la vitesse de **7,64 mm/s**, le Reynolds de l'écoulement est de **0,0381**, largement en régime de Stokes, donc [333].

Nous n'avons pas inventé ce C_x linéaire des corps en régime de Stokes :

Enthousiasmé par l'idée des trois chercheurs beijingois, nous l'avons adoptée, non sans avoir à cœur de la simplifier. Et ce faisant nous sommes tombé dans le chemin de nos devanciers.

Ainsi le grand Hoerner lui-même écrit dans son ouvrage Drag, au chapitre *Traînée de frottement* et au paragraphe *Très petits Nombres de Reynolds* :

« La Traînée d'une plaque circulaire mince, exposée des deux côtés à un courant tangentiel est indiquée par le coefficient théorique [334] non dimensionnel :

F/µ DV = 5,34

[…] Ce type de traînée est aussi proportionnel à la vitesse **V** (en m/sec) : nous avons ici un exemple typique où la loi « quadratique », qui est la base des coefficients de force en Dynamique des Fluides, ne s'applique pas »

Plus près de nous, Frank M. White écrit, à titre d'exercice, dans son ouvrage :

« P5.50 […] (b) Le coefficient de traînée évoqué dans ce chapitre, $\mathbf{C_x = F/(1/2\ \rho\ V^2)}$ n'est pas approprié pour ce type d'écoulement [les écoulements rampants c.-à-d. le régime de Stokes]. Définissez à la place de ce $\mathbf{C_x}$ un coefficient de traînée plus approprié et nommez-le C_c (pour "*creeping flow*"). (c) Pour un micro-organisme de forme sphérique, la force de traînée peut être calculée exactement d'après les équations du mouvement en écoulement rampant. Le résultat est $\mathbf{F = 3\pi\ \mu\ U\ d}$. Écrivez les expressions pour les deux formes de coefficient de traînée, C_c et $\mathbf{C_x}$, pour une sphère dans ces conditions d'écoulement rampant. » [335]

---

[333] La viscosité de la glycérine est de **1,49 P_a.s** et sa masse volumique (nécessaire au décompte de la poussée d'Archimède) est de **1260 kg/m³**. Nos billes mesurent **5,9 mm** de diamètre et pèsent **0,2 g**.

[334] Nous pensons qu'Hoerner écrit « théorique » parce que ce coefficient a été déterminé par les calculs d'Oberbeck, en 1876.

[335] "(b) The drag coefficient discussed in this chapter $\mathbf{C_D = D/(1/2\rho V^2 A)}$ is not appropriate for this kind of flow [the creeping flow]. Define instead a more appropriate drag coefficient, and call it C_c (for creeping flow). (c) For a spherically shaped micro-organism, the drag force can be calculated exactly

White ne se contente donc pas d'évoquer un coefficient de Traînée adapté aux écoulements de Stokes : il le fait déterminer par ses étudiants, en concurrence avec le $\mathbf{C_x}$ quadratique classique…

En 2002, dans leur ouvrage Fluid flow handbook, éd. McGraw-Hill Professional, Jamal Saleh et Stavros Tavoularis écrivent [336] :

« [Lorsque le Nombre de Reynolds tend vers **0**, le $\mathbf{C_x}$ quadratique] n'est plus une bonne échelle [ou graduation, ou mesure] pour normaliser la Traînée. La bonne échelle est la force visqueuse $\mathbf{\mu D V_\infty}$ et un coefficient de Traînée adimensionnel approprié à bas Reynolds est le Coefficient de Traînée visqueuse $\mathbf{C_D'}$ tel que :

$$\mathbf{C_D' = \frac{F_D}{\mu V_\infty D}}$$

Pour un écoulement de Stokes autour de la sphère $\mathbf{C_D' = 3\pi}$, […] pour le disque circulaire mince normal au flux $\mathbf{C_D' = 8}$, pour le même disque mince circulaire parallèle au flux $\mathbf{C_D' = 16/3}$. [337] »

Plus près encore de nous, mais géographiquement, on trouve, dans l'ouvrage MÉCANIQUE DES FLUIDES 2ème année PC-PC*/PSI-PSI* :

« Pour tout écoulement à nombre de Reynolds $\mathbf{R_e}$ faible, autour d'un obstacle quelconque de dimension finie, le coefficient de Traînée [quadratique] est inversement proportionnel à $\mathbf{R_e}$. Il est ainsi possible de montrer que la force de traînée a la forme générale suivante (le maître-couple **S** étant proportionnel à $\mathbf{L^2}$) :

$$\mathbf{C_x = \frac{k}{R_e} \iff F_{traînée} = k' \mu V_\infty L}$$

Les facteurs numériques **k** et **k'** sont généralement de l'ordre de l'unité : ils dépendent de la forme et de l'orientation de l'obstacle. Ils peuvent être déduits de l'expérience ou se calculer pour certaines géométries simples. »

Dans l'ouvrage PHYSIQUE TOUT-EN-UN PC-PC*, 4ème éd. de Marie Noëlle Sanz et coll., éd Dunod, 2016, on peut lire, à titre de généralisation « des résultats obtenus pour la sphère » : « Pour $R_e < 1$, la force de traînée est de la forme $\vec{F} = -\alpha \mu L \vec{V}$ où $\boldsymbol{\alpha}$ est une constante numérique. »

Clift, Grace et Weber, dans leur ouvrage, utilisent pour l'étude de la décantation de particules de formes quelconques des *coefficients principaux de résistance en translation* $\mathbf{c_i}$ qui sont définis par l'équation :

$$\mathbf{F = -\mu\, c_i\, V}$$

---

from the equations of motion for creeping flow. The result is $\mathbf{D = 3\pi \mu U d}$. Write expressions for both forms of the drag coefficient, C_c and C_D , for a sphere under conditions of creeping flow."

[336] Ils citent P. M. Gerhart et J. I. Hochstein dans FUNDAMENTAL OF FLUID MECHANICS, ADDISON WESLEY, READING, Massachusetts.

[337] Les auteurs ajoutent alors des valeurs légèrement fautives pour la Traînée transverse et axiale du bâtonnet (en référence à la longueur de ces bâtonnets, ce qui montre qu'ils savent effectuer les changements de longueurs de référence).

Ces coefficients c_i , définis pour chacun des trois axes principaux de la particule, intègrent donc la longueur caractéristique de la particule (son rayon **a**, par exemple pour une particule sphérique),ce qui fait qu'ils ne sont pas adimensionnels [338] : ce sont des Longueurs équivalentes de Traînée.

Pour parvenir au coefficient **k'** permettant la comparaison de la Traînée d'un ellipsoïde avec celle de la sphère, coefficient **k'** que nous avons fréquemment utilisé dans notre texte, Clift et coll. doivent donc effectuer le quotient $c_i / 3\pi d$ qu'ils nomment quotient de traînée (drag ratio), **d** étant le diamètre de la sphère.

Dans MÉCANIQUE DES FLUIDES, traduction de Fluid Mechanics, Fundamentals and Applications, de Çengel et Cimbala, MM Chagnes, Griveau, Lair et Ringuedé écrivent, p. 499 :

« Pour des objets à 3 dimensions, non sphériques, la poussée aérodynamique en écoulement rampant est toujours donnée par F_D = constant*µVL ; cependant la constante n'est plus 3π mais dépend à la fois de la forme et de l'orientation du corps. »

En 1963, David Kohlman, reprenant la démarche de C. M. White (homonyme de notre contemporain Franck M. White évoquéà l'instant), a expliqué les paradoxales caractéristiques de Traînée du cylindre infini : comme C. M. White, il a fait un large usage du C_x linéaire (et comme White, il le nomme **α**) : Ces deux auteurs entendaient évidemment profiter de la constance de ce coefficient en régime de Stokes.

En 1977, dans *A critical remark on use of drag coefficient at low Reynolds numbers*, Momchilo M. Zdravkovich pose un regard critique et constructif (très proche du nôtre) sur la définition du coefficient de Traînée aux bas Reynolds.

Il propose pour ces bas Reynolds l'utilisation du coefficient de résistance déjà suggéré implicitement par Lamb en 1911. D'après Zdravkovich, en effet, ce grand chercheur illustre par deux applications numériques son résultat donnant la Traînée au mètre des cylindres de longueur infinie (que nous avons vu ici) : ces deux applications numériques sont, pour les deux Reynolds diamétraux **0,4** et **0,2** :

4,31µV et **3,48µV**

Zdravkovich relève que les deux nombres **4,31** et **3,48** « correspondent à un coefficient de résistance C_R [qu'il appelle *Coefficient de résistance de Lamb*] défini de la façon suivante :

$$C_R = \frac{F}{L\mu V}$$ »

…équation où **F** est la force de Traînée, **L** la longueur du cylindre *infini*, **µ** la viscosité dynamique et **V** la vitesse de l'écoulement.

Ce que Zdravkovich appelle *Coefficient de résistance de Lamb* est évidemment le C_x linéaire dont nous avons fait la promotion dans ce texte (ici en référence longueur **L**, comme il sied pour les cylindres infinis).

[338] Rappelons que la viscosité dynamique **µ** s'exprime en **Pascal*seconde**.

Le même Zdravkovich continue en constatant que « le cours de l'histoire n'a pas suivi le chemin indiqué par Lamb » puisque dans son remarquable travail d'unification des $\mathbf{C_x}$ du cylindre sur toute la plage de Reynolds possibles, Wieselsberger (en 1921) a retenu comme définition le $\mathbf{C_x}$ quadratique bien connu.

> Cependant, puisque ce travail d'unification nécessitait une définition commune à tous les Reynolds du Coefficient de Traînée, on ne peut qu'admettre le choix de Wieselsberger, même si l'autre choix, celui du $\mathbf{C_x}$ linéaire (ou Coefficient de Traînée de Lamb si l'on veut) permet également le même travail d'unification (comme nous l'avons montré, mais pour la sphère, dans ce graphe)…

Ce choix de Wieselsberger tend cependant, au vu de la courbe unifiée qui en résulte, « à donner l'impression que la résistance aux bas Reynolds prend des valeurs énormes » [nous citons toujours ici Zdravkovich].

Le même Zdravkovich continue en rappelant les travaux de C. M. White :

« En opposition avec cette tendance, C. M. White présenta, en 1946, ses résultats sous la forme d'un coefficient de traînée défini [linéairement] à la façon de Lamb, coefficient de traînée qu'il symbolisa par $\boldsymbol{\alpha}$. […] Le remarquable résultat qu'il obtint en procédant de la sorte fut qu'il put regrouper tous ses résultats expérimentaux [concernant des cylindres plus ou moins longs] entre les valeurs **2** et **8** de ce coefficient de traînée de Lamb. »

De même, il est édifiant que Janour utilise, pour la quantification de la Traînée des bords marginaux des plaques se déplaçant dans leur plan en régime de Stokes, ce $\mathbf{C_x}$ linéaire dont nous faisons la promotion (et qu'il appelle, quant à lui, *Formule ou Expression de Stokes*). La page 4 de son Technical Memorendum NACA TM 1316 montre bien qu'il avait les idées très claires au sujet des différentes formulations possibles de la Traînée : après avoir énuméré les différentes formulations possibles de la Traînée **W** :

$\mathbf{W = k_0(R_e)\ \mu^2/\rho}$
$\mathbf{W = k_1(R_e)\ \mu\ L\ V}$ (Stokes)
$\mathbf{W = k_2(R_e)\ L^2\rho\ V^2}$ (Newton)
$\mathbf{W = k_3(R_e)\ L^3\rho\ V^3/\nu}$

…chaque formulation utilisant la longueur **L** et donnant naissance à un coefficient de Traînée adimensionnel $\mathbf{k_i}$ dépendant de $\mathbf{R_e}$, il écrit :

« Il serait plus commode de faire usage, dans chaque plage de Reynolds, de la formulation pour laquelle [le coefficient de Traînée] $\mathbf{k_i(R_e)}$ est constant. ».

Au terme de notre texte, le lecteur conviendra que nous avons toujours insisté sur cette grande qualité du $\mathbf{C_x}$ linéaire (qui est le Coefficient de Traînée de Lamb) d'être indépendant du Reynolds de l'écoulement en régime de Stokes (autant que faire se peut puisque, par exemple, la Traînée du cylindre de longueur infinie est légèrement dépendante de son Reynolds diamétral)…

Mais au fait : que donne la dernière formulation de la Traînée de Janour (celle qui fait naître le coefficient adimensionnel $\mathbf{k_3}$?

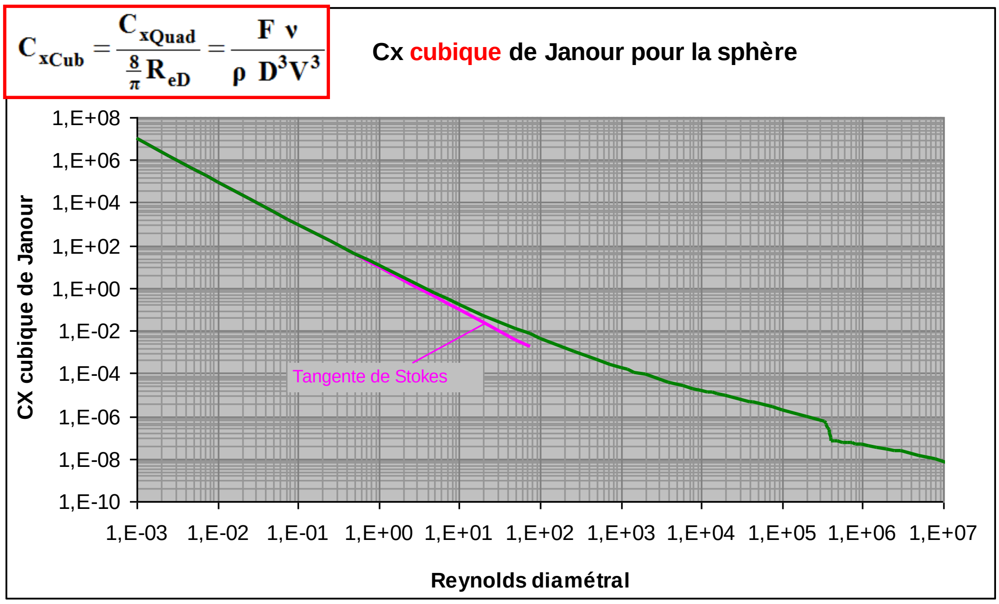
Après conversion, par exemple pour la sphère, ce C_x adimensionnel $\mathbf{k_3}$ n'est autre que le quotient du $\mathbf{C_x}$ quadratique par $\mathbf{(8/\pi)R_{eD}}$, soit :

$$C_{xCub} = \frac{F\ \nu}{\rho\ D^3 V^3} = \frac{C_{xQuad}}{\frac{8}{\pi} R_{eD}}$$

…équations où C_{xQuad} est le C_x quadratique de la sphère, R_{eD} son Reynolds diamétral, **F** sa Traînée, **ν** et **ρ** la viscosité cinématique et la masse volumique du fluide, **D** le diamètre de la sphère et **V** sa vitesse.

Le coefficient **8/π** figurant au dénominateur du second quotient est d'ailleurs sans importance ; il serait possible de s'en décharger par un choix judicieux de la définition du *volume* de référence $\mathbf{D^3}$ [339].

Pour la sphère toujours, ce C_x cubique de Janour dessine l'évolution suivante en fonction du Reynolds diamétral :



Comme on le voit, en régime de Stokes ce C_x cubique admet toujours une tangente rectiligne (en fuchsia ci-dessus) ; son équation est, bien-sûr, $\mathbf{3\pi / R_{eD}^2}$.

Ceci étant, le C_x cubique de Janour ne semble apporter de facilités particulières dans aucun régime…

Bernard de Go Mars !
le 11/12/2018

[339] Nous écrivons *volume* puisqu'il s'agit de prendre le cube d'une longueur comme référence.

BIBLIOGRAPHIE ET LIENS :

FLUID-DYNAMIC DRAG , S. F. HOERNER
HOERNER FLUID DYNAMICS , P.O. Box 21992 , Bakersfield, CA 93390
présenté souvent comme la bible [340] de l'aérodynamique est disponible ici :
hoernerfdy@sbcglobal.net
https://oscommerce.darcorp.com/
Une traduction française de cet ouvrage, "Résistance à l'avancement dans les fluides", a été réalisée :
S. F. Hoerner, Gauthier-Villars éditeurs Paris 1965

SPHERE DRAG AND HEAT TRANSFER, Zhipeng Duan, Boshu He & Yuanyuan Duan, 20 juillet 2015
http://www.nature.com/articles/srep12304.pdf

A CRITICAL REMARK ON USE OF DRAG COEFFICIENT AT LOW REYNOLDS NUMBERS, Momchilo M. Zdravkovich
http://elib.mi.sanu.ac.rs/files/journals/zr/11/n011p152.pdf

THE MOTION OF LONG SLENDER BODIES IN A VISCOUS FLUID
Part 1. General theory, by R. G. COX, J. FLUID MECH. (1970), vol. 44, part 4, p p . 791-810

THE DRAG OF CYLINDERS IN FLUIDS AT SLOW SPEED, C. M. WHITE, Royal Society,1945
http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/royprsa/186/1007/472.full.pdf

EXPERIMENTAL INVESTIGATION OF A CYLINDER IN AXIAL MOTION AT LOW REYNOLDS NUMBER, UI Tsukasa Jeff, 1984
http://digitalcommons.lsu.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=4971&context=gradschool_disstheses

BOUNDARY EFFECTS ON THE DRAG OF A CYLINDER IN AXIAL MOTION AT LOW REYNOLDS NUMBER, Elias George WEHBEH, 1987 :
http://digitalcommons.lsu.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=5429&context=gradschool_disstheses

La page de Wikipédia en anglais consacrée à la Théorie des Corps Élancés (Slender body) :
https://en.wikipedia.org/wiki/Slender-body_theory

COMPARISON OF THEORIES FOR THE TRANSLATIONAL AND ROTATIONAL DIﬀUSION COEﬃCIENTS OF ROD-LIKE MACROMOLECULES. APPLICATION TO SHORT DNA FRAGMENTS, TIRADO M. M., MARTINEZ C. L., de la TORRE J. G.,
J. Chem. Phys. 81 (4) (1984) 2047–2052. http://dx.doi.org/10.1063/1.447827

DRAG COEFFICIENTS AT LOW REYNOLDS NUMBERS FOR FLOW PAST IMMERSED BODIES,
A. M. JONES and J. G. KNUDSEN, Oregon State College, Corvallis, Oregon

[340] Cet ouvrage est évidemment beaucoup plus rigoureux que la bible.

http://documentin.com/article/drag-coefficients-at-low-reynolds-numbers-for-flow-past-immersed-bodies_592d1a8f1723dd3ba3c477b3.html

DRAG COEFFICIENTS FOR FLAT PLATES, SPHERES, AND CYLINDERS MOVING AT LOW REYNOLDS NUMBERS IN A VISCOUS FLUID, thesis by Alva Merle JONES, June 1958

ESTIMATION OF THE DRAG COEFFICIENT OF REGULARLY SHAPED PARTICLES IN SLOW FLOWS FROM MORPHOLOGICAL DESCRIPTORS, Gregory R. CARMICHAEL,
http://pubs.acs.org/doi/pdf/10.1021/i200018a009
Correctif du même Carmichael sur la caractéristique de Traînée de l'octaèdre et du tétraèdre :
https://pubs.acs.org/doi/pdf/10.1021/i200027a043

BEM MODELING OF DAMPING FORCES ON MEMS WITH THIN PLATES, Subrata Mukherjee, Srinivas Telukunta et Yu Xie Mukherjee
http://msvlab.hre.ntou.edu.tw/EABE-Mukherjee-2005.pdf

HYDROMECHANICS OF LOW-REYNOLDS-NUMBER FLOW. Part 2. SINGULARITY METHOD FOR STOKES FLOW, by A. T. Chwang and T. Y-T Wu, J. Fluid Mech., 1975, vol 67 PP. 787-815 :

HYDROMECHANICS OF LOW-REYNOLDS-NUMBER FLOW. PART 5. MOTION OF A SLENDER TORUS, Robert E. Johnson and Theodore Y. Wu,
Journal of Fluid Mechanics (1979), vol. 96, part 2, p. 263 – 277
http://authors.library.caltech.edu/340/1/JOHjfm79.pdf

DEVELOPMENTS IN SEDIMENTOLOGY, Sedimentary structures, their character ans physical basis, Vol 1, John R. L. Allen

DRAG ON NON-SPHERICAL PARTICLES IN NON-NEWTONIAN MEDIA
Thèse de G. Venu Madhav
https://archive.org/details/in.ernet.dli.2015.192444

ON THE EXACT SOLUTION OF THE STOKES EQUATIONS FOR A TORUS, Shoichi Wakiya
Journal of the Physical Society of Japan (Vol. 37, N°3, September 1974)
http://crossmark.crossref.org/dialog/?doi=10.1143%2FJPSJ.37.780&domain=pdf&date_stamp=2013-12-12

EXACT SOLUTION OF THE DISPLACEMENT BOUNDARY-VALUE, PROBLEM OF ELASTICITY FOR A TORUS, by P. Krokhmal, Department of Industrial and Systems Engineering, University of Florida, December 11, 2002

HILBERT FORMULAS FOR R-ANALYTIC FUNCTIONS AND THE STOKES FLOW ABOUT A BICONVEX LENS, Michael ZABARANKIN and Andrei F. ULITKO
http://www.ams.org/journals/qam/2006-64-04/S0033-569X-06-01011-7/S0033-569X-06-01011-7.pdf

ASYMMETRIC THREE-DIMENSIONAL STOKES FLOWS ABOUT TWO FUSED EQUAL SPHERES, Michael Zabarankin,
http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/royprsa/463/2085/2329.full.pdf

THE MOTION OF TWO SPHERES IN A VISCOUS FLUID,
by Margaret STIMSON and G. B. JEFFERY
http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/111/757/110.full.pdf

BOUNDARY REGULARIZED INTEGRAL EQUATION FORMULATION OF STOKES FLOW,
Q. Sun, E. Klaseboer, B. C. Khoo and D. Y. C. Chan
http://dx.doi.org/10.1063/1.4907279

SUSPENSIONS OF PROLATE SPHEROIDS IN STOKES FLOW. Part 1, Dynamics of a finite number of particles in an unbounded fluid, by IVAN L. CLAEYS AND JOHN F. BRADY
J. Fluid Mech. (1993), vol. 251, pp. 411-442

BRIEF COMMUNICATION : THE EFFECT OF SEPARATION ON DRAG AND TORQUE IN STOKES FLOW, K. B. Ranger and J. M. Dorrepaal, January 1980
http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0301932280900087

STOKES FLOW PAST A TWO-DIMENSIONAL LENS, J. M. Dorrepaal, Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP), Vol. 30, 1979

FLUID MECHANICS, Frank M. White, University of Rhode Island, McGrawHill

MÉCANIQUE DES FLUIDES, traduction de Fluid Mechanics, Fundamentals and Applications, 2° ed by Y. A. Çengel and J. M. Cimbala, 2010, The McGraw-Hill Companies (traduit en français par Chagnes, Griveau, Lair et Ringuedé)
https://books.google.fr/books?id=dig2DwAAQBAJ&printsec=frontcover&hl=fr#v=onepage&q&f=false

BUBBLES, DROPS, AND PARTICLES
R. Clift, J. R. Grace and M. E. Weber, ACADEMIC PRESS 1978
http://www.icheh.com/Files/Posts/Portal1/Clift%20R.,%20Grace%20J.R.,%20Weber%20M.E.%20Bubbles,%20Drops,%20and%20Particl.pdf
ou :
https://books.google.fr/books?id=0v7DAgAAQBAJ&pg=PA372&lpg=PA372&dq=%22spherically+isotropic%22+define&source=bl&ots=l9I5yQgcBq&sig=1CIesdRdJTtbRQU1qzyzpj5UC9c&hl=fr&sa=X&ved=0ahUKEwjq-oWwyMvQAhWFORoKHfaYDwMQ6AEIRzAG#v=onepage&q=%22spherically%20isotropic%22%20define&f=false

HYDRODYNAMIC FORCES, Drag Force and Drag Coefficient, by Goodarz Ahmadi
Department of Mechanical and Aeronautical Engineering, CLARKSON UNIVERSITY
http://web2.clarkson.edu/projects/fluidflow/courses/me537/1_2Drag.pdf

HYDRODYNAMIQUE PHYSIQUE de Guyon, Hulin et Petit
https://books.google.fr/books?id=xtyG7vWS2gcC&printsec=frontcover&hl=fr#v=onepage&q&f=false

HYDRODYNAMIQUE PHYSIQUE, Cours de Marc Fermigier à l'ESPCI - Laboratoire d'Hydrodynamique et Mécanique Physique :
https://www.researchgate.net/publication/37405796_Hydrodynamique_Physique

INTRODUCTION TO FLUID MECHANICS, par James A. Fay, MIT Press, 1994
https://books.google.fr/books?id=XGVpue4954wC&pg=PA476&lpg=PA476&dq=it+is+hardly+different+from+the+drag+on+a+circular+cylinder&source=bl&ots=FPLsNg6k35&sig=pLCIMcJ75U7qYSXXNwMCbayjo2w&hl=fr&sa=X&ved=0ahUKEwjN1Y6g26jQAhWGSxoKHSV4DsAQ6AEIIzAB#v=onepage&q=flat%20plate&f=false

STEADY OSEEN'S FLOW PAST A DEFORMED SPHERE: AN ANALYTICAL APPROACH, by Deepak Kumar Srivastava, Raja Ram Yadav, Supriya Yadav,
JOURNAL OF THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS,
51, 3, pp.661-673,Warsaw2013

LOW REYNOLDS NUMBER FLOW PROBLEMS WITH THEIR APPLICATIONS IN VARIOUS DISCIPLINES OF SCIENCE, Dr. DEEPAK KUMAR SRIVASTAVA,
http://www.bsnvpgcollege.in/pdf/project_ugc_3feb14.pdf

NACA REPORT No. 185, THE RESISTANCE OF SPHERES IN WIND TUNNELS AND IN AIR
By D. L. BACON and E. G. REID
https://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/19930091250.pdf

NACA TM 1316, RESISTANCE OF A PLATE IN PARALLEL FLOW AT LOW REYNOLDS NUMBERS, by Zbynek JANOUR
https://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/19930093914.pdf

STANDARDIZATION AND AERODYNAMICS, NACA Technical Note N° 134, by :
William Knight, Prof. L. Prandtl, Göttingen, Prof. von Karman, Aachen, Col. Ing, G. Costanzi, Rome, W. Margoulis, Paris, Lieut. Col. Ing. R. Verduzio, Rome, Dr. Ing. Richard Katzmayr, Vienna, E. B. Wolff, Amsterdam, Dr. A. F. Zahm.
http://authors.library.caltech.edu/47897/1/KNInacatn134.pdf

BUBBLES, DROPS, AND PARTICLES
R. Clift, J. R. Grace and M. E. Weber, ACADEMIC PRESS 1978
http://www.icheh.com/Files/Posts/Portal1/Clift%20R.,%20Grace%20J.R.,%20Weber%20M.E.%20Bubbles,%20Drops,%20and%20Particl.pdf

THE OTHER OPTIMAL STOKES DRAG PROFILE,
Thomas D. MONTENEGRO-JOHNSON and Eric LAUGA, 2014
https://arxiv.org/pdf/1411.4783.pdf

TOWARD THE CALCULATION AND MINIMIZATION OF STOKES DRAG ON BODIES OF ARBITRARY SHAPE, by E. O. Tuck, Third Australian Conference on hydraulics and Fluid Mechanics, Sidney, november, 1968 :
http://people.eng.unimelb.edu.au/imarusic/proceedings/3/Tuck.pdf

ON THE SLOW MOTION OF TWO SPHERES IN CONTACT ALONG THEIR LINE OF CENTRES THROUGH A VISCOUS FLUID, M. B. A. Cooley and M. E. O'Neill (1969) Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 66, pp 407-415 :
https://www.cambridge.org/core/journals/mathematical-proceedings-of-the-cambridge-philosophical-society/article/div-classtitleon-the-slow-motion-of-two-spheres-in-contact-along-their-line-of-centres-through-a-viscous-fluiddiv/EE4017C4BD7B3B406C50A124CB851F8B

NUMERICAL SIMULATION OF THREE-DIMENSIONAL UNSTEADY FLOW PAST ICE CRYSTALS, by Pao K.Wang and Wusheng Ji, 1997, Journal of the Atmospheric Sciences
http://windy.aos.wisc.edu/pao/wang-ji-1997.pdf

EXPERIMENTS ON CYLINDER DRAG, SPHERE DRAG, AND STABILITY IN RECTILINEAR COUETT.E LOW, David L. Kohlman, Mars 1963
http://www.dtic.mil/dtic/tr/fulltext/u2/400562.pdf

THE TWO-DIMENSIONAL SLOW MOTION OF VISCOUS FLUID, L. Bairstow, B. M. Cave and E. D. Lang, Royal Society, June 1921
http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/royprsa/100/705/394.full.pdf

THE RESISTANCE OF A CYLINDER MOVING IN A VISCOUS FLUID, L. Bairstow, B. M. Cave and E. D. Lang, Royal Society, February 1921
http://rsta.royalsocietypublishing.org/content/roypta/223/605-615/383.full.pdf

ON THE DRAG OF MODEL DENDRITE FRAGMENTS AT LOW REYNOLDS NUMBER, R. Zakhem, P. D. Weidman and H. C. de Groh III, 1993, NASA Technical Memorandum 105916
https://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/19930010785.pdf

SEDIMENTATION ANALYSIS OF SMALL ICE CRYSTALS BY LATTICE BOLTZMANN METHOD, Juan P. GIOVACCHINI,
https://docopdf.com/queue/sedimentation-analysis-of-small-ice-crystals-by-lattice-bolt.html
Voir aussi :
https://doi.org/10.1002/qj.3164
ou :
https://rmets.onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/qj.3164

OFF-AXIS DRAG OF DENDRITE FRAGMENTS AT LOW REYNOLDS NUMBER, P. D. Weidman, NASA Contract NCC3-272w, 1992
https://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/19980169280.pdf

KINEMATICS OF A SYMMETRICALLY CONFINED CYLINDRICAL PARTICLE IN A "STOKES-TYPE" REGIME, Stéphane CHAMPMARTIN and A. AMBARI, 2007

https://www.researchgate.net/profile/Stephane_Champmartin/publication/220038537_Kinematics_of_a_symmetrically_confined_cylindrical_particle_in_a_Stokes-type_regime/links/02faf4f4bcf71b9653000000/Kinematics-of-a-symmetrically-confined-cylindrical-particle-in-a-Stokes-type-regime.pdf?origin=publication_detail
ou :
https://www.researchgate.net/publication/220038537_Kinematics_of_a_symmetrically_confined_cylindrical_particle_in_a_Stokes-type_regime?enrichId=rgreq-969a4ed800408252ebfe1a88ddae1304-XXX&enrichSource=Y292ZXJQYWdlOzIyMDAzODUzNztBUzoxMjI0NjU0NzI3NDk1NzFAMTQwNjIwOTQ1MjkyMg%3D%3D&el=1_x_3&_esc=publicationCoverPdf

MATRICE DE RÉSISTANCE ET DESCRIPTION DU MOUVEMENT D’UNE PARTICULE EN INTERACTION HYDRODYNAMIQUE ET CONSÉQUENCES DU CONFINEMENT ASYMÉTRIQUE SUR LES PHÉNOMÈNES DE TRANSFERT, thèse de Stéphane CHAMPMARTIN, 2006
https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00102893v1/document

FALL VELOCITIES OF PLATE-LIKE AND COLUMNAR ICE CRYSTALS, JAYAWEERA, K. 0. L. F., and R. E. Cottis, , Quart. J. R. Met. Soc., 95, 703-709, 1969.
https://www.google.fr/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&cad=rja&uact=8&ved=0ahUKEwi696eejrLbAhVDbRQKHdrCC_QQFggoMAA&url=http%3A%2F%2Fonlinelibrary.wiley.com%2Fdoi%2F10.1002%2Fqj.49709540604%2Fpdf&usg=AOvVaw3T_FW8kLuhdzSHs1PFUIJE

SEA SALT AEROSOL PRODUCTION: MECHANISMS, METHODS, MEASUREMENTS, AND MODELS, d’Ernie R. LEWIS, R. LEWIS et Stephen E. SCHWARTZ
https://books.google.fr/books?id=AEIo8ebgw00C&pg=PA68&lpg=PA68&dq=This+quantity+has+been+termed+the+Davies+number+%5Bafter+Davies,+1945%5D+and+also+Best+number+%5Bafter+Best,+1950%5D+although+it+was+used+earlier+by+Castleman+%5B1926%5D&source=bl&ots=eOZvZh7Pk8&sig=XNSbDJgyqtgcdv-DlRJtnOjvhFw&hl=fr&sa=X&ved=0ahUKEwj9hdvCkZrbAhVJvhQKHcbyA0QQ6AEIKjAA#v=onepage&q&f=false

AN IMPROVED APPROACH TO CALCULATING TERMINAL VELOCIIES OF PLATE-LIKE CRYSTALS AND GRAUPEL, HEYMSFIELD Andrew J., KAJIKAWA Masahiro, 1986
http://journals.ametsoc.org/doi/pdf/10.1175/1520-0469%281987%29044%3C1088%3AAIATCT%3E2.0.CO%3B2

TERMINAL VELOCITY ADJUSTEMENTS FOR PLATE-LIKE CRYSTALS AND GRAUPEL, Kenneth V. BEARD and Andrex J. HEYMSFIELD, 1988
https://journals.ametsoc.org/doi/pdf/10.1175/1520-0469%281988%29045%3C3515%3ATVAFPL%3E2.0.CO%3B2

A MODEL EXPERIMENTAL STUDY ON THE FALLING VELOCITY OF ICE CRYSTALS
By Masahiro KAJIKAWA, September 1971

LA RÉSISTANCE DE L'AIR ET L'AVIATION. EXPÉRIENCES EFFECTUÉES AU LABORATOIRE DU CHAMP-DE-MARS, Gustave Eiffel, H. Dunod et E. Pinat éditeurs, 1910
http://cnum.cnam.fr/redir?4CA122.1

LA RÉSISTANCE DE L’AIR, examen des formules et des expériences,
par G. Eiffel, Dunod et Pinat, Paris 1910.
http://cnum.cnam.fr/DET/8CA400.html

RÉSUMÉ DES TRAVAUX EXÉCUTÉS PENDANT LA GUERRE AU LABORATOIRE AÉRODYNAMIQUE EIFFEL, 1919
(encore non disponible sur le Web)

LES TEXTES ESSENTIELS DE L'ASSOCIATION INTER ACTION :
http://inter.action.free.fr/ ,

et spécialement :

L'AÉRODYNAMIQUE & L'ORIGINE DES TRAÎNÉES PARASITES
http://inter.action.free.fr/publications/aero-trainees/aero-trainees.pdf

MÉCANIQUE EXPÉRIMENTALE DES FLUIDES, Comolet, Masson éd., 4ème édition

MÉCANIQUE DES FLUIDES 2ème année PC-PC*/PSI-PSI* : Cours avec exercices corrigés, par J.-M. Brébec, T. Desmarais, A. Favier, M. Ménétrier, B. Noël, C. Orsini, J-M Vanhaecke, R. Noël, HACHETTE SUPÉRIEUR éd.
https://books.google.fr/books?id=ZUbxy_1xWDEC&printsec=frontcover&hl=fr#v=onepage&q&f=false

DEVELOPMENTS IN SEDIMENTOLOGY, SEDIMENTARY STRUCTURES, THEIR CHARACTER AND PHYSICAL BASIS, Volume 1, John R. L. Allen :
https://books.google.fr/books?id=32G-x3wRWXwC&printsec=frontcover&hl=fr#v=onepage&q&f=false

FREE-FALL BEHAVIOR OF PLANAR SNOW CRYSTALS, CONICAL GRAUPEL AND SMALL HAIL, by Roland List and Robert S. Schemenauer, Journal of the atmospheric sciences, Janvier 1971
http://journals.ametsoc.org/doi/pdf/10.1175/1520-0469(1971)028%3C0110:FFBOPS%3E2.0.CO%3B2

Two Computational Models for Simulating the Tumbling Motion of Elongated Particles in Fluids, D. Bartuschat, E. Fischermeier, K. Gustavsson, U. Rüde, Elsevier, 2015,
https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2015.12.010
ou :
https://arxiv.org/pdf/1503.06869.pdf

FLUID DYNAMIC FORCE ACTING ON A RECTANGULAR SOLID IN A STOKES FLOW, Sunada, Ishida et Tokutake, AIAA Journal, Vol. 47, N°4, Avril 2009
https://arc.aiaa.org/doi/abs/10.2514/1.42386

FLUID DYNAMIC FORCES ACTING ON A RECTANGULAR PLATE WITH HOLE IN STOKES FLOW, Sunada, Tokutake et Okada, TRANS JAPAN SOC. AERI. SPACE SCI., Septembre 2009
https://www.jstage.jst.go.jp/article/tjsass/53/181/53_181_231/_article

AXISYMMETRIC STOKES DRAG ON HOLLOW CYLINDERS : COMPUTATION AND COMPARISON WITH EXPERIMENT, Roger and Weidman, European Journal of Mechanics, B/Fluids, vol 17, N°2, 1998

AXISYMMETRIC STOKES FLOW PAST A SPHERICAL HOLLOW BOUNDARY AND CONCENTRIC SPHERE, by A. M. J. DAVIS, Mars 1984, (Q. J Appl. Math. Vol. 38, Pt. 4)
http://archive.neicon.ru/xmlui/bitstream/handle/123456789/3899243/QuarterlyJournalofMechanicsandAppliedMathematicsqjmamj_38_4_38-4-537.pdf?sequence=1

CYLINDER DRAG AT LOW REYNOLDS NUMBER, Burke HUNER
1977,Louisiana State University and Agricultural & Mechanical College
https://digitalcommons.lsu.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=4114&context=gradschool_disstheses

NON-NEWTONIAN SHEAR-THINNING FLOWS PAST A FLAT PLATE,
J. Wu and M. C. Thompson, J. Non-Newtonian Fluid Mech., 66 (1996) 127-144
http://mec-mail.eng.monash.edu.au/~mct/pubs/pdfs/WuTh96_nnfm.pdf

A NEW METHOD OF SOLVING OSEEN'S EQUATIONS AND ITS APPLICATION TO THE FLOW PAST AN INCLINED ELLIPTIC CYLINDER, by Isao Imai, University of Tokyo
http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/royprsa/224/1157/141.full.pdf

MODELLING TWO-DIMENSIONAL FLOW PAST ARBITRARY CYLINDRICAL BODIES USING BOUNDARY ELEMENT FORMULATIONS, M. B. Bush, University of Sydney, 1983
https://ac.els-cdn.com/0307904X83901427/1-s2.0-0307904X83901427-main.pdf?_tid=e94eee5c-cd34-11e7-9a53-00000aacb360&acdnat=1511101459_dd50721c0900a6ae235699c9e60609c4

SYMMETRIC FLOW PAS ORTHOTROPIC BODIES, SINGLE AND CLUSTERS,
Jacob Heskel MASLIYAH, Universtiy of British Columbia, 1970
Symmetric flow past orthotropic bodies : single and clusters - UBC Library Open Collections

ALGORITHMS AND APPLICATIONS, Wenxiao PAN, 2007,
https://pdfs.semanticscholar.org/17a5/2f7bdb70203ac5d35faab7327c58e311c329.pdf

DYNAMIC SIMULATION OF HYDRODYNAMICALLY INTERACTING PARTICLES,
DURLOFSKY, BRADY, BOSSIS, J. Fluid Mech., 1986
https://pdfs.semanticscholar.org/e7be/a7f423fb8881cf61f8c7025f927d51fef42e.pdf

FROM BEAD TO ROD: COMPARISON OF THEORIES BY MEASURING TRANSLATIONAL DRAG COEFFICIENTS OF MICRON-SIZED MAGNETIC BEAD-CHAINS IN STOKES FLOW,
Kaiyuan YANG, Chen LU, Xiaodan ZHAO, Ryo KAWAMURA,
http://journals.plos.org/plosone/article/file?id=10.1371/journal.pone.0188015&type=printable

EQUILIBRIA FOR THE RELATIVE MOTION OF THREE HEAVY SPHERES IN STOKES FLUID FLOW, Maria L. EKIEL-JEZEWSKA et Eligiusz WAJNRYB, Mai 2006
https://www.researchgate.net/publication/7069675_Equilibria_for_the_relative_motion_of_three_heavy_spheres_in_Stokes_fluid_flow

STOKES DRAG ON CONGLOMERATES OF SPHERES,

Bogdan CICHOCKI and Konrad HINSEN, Physics of Fluids, February 1995
https://www.researchgate.net/publication/216133025_Stokes_drag_on_conglomerates_of_spheres

VISCOUS SETTLING OF MODIFIED RECTANGULAR PRISMA (Under the direction of Dr. David LEITH), by Alan Wayne SHEAFFER.
https://cdr.lib.unc.edu/indexablecontent/uuid:5e7ca66e-b9a6-487c-b671-65c99f901fbc?dl=true

DRAG ON NONSPHERICAL OBJECTS, David LEITH,
http://www.tandfonline.com/doi/pdf/10.1080/02786828708959128

ESTIMATION OF THE DRAG COEFFICIENT OF REGULARLY SHAPED PARTICLES IN SLOW FLOWS FROM MORPHOLOGICAL DESCRIPTORS, Gregory R. CARMICHAEL, University of Iowa,

Correctif de G. R. CARMICHAEL sur les caractéristiques de Traînée de l'octaèdre et du tétraèdre:
https://pubs.acs.org/doi/pdf/10.1021/i200027a043

A MODEL EXPERIMENTAL STUDY ON THE FALLING VELOCITY OF ICE CRYSTALS, by Masahiro KAJIKAWA, 1971 :
https://www.jstage.jst.go.jp/article/jmsj1965/49/5/49_5_367/_pdf

AN EQUIVALENT DISK FOR CALCULATING THE TERMINAL VELOCITIES OF PLATE-LIKE ICE CRYSTALS, JAYAWEERA K. O. L. F.:
https://journals.ametsoc.org/doi/pdf/10.1175/1520-0469%281974%29031%3C0280%3APOCICP%3E2.0.CO%3B2

FALL VELOCITIES OF PLATE-LIKE AND COLUMNAR ICE CRYSTALS, JAYAWEERA, K. 0. L. F., and R. E. Cottis, , Quart. J. R. Met. Soc., 95, 703-709, 1969:
https://www.google.fr/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&cad=rja&uact=8&ved=0ahUKEwi696eejrLbAhVDbRQKHdrCC_QQFggoMAA&url=http%3A%2F%2Fonlinelibrary.wiley.com%2Fdoi%2F10.1002%2Fqj.49709540604%2Fpdf&usg=AOvVaw3T_FW8kLuhdzSHs1PFUIJE

GENERAL EQUATIONS FOR THE MOTIONS OF ICE CRYSTALS AND WATER DROPS IN GRAVITATIONAL AND ELECTRIC FIELDS, by John S. NISBET:
https://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/19880020686.pdf

THE FALL SPEEDS OF SUB-100 µM ICE CRYSTALS, by C. D. WESTBROOK,
https://rmets.onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/qj.290

LES TEXTES DE NOTRE PAGE « PHYSIQUE DE LA FUSÉE ET AÉRODYNAMIQUE GÉNÉRALE » :

http://perso.numericable.fr/fbouquetbe63/gomars/physique.htm

et en particulier :

LE **C_X** DE LA SPHÈRE

http://perso.numericable.fr/gomars2/aero/cx_sphere.doc

LE REYNOLDS DES CORPS VOLANTS (NATURELS OU FAITS DE MAIN D'HOMME)
http://perso.numericable.fr/gomars/reynolds_corps_volants.doc

et :

AÉRODYNAMIQUE DES CORPS D'EIFFEL
http://perso.numericable.fr/gomars2/aero/aero_corps_d_eiffel.doc

ainsi que :

LA COUCHE LIMITE ET SON ÉQUATION INTÉGRALE DE VON KÁRMÁN
http://perso.numericable.fr/gomars/equat_integ_karman.doc

ou encore :

LES MESURES DU CX DE LA SPHÈRE PAR ISAAC NEWTON
http://perso.numericable.fr/gomars2/aero/mesure_globe_newton.doc

INFLUENCE CONJUGUÉE DE LA TURBULENCE DE L'ÉCOULEMENT ET DE LA RUGOSITÉ DE LA SPHÈRE SUR SON REYNOLDS CRITIQUE
http://perso.numericable.fr/gomars2/aero/influence_turb_et_rug_sur_re_cr_sphere.doc

NOTE SUR LE COEFFICIENT DE PRESSION AU CULOT DE LA SPHÈRE,
http://perso.numericable.fr/gomars2/aero/cp_culot_sphere.doc

PARHÉLIE ou FAUX SOLEILS :
http://perso.numericable.fr/gomarsimage/parhelies.doc

LES REPÈRES EN AÉRODYNAMIQUE
http://perso.numericable.fr/gomars/rep_aero.doc

DE L'EXISTENCE D'UNE LONGUEUR DE RÉFÉRENCE VIRTUELLE NOMMÉE *HYPERCAPACITANCE* COMME BASE DU REYNOLDS EN RÉGIME DE STOKES,
http://perso.numericable.fr/gomars2/aero/hypercapacitance.doc

NOS PUBLICATIONS SUR WIKIPÉDIA :

Notre tableau des $\mathbf{C_x}$ linéaires des particules, réalisé d'après la collecte du présent texte :
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Tableau_des_cx_linéaires_de_quelques_particules_en_Régime_de_Stokes.png

Nos deuxième, troisième, quatrième et cinquième tableaux de $\mathbf{C_x}$ linéaires de particules, réalisés d'après la collecte du présent texte :

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Tableau_cx_lineaires_deuxieme.png

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Tableau_des_cx_lin%C3%A9aires_de_quelques_particules_en_R%C3%A9gime_de_Stokes,_troisi%C3%A8me.png

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Tableau_des_cx_lin%C3%A9aires_de_quelques_particules_en_R%C3%A9gime_de_Stokes_quatri%C3%A8me.png https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Tableau_des_cx_lin%C3%A9aires_de_quelques_particules_en_R%C3%A9gime_de_Stokes_cinqui%C3%A8me.png

Le **C_X** de la sphère lisse ou rugueuse ainsi que des balles de sports et des gouttes d'eau :
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:CX_SPHERE.png

Le **C_x** de la sphère, d'après les équations de Clift, Grace & Weber
http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Cx_de_la_sphère_selon_le_Reynolds.png

Trois régimes de la sphère :
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Régimes_de_la_sphère.png

Décollement de la Couche Limite sur un corps :
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:D%C3%A9collement_de_la_couche_limite_pour_Wikip%C3%A9dia.png?uselang=fr