

LE C_x DE LA SPHÈRE

en subsonique,

selon son Reynolds et sa rugosité

Ce texte comporte des facilités de navigation interne.
Pour cette raison, et si vous ne lisez pas en pdf, il gagnera à être ouvert dans Word.

Pour naviguer agréablement dans ce fichier Word, vérifiez que les deux flèches orientées vers la gauche et la droite ("Précédent" et "Suivant") figurent bien dans votre barre d'outil. Si ce n'est le cas, installez ces flèches par : Affichage, Barres d'outils, Personnaliser, Catégorie : Web. Sinon, les raccourcis clavier Alt+flèche gauche ou Alt+flèche droite produisent les mêmes résultats (retour à l'emplacement précédent ou suivant), ceci dans Word, et, nous semble-t-il, dans beaucoup de visionneuses de pdf.

Version de travail du 15/10/14

L'adresse où ce texte est téléchargeable dans sa dernière version Word est :
http://perso.numericable.fr/gomars/cx_sphere.doc

Résumé :

Après une brève évocation de l'existence des sphères parmi les objets naturels et parmi nos objets manufacturés, nous proposerons un bref historique de la mesure du coefficient de Traînée des sphères (le fameux C_x), mesure qui donna lieu à une découverte de la plus haute importance : celle de l'influence primordiale du Nombre de Reynolds sur les écoulements. Nous définirons au passage ce fameux nombre adimensionnel et nous verrons qu'aux Nombres de Reynolds fréquemment rencontrés en aéronautique, on peut ainsi considérer que la sphère lisse possède deux C_x tout à fait différents.

Après avoir présenté deux libellés analytiques dépeignant de façon satisfaisante l'ensemble des mesures du C_x de la sphère lisse (sur toute la plage des Reynolds possibles), nous reviendrons sur les raisons du comportement très particulier de ce corps, comportement qui est lié à l'évolution de la Couche Limite qui l'enveloppe.

Nous mentionnerons l'influence très forte de la rugosité (ou des dispositifs turbulateurs) sur le C_x de la sphère et parlerons des ballons et balles de sport (non animés de rotation).

Nous ferons état des principales difficultés que rencontrent les chercheurs dans les mesures de Traînée de la sphère et terminerons en indiquant que le comportement de la sphère est l'archétype du comportement de tous les corps 2D ou 3D profilés.

Ce texte se limite aux écoulements subsoniques de sphères non animées de rotation, mais nous évoquerons à la fin l'influence du nombre de Mach sur le C_x de la sphère.

La Traînée aérodynamique des corps sphériques est sans doute moins d'actualité qu'aux temps où les canons tiraient des boulets sphériques. Néanmoins la sphère reste une forme très utilisée par l'industrie.

L'une des sphères qui a le plus compté dans l'histoire est sans doute le vaisseau Vostok de Yuri Gagarine, premier homme à être allé dans l'espace et en être revenu vivant. Voici cette sphère calcinée par sa rentrée dans l'atmosphère :



D'après Wikipédia

Le choix d'une telle forme pour ce vaisseau spatial avait été dicté par la bonne connaissance que les ingénieurs russes avaient de l'aérodynamique de la sphère (depuis le haut hypersonique jusqu'au bas subsonique).

Quant à nous, dans le présent texte, nous nous en tiendrons au comportement de la sphère en bas subsonique (jusqu'à, disons, **300** ou **400 Km/h**).

D'autres corps sphériques connaissent de fréquentes heures de gloire : ce sont les ballons et balles de sports (football, volley, handball, tennis, golf, ping-pong, etc.)

Les footballeurs, par exemple, dont les qualités ne sont pas uniquement physiques, ont appris à utiliser l'aérodynamique très particulière de leur ballon : cette aérodynamique, à quelques détails près est celle de la sphère et nous l'étudierons ensemble (au moins pour les ballons non dotés de rotation).

La plupart des acteurs de jeux de balles utilisent de même les propriétés aérodynamiques singulières de la sphère, mais les golfeurs ont, de plus, influé sur la fabrication de leur balles (sur leur état de surface) afin que leur traînée soit moins importante.

Une infinité d'autres sphères, cependant, ne sont pas fabriquées de mains d'homme : tension de surface aidant, les gouttes de brouillard, de bruine ou de pluie, par exemple, présentent des formes parfaitement sphériques (lorsque leur diamètre est inférieur à **2 mm**).

Nos lecteurs savent sûrement que les gouttes de pluie tombent des nuages, mais certains seront sans doute étonnés d'apprendre que les gouttes d'eau minuscules qui forment un brouillard tombent également, en une chute libre extrêmement lente (nous préférons d'ailleurs l'expression *chute aérienne* à celle de *chute libre*).

Le régime aérodynamique de l'écoulement de l'air autour de ces gouttes de brouillard se nomme *régime de Stokes* (du nom de son inventeur). Ce régime est celui

de la plupart des phénomènes de décantation de particules dans des fluides : on peut donc dire que les gouttes de brouillard décantent lentement dans l'air...

Dans ce *régime de Stokes*, la Traînée aérodynamique est proportionnelle à la vitesse du corps, et non au carré de cette vitesse (nous aurons l'occasion d'y revenir).

Quoiqu'il en soit de la singularité de l'aérodynamique des sphères, leur comportement reste soumis au principe de causalité, c'est-à-dire que les mêmes causes produisent les mêmes effets ¹. Il n'en faut pas plus pour composer, par exemple, un anémomètre comme l'anémomètre à boule Daloz :



D'après Wikipédia

Lorsque le vent souffle (de droite, sur la photo), cet anémomètre Daloz s'oriente face à lui, grâce au secteur gradué qui fait office de pale de girouette (on note le contrepois, à droite de l'engin).

Ceci dit, la fonction principale de ce secteur gradué est évidemment de mesurer l'angle dont recule la boule sous l'effet de sa Trainée aérodynamique.

Il est assez facile de prouver que la vitesse du vent \mathbf{V} à mesurer est liée à la Vitesse Limite de Chute \mathbf{V}_{Lim} de la boule (vitesse qu'elle attendrait si elle était abandonnée à la pesanteur) par la relation $\mathbf{V}^2 = \mathbf{V}_{\text{Lim}}^2 \tan(\alpha)$ (si \mathbf{V} est la vitesse du vent à mesurer et α l'angle de recul de la boule).

Cette relation reste cependant approximative car elle est fondée sur l'hypothèse implicite que le C_x frontal de la boule est constant quel que soit la vitesse du vent, ledit C_x étant défini comme honorant la loi bien connue :

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2} \rho \mathbf{S} C_x \mathbf{V}^2$$

...avec \mathbf{T} la Traînée aérodynamique, ρ la Masse volumique de l'air, \mathbf{S} la section frontale de la boule, \mathbf{V} la vitesse de l'écoulement autour de la sphère et C_x le coefficient de Trainée de la boule établi en référence à sa section frontale.

La définition, universellement adoptée (de nos jours), du C_x frontal de la sphère peut évidemment être tirée de cette relation. C'est :

¹ L'ordre dans lequel arrivent les causes constituant lui-même une cause...

$$C_x = \frac{T}{\frac{1}{2} \rho V^2 S}$$

...avec T la Traînée aérodynamique, ρ la Masse volumique de l'air déplacé par le vent, S la section frontale de la boule ($\pi D^2/4$, si D est son diamètre), V la vitesse de l'écoulement (c'est-à-dire du vent), l'ensemble étant écrit en unités cohérentes (par exemple N, Kg, m et s).

Notons au passage que le choix de la surface de référence S ne pose guère de questions dans le cas de la sphère, c'est pourquoi on ne précise presque jamais que son C_x est référencé à sa section frontale $\pi D^2/4$ ². Nous reviendrons [plus bas](#) sur ce point.

Il ne faudrait pas cependant déduire de cette définition encadrée du C_x que celui-ci est constant, c'est-à-dire qu'une multiplication par n de la vitesse de l'air entraînerait une multiplication par n^2 de la Traînée (à ρ et S constants). Nous verrons même que ce C_x est éminemment variable.

Il résulte de cette variabilité du C_x que la relation $V^2 = V_{Lim}^2 \tan(\alpha)$ qui est censée présider à l'échelonnement des graduations de l'anémomètre Daloz n'est vraiment valide qu'aux alentours de $\alpha = 45^\circ$ (où $V = V_{Lim}$).³

Autrement dit : la gravure des graduations du secteur gradué ne doit pas être faite par utilisation de la relation $V^2 = V_{Lim}^2 \tan(\alpha)$ mais bien par un étalonnage pratique dans toutes la gamme de vitesses de vent nécessaire (et d'après des mesures de la vitesse du vent réalisées à l'aide d'autres procédés).

Gageons donc que si cet anémomètre Daloz a eu la réputation d'être précis, c'est parce que l'étalonnage de son prototype à été réalisé avec soin.

Nous venons de dire que le C_x de la sphère est éminemment variable.

En fonction de quel paramètre varie-t-il ? : La couleur de la sphère, la matière dont elle est constituée, l'origine de l'opérateur ?

Non : Le C_x de la sphère est principalement dépendant du Nombre de Reynolds de l'écoulement dans lequel cette sphère est immergée.⁴

On sait que le Nombre de Reynolds préside à toute analyse de l'écoulement d'un fluide autour d'un corps. C'est ce qui explique que, dans les textes d'aérodynamique, on ne donne que pour mémoire la vitesse d'écoulement et la dimension des corps testés : ce qui est par contre toujours donné, c'est le Nombre de Reynolds de l'écoulement.

² Mais nous avons trouvé dans le rapport [NACA N° 185](#), datant de 1924, un C_x de la sphère défini comme le quotient de la Traînée par qD^2 (q étant la Pression Dynamique et D le diamètre). Nous publions une image de ce rapport [ici](#)...

³ Et encore passons-nous sous silence que la présence du croissant gradué derrière la sphère doit influencer beaucoup sur son C_x , car il constitue ce que nous appelons une plaque *schismatique* séparant en deux les tourbillons de culot. Et ne parlons pas non plus de la tige du pendule ni du plan de joint à l'équateur de la boule.

⁴ ...ainsi, à moindre titre que la turbulence de l'écoulement et de la rugosité de sa surface, nous y reviendrons.

Nous donnerons à l'instant la définition du Nombre de Reynolds, mais disons que pour un même fluide il est proportionnel au produit de la vitesse de l'écoulement par la longueur de cet écoulement.

Autrement dit, le Nombre de Reynolds d'un écoulement croît avec la vitesse et la longueur de cet écoulement.

Pour raconter l'avènement du Nombre de Reynolds dans l'aérodynamique des corps, nous ne pourrions faire mieux que de reprendre une partie des termes de notre texte [LE REYNOLDS DES CORPS VOLANTS \(NATURELS OU FAITS DE MAIN D'HOMME\)](#) :

Autour de certains corps particuliers comme le disque ou la plaque plane présentés face au vent, l'écoulement reste identique à tous les Nombres de Reynolds, du moins dans la plage courante de Reynolds que nous appellerons *la plage aéronautique*.

Ainsi la captation suivante des lignes de courant autour d'une plaque carrée ⁵ :

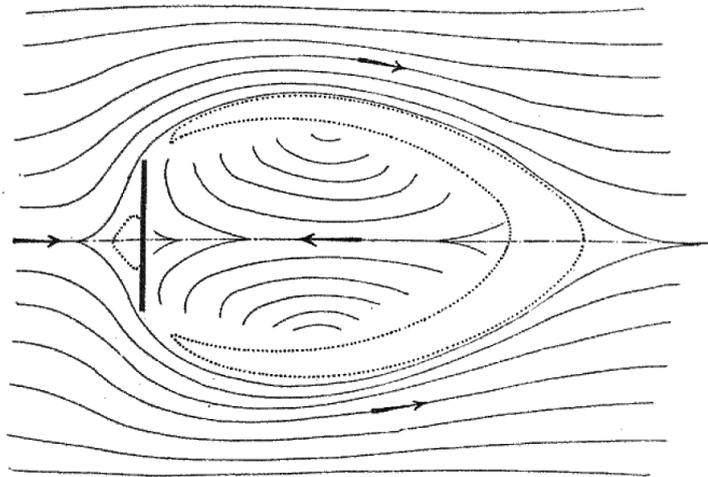


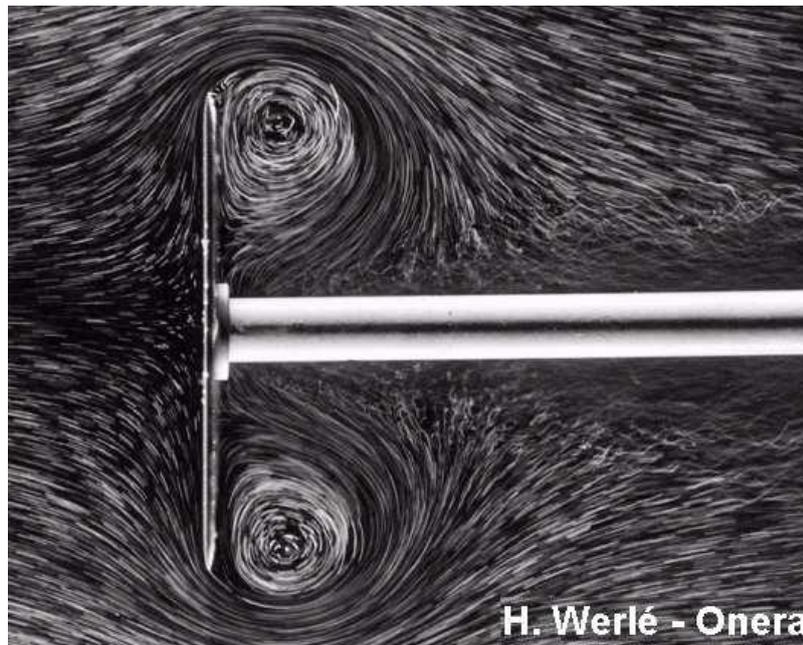
FIG. 1. — Mouvements de l'air autour d'une plaque, d'après les expériences faites par M. G. Eiffel.

LA RÉSISTANCE DE L'AIR, examen des formules et des expériences, par G. Eiffel, Dunod et Pinat, Paris 1910.
<http://cnum.cnam.fr/DET/8CA400.html>

...ne sera-t-elle pas modifiée ni par un changement de dimension de la plaque ni par une modification de la vitesse de l'écoulement, par exemple.

Il en va de même pour l'écoulement autour du disque, capté ici par un des illustres descendants d'Eiffel, Henri Werlé qui officiait à l'ONERA :

⁵ Cette captation a été réalisée à l'aide "de filaments de soie fixés à l'extrémité d'une tige mince ; la direction que prend le filament indique nettement la direction des filets gazeux ainsi que la position des remous."



Au contraire de ces corps simples, pour des corps mieux profilés comme la sphère ou le cylindre (et bien sûr les corps profilés comme les ailes ou les corps fuselés 3D) l'écoulement peut beaucoup varier entre deux nombres de Reynolds assez voisins.

Cette sensibilité de certains écoulements au Nombre de Reynolds explique qu'autour de 1912, des mesures indépendantes du C_x de la sphère à la fois dans la soufflerie d'Eiffel, à Auteuil, et dans la soufflerie du laboratoire de Prandtl, à Göttingen, avaient donné lieu à deux valeurs allant du simple au double.

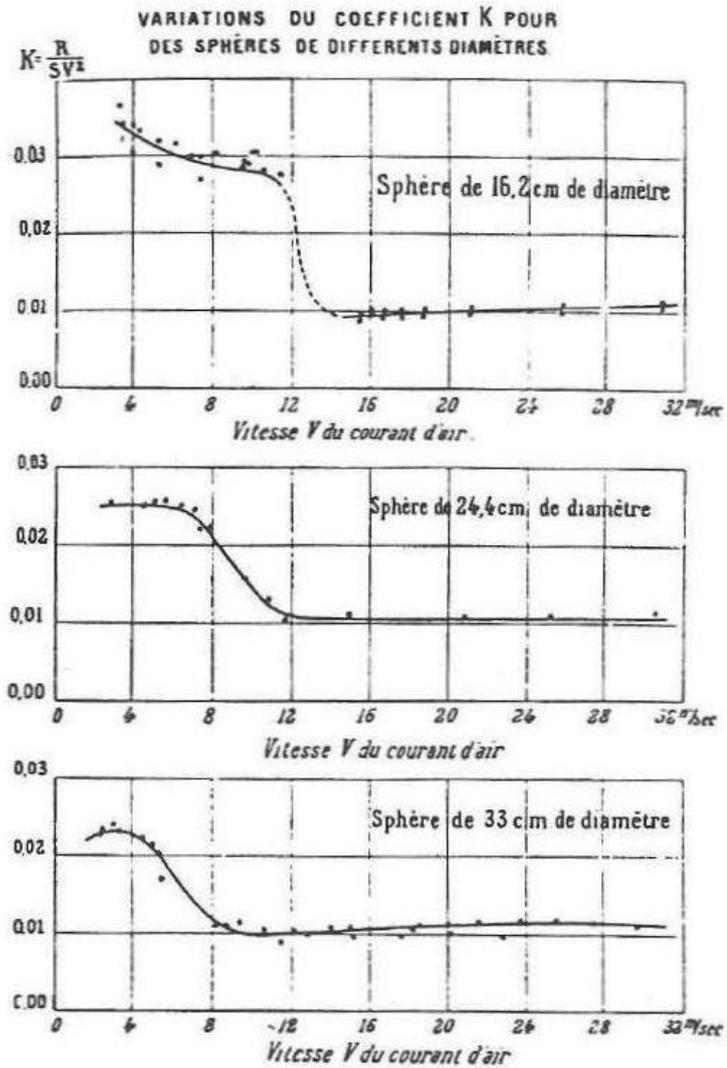
Le collaborateur de Prandtl, Otto Föppl, alla jusqu'à émettre l'hypothèse qu'Eiffel s'était trompé d'un facteur 2 dans son calcul.

Piqué au vif, Eiffel reprit ses mesures dans sa nouvelle soufflerie d'Auteuil sur des sphères de diamètres différents et à différente vitesses.

Il démontra alors que les disparités dans les mesures du C_x de la sphère n'étaient pas dues à des erreurs opératoires mais qu'elles étaient dues à un nouveau phénomène qui ne pouvait être observé qu'à des vitesses que n'atteignait pas la soufflerie de Göttingen.

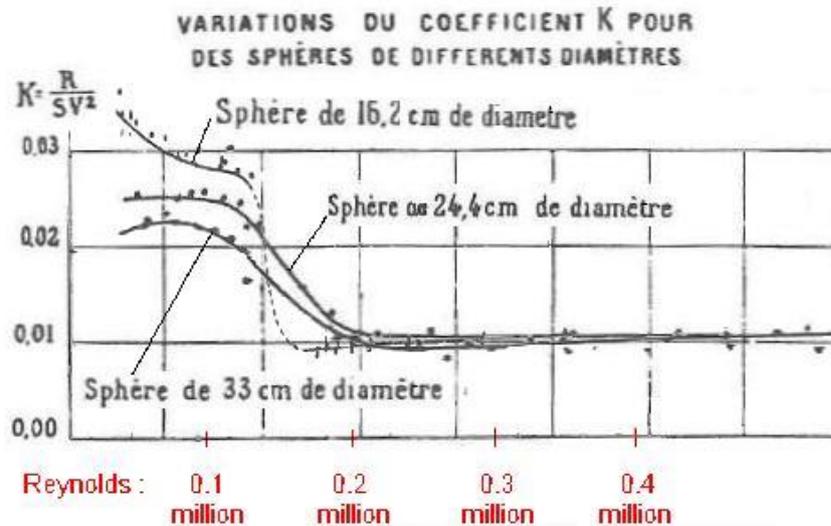
Nous venons de citer cette anecdote telle qu'elle est racontée dans [PRANDTL AND THE GÖTTINGEN SCHOOL](#), de Bodenschatz et Eckert, mais il est évident que ce n'est pas le mot *vitesses* qui devrait être utilisé dans la phrase précédente mais l'expression *Nombre de Reynolds*.

Cependant, Eiffel, à cette époque, n'a pas effectué ce pas de géant d'évoquer le Nombre de Reynolds : il avait simplement constaté que selon la vitesse de l'écoulement, trois sphères de diamètres différents connaissaient la même crise de leur coefficient de traînée K (nous reviendrons à l'instant sur la signification de ce coefficient de traînée) :



Graphes d'Eiffel, 1914, cités par John D. Anderson Jr, dans A History of aerodynamics

Ces trois courbes, lorsque leurs abscisses sont ramenées (par nos soins) au Nombre de Reynolds de l'écoulement, se trouvent vraiment très proches les unes des autres :



Regroupement des graphes d'Eiffel, 1914, cités par John D. Anderson Jr, dans A History of aerodynamics

Elles ne sont pas encore confondues comme le sont celles issues des mesures modernes (on pourra en juger plus loin), mais cet étalement en ordonnées des anciennes mesures est évidemment imputable aux défauts des dispositifs expérimentaux de l'époque.

Le pas de géant qui consistera à attribuer cette crise de la traînée de la sphère aux variations du Nombre de Reynolds de l'écoulement sera franchi par Prandtl⁶ : Ce trait de génie ouvrait l'espace tout entier (l'atmosphère, les océans, etc.) au nombre adimensionnel découvert quelques décennies auparavant par Osborne Reynolds dans les écoulements confinés à l'intérieur des tuyaux !

Grâce à ce même trait de génie, on ne parlerait plus jamais, en mécanique des Fluides, de la vitesse d'un écoulement sur un corps mais du Nombre de Reynolds de l'écoulement sur ce corps !

Rappelons la définition du nombre inventé par Osborne Reynolds : C'est le nombre sans dimension qui caractérise le rapport entre les forces d'inertie et les forces de viscosité existant dans l'écoulement d'un fluide autour d'un corps.

Sa définition est :

$$\mathbf{R}_e = \frac{\mathbf{VD}}{\mathbf{v}}$$

...où :

\mathbf{V} est la vitesse de l'écoulement loin du corps (en $\mathbf{m/s}$)

\mathbf{L} est la dimension caractéristique du corps (en \mathbf{m})

\mathbf{v}^7 est la *viscosité cinématique* du fluide (en $\mathbf{m^2/s}$).

Ladite *viscosité cinématique* est le quotient de la viscosité dynamique (exprimée en $\mathbf{Pa*s}$) par la Masse Volumique du fluide en écoulement (en $\mathbf{Kg/m^3}$). C'est-à-dire qu'on a :

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\mu} / \boldsymbol{\rho}$$

Remarquons au passage qu'il est logique que ce soit la viscosité cinématique $\mathbf{v} = \boldsymbol{\mu} / \boldsymbol{\rho}$ qui soit intégrée dans le nombre de Reynolds puisque ce nombre (qui caractérise le rapport entre les forces d'inertie et les forces de viscosité) se doit de prendre en compte la Masse Volumique du fluide considéré, cette Masse Volumique étant représentative de son inertie dans un écoulement.

Remarquons également que c'est bien cette viscosité cinématique qui est la plus proche de la conception triviale que l'homme de la rue se fait de la viscosité : cette viscosité cinématique est en effet liée au temps que met sur notre planète un fluide (l'eau ou le miel, par exemple) à s'écouler d'un récipient percé ou d'un entonnoir.

La fameuse expérience de la Goutte de poix fait mieux ressentir ce type de mesure :

⁶ Nous citons toujours l'ouvrage de [Bodenschatz et Eckert](#).

⁷ \mathbf{v} se prononce **nu** .



D'après Wikipédia



Cette expérience démontre que la poix (coulée ici à chaud dans l'entonnoir avant l'expérience) bien que tout à fait solide en apparence à température ambiante (photo de droite après un coup de marteau) est en réalité un fluide doté d'une très forte viscosité : la poix s'écoule en effet de l'entonnoir à raison d'une goutte toutes les .. huit années...

Terminons cette digression en précisant que si, pour définir la notion de viscosité nous n'avons évoqué que des liquides ou des solides, il est assez facile à admettre que les gaz manifestent également une certaine viscosité.

Pour déterminer le Nombre de Reynolds des écoulements rencontrés dans nos réflexions courantes, nous utilisons un raccourci que nous devons à nos camarades d'[Inter Action](#) : Ce raccourci donne le Reynolds d'un écoulement d'air en atmosphère standard comme valant :

$$Re_{\text{air}} \approx 70\,000 \, V \, L, \quad V \text{ étant exprimé en m/s et } L \text{ en m}^8.$$

Un raccourci homologue donne le Reynolds d'un écoulement dans de l'eau à 20° comme très proche de :

$$Re_{\text{eau}} \approx 1 \text{ million } V \, L \quad (V \text{ étant exprimé en m/s et } L \text{ en mètres)}$$

...soit **14,3 fois** plus à vitesse et longueur équivalente que dans l'air.

Nous avons laissé entendre plus haut que le Nombre de Reynolds préside à l'analyse de tout écoulement ; nous pourrions mieux dire : À Nombre de Reynolds égaux, deux écoulements seront identiques !

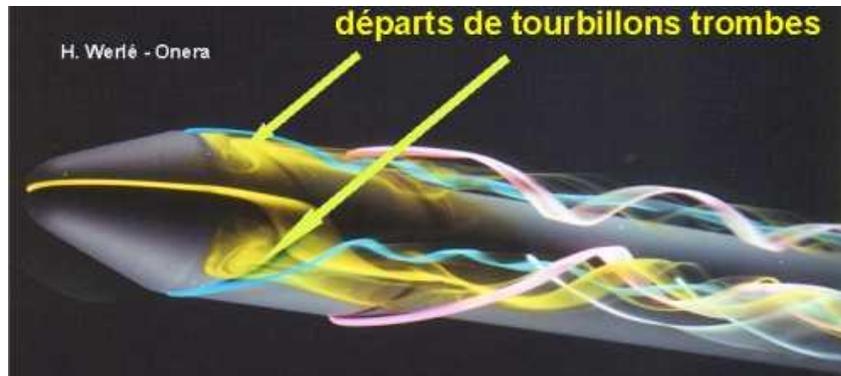
Et ceci quel que soit le fluide en mouvement !

Ce principe possède un corolaire : Il est possible de tester des corps dans un fluide différent de celui pour lequel il est conçu, pourvu que ce soit à même Nombre de Reynolds !

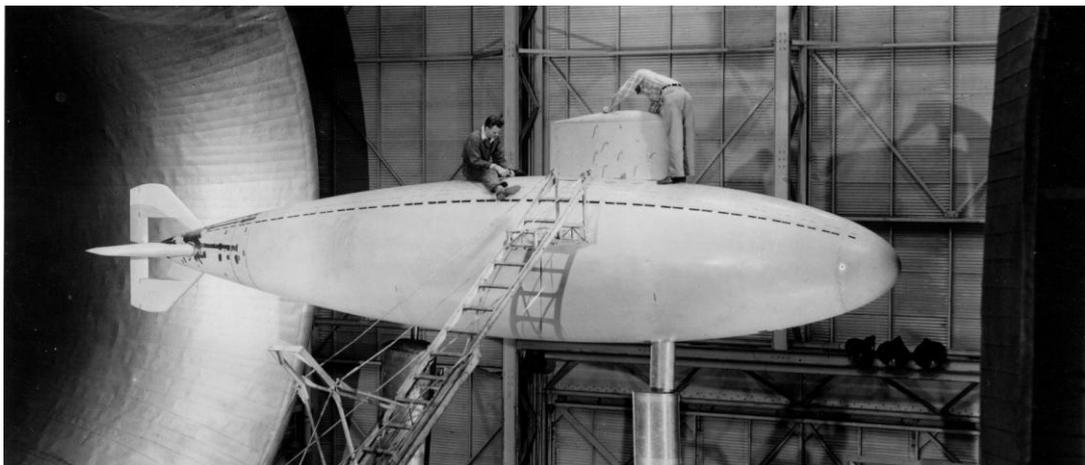
Ainsi l'image de l'écoulement sur le disque [déjà montrée](#) a été captée dans l'eau et est parfaitement représentative de ce qui se passe dans l'air.

⁸ Ce qui laisse entendre que la dimension du chiffre **70 000** est en **s/m²**.

Ceci dit, comme nous avons dit que l'écoulement sur le disque était indépendant du Reynolds, l'appel à l'écoulement sur ce corps n'est pas très probant de cette interchangeabilité des fluides. Il est plus parlant de montrer cette image d'écoulement sur le haut d'une fusée, image capturée dans un tunnel hydraulique par le même Henri Werlé :



De même l'image ci-dessous est éloquent où l'on teste un sous-marin non pas dans l'eau mais dans l'air :



Source NASA

Cette photographie, prise dans la soufflerie **30 x 60 pieds** de Langley, montre le modèle au **1/5^{ème}** du sous-marin états-unien Albacore.

Si l'on s'intéresse au Reynolds de l'écoulement sur ce modèle au **1/5^{ème}** de l'Albacore, on peut facilement trouver qu'à **53 m/s**, vitesse maximale de cette soufflerie, il vaut :

$$70\,000 \text{ s/m}^2 * 53 \text{ m/s} * \frac{1}{5} * 62 \text{ m} = 46 \text{ millions}^9$$

Il faut cependant réaliser que ce Reynolds de **46 millions** ne correspond, sur le sous-marin réel, qu'à une vitesse de **0,75 m/s**¹⁰, soit **2,7 Km/h**. Pour tirer de tels essais en soufflerie des coefficients réalistes à des vitesses plus fortes, les aérodynamiciens étaient donc tenus d'extrapoler les résultats obtenus (en particulier

⁹ Le sous-marin réel mesurait **62 m**.

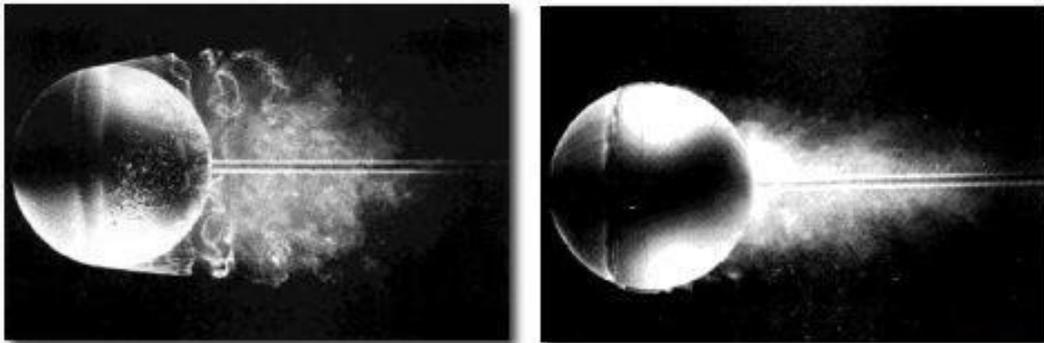
¹⁰ **46 millions** divisés par **1 million** (le million de notre raccourci pour l'eau à **20°**) et par **62 m**, la longueur du sous-marin.

pour estimer la Traînée à **17 m/s**, vitesse maximale en immersion de ce sous-marin) ; mais de telles extrapolations sont toujours de mise dans la plupart des essais en soufflerie car ces essais ne peuvent satisfaire parfaitement aux *règles de similitudes* (et en particulier à la règle de l'équivalence des Reynolds, si on ne s'attache qu'à ce nombre essentiel).¹¹

Mais revenons aux temps héroïques d'Eiffel et de Ludwig Prandtl.

Ce dernier fit beaucoup mieux qu'attribuer au Nombre de Reynolds la crise de la traînée de la sphère mise en lumière par Eiffel, il expliqua cette crise grâce à sa magistrale notion de Couche Limite (notion inventée par lui-même en 1904, voir à ce sujet notre texte [LA COUCHE LIMITE ET SON ÉQUATION INTÉGRALE DE VON KÁRMÁN](#)) : Pour Prandtl, en effet, c'est la transition de la Couche Limite existant sur la sphère depuis un état laminaire jusqu'à un état turbulent qui expliquait le *recollement* de l'écoulement sur l'arrière de ce corps aux grandes vitesses, la Couche Limite turbulente étant paradoxalement plus apte à résister au décollement que la Couche Limite laminaire.

On voit sur les captations ci-dessous (effectuées dans l'eau) le recul du point de décollement sur la sphère, entre l'image de gauche (en Couche Limite laminaire) et l'image de droite (en Couche Limite turbulente) :



Werlé, ONERA

Le décollement sur la sphère de droite correspond à une zone de basse pression de culot de moindre section frontale et donc à un moindre C_x ...

Cette importance de la dépression de culot apparaîtra mieux quand nous aurons rappelé que la partie avant de la sphère développe un C_x très faible, ce qui pour le débutant en aérodynamique apparaît toujours comme très paradoxal. Cela semble d'autant plus paradoxal qu'on assigne intuitivement à la partie avant d'un corps le rôle de se frayer un chemin dans l'atmosphère, de faire *la trace*, au fond, pour le reste du corps.

D'une façon générale pourtant, les avant-corps, comme les ogives de fusées par exemple, développent un C_x très faible, voire négatif...

Prandtl lui-même était conscient du fait qu'il était difficile à admettre que la transition de la Couche Limite depuis un état laminaire jusqu'à un état turbulent puisse

¹¹ Cette soufflerie **30 x 60 pieds** était d'ailleurs la seule à permettre des tests sur des avions grandeur nature, mais uniquement jusqu'à **193 km/h**. Jusqu'à cette vitesse, on peut donc dire que toutes les règles de similitude qu'imposent les lois de la Mécanique des Fluides étaient respectées lors de ces tests sur avions en vraie grandeur.

conduire à une diminution de traînée (l'écoulement laminaire autour d'un corps apparaissant comme un idéal par rapport à l'écoulement turbulent tel que celui existant à l'arrière de la [plaque carrée](#), par exemple).

Afin de prouver la véracité de son explication, Prandtl conçut alors une expérience qui est toujours pratiquée de nos jours : il posa sur la partie avant de la sphère un *élément turbulateur* (fil ou bande rugueuse) qui, malgré son action *traînante*, faisait chuter le C_x de la sphère.¹²

Un anneau de fil turbulateur est présent sur l'image de [Werlé](#) (captée dans l'eau), mais on le voit mieux sur l'image d'archive captée dans l'air (avec ajout de fumées), en 1914 à Göttingen :

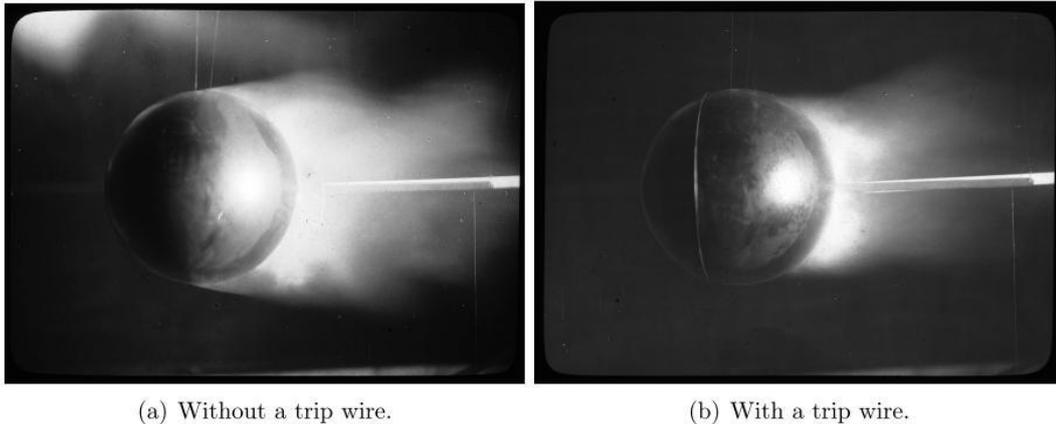


Figure 2: Turbulence behind a sphere made visible with smoke. (Reproduction from the original 1914 photograph, Göttinger Archiv des DLR, Göttingen)

tiré de : [Prandtl and the Göttingen School](#) Eberhard Bodenschatz and Michael Eckert
<http://www.cambridge.org/aus/catalogue/catalogue.asp?isbn=9780521149310>

Revenons un instant à la controverse entre Prandtl et Eiffel à propos du C_x de la sphère :

Que le collaborateur de Prandtl, Otto Föppl, ait suspecté Eiffel de s'être trompé d'un facteur 2 est parfaitement honorable : chacun est en droit de suspecter tout le monde car tout le monde peut se tromper (et chacun aussi).

Mais Eiffel ne s'était pas trompé dans la détermination du C_x de la sphère : Certes son coefficient de traînée K n'était pas encore notre coefficient de traînée adimensionnel moderne (lequel fut d'ailleurs composé par Prandtl, comme basé sur la pression dynamique au point d'arrêt $\frac{1}{2} \rho V^2$), mais il était défini de façon tout à fait rigoureuse. Ainsi, pour obtenir le C_x moderne à partir du coefficient K d'Eiffel, il suffit de multiplier la valeur de ce K par **16,016**...

La crise de traînée qui se produit sur la sphère se produit pareillement pour le cylindre présenté transversalement au courant d'air ; dans [son ouvrage](#) publié juste après la première guerre mondiale, Eiffel publiera d'ailleurs une très saisissante courbe du C_x du cylindre selon le produit de son diamètre par la vitesse de l'écoulement :

¹² Nous citons une fois de plus l'ouvrage de [Bodenschatz et Eckert](#).

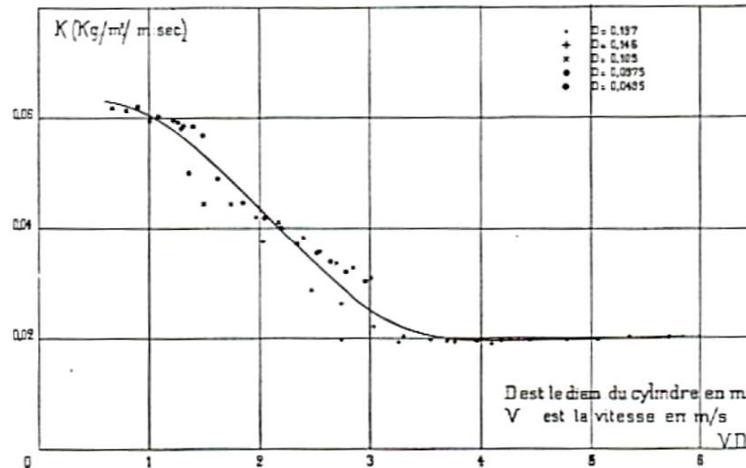


Fig. 46. — Coefficients de résistance de corps cylindriques.

Source : "Aérodynamique Eiffel"

En abscisses sont ces produits du diamètre des sphères par la vitesse de l'écoulement auquel elles sont soumises.

La crise du cylindre est ainsi déterminée par Eiffel comme intervenant entre les produits VD **0,5 m²/s** et **4 m²/s**. En aérodynamique moderne, cela place cette crise entre les Reynolds **0,035 million** et **0,28 million**¹³.

Cette plage s'avère un peu plus basse et plus large en Reynolds que ce que l'on estime de nos jours (à savoir de **0,2 à 0,4 million**).¹⁴

Quand aux coefficients K d'avant et d'après crise (K étant le coefficient de Traînée utilisé par Eiffel, en ordonnée sur ce graphe), ils correspondent à des C_x modernes de **0,96** et **0,32** ; ce sont des valeurs assez modernes dans la mesure où on les place actuellement à **1,2** et **0,3** pour le cylindre.

Nous venons de reprendre ci-dessus un partie de notre texte [LE REYNOLDS DES CORPS VOLANTS \(NATURELS OU FAITS DE MAIN D'HOMME\)](#).

Mais revenons à présent à notre sphère pour présenter une collecte effectuée par nous de graphes de son C_x sur toute la plage possible de Reynolds.

Dessiner de tels graphes du C_x de la sphère correspond à établir les propriétés de l'écoulement des fluides autour de tous les corps sphériques dans l'ensemble de l'Univers : on peut donc être sûr que si les extra-terrestres ont un goût pour la mécanique des fluides, ils ont établi le même graphe dans chacune de leurs civilisations (comme on peut être sûr que, s'ils ont un goût pour les mathématiques, ils ont fixé la valeur du nombre π ¹⁵).

Le C_x est ici défini classiquement comme le quotient de la traînée T par la section maximale S de la sphère et par la Pression Dynamique q de l'écoulement, soit : $C_x = T/(qS)$, ou, plus explicitement, comme nous l'avons déjà écrit :

¹³ Il suffit, comme nous l'avons dit, de multiplier ces produits en **m²/s** par **70 000 s/m²**...

¹⁴ Cette différence de placement de la crise étant imputable à la légère turbulence de la soufflerie d'Eiffel.

¹⁵ Nous n'aurions d'ailleurs pas la prétention de critiquer le goût des extra-terrestres...

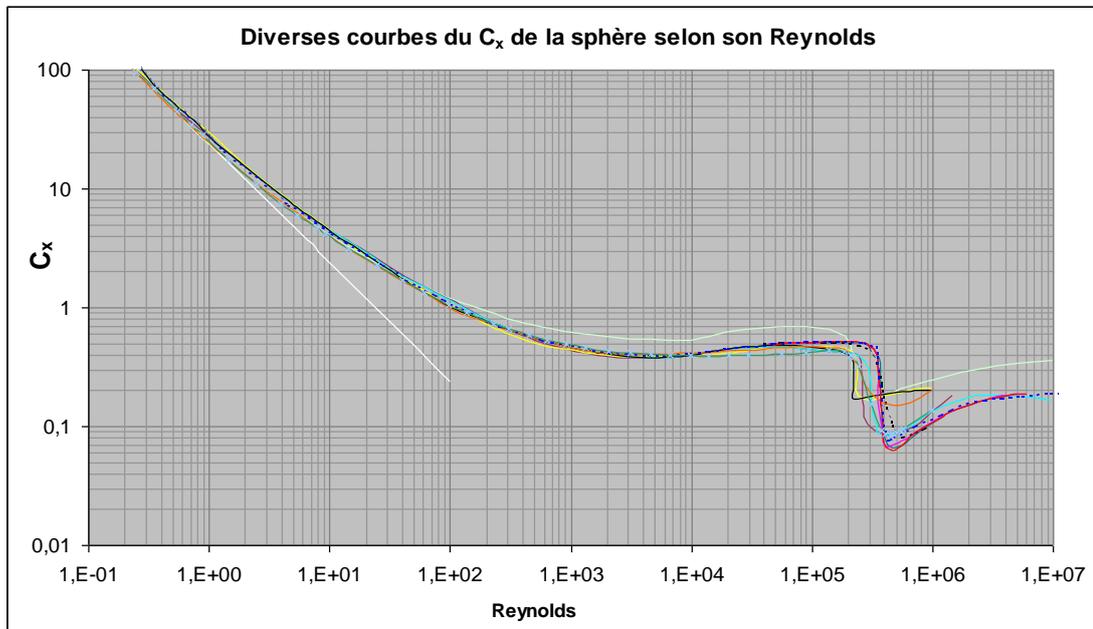
$$C_x = \frac{T}{\frac{1}{2} \rho V^2 S}$$

...avec T la Traînée aérodynamique, ρ la Masse volumique de l'air déplacé par le vent, S la section frontale de la sphère ($\pi D^2/4$, si D est son diamètre), V la vitesse de l'écoulement, l'ensemble en unités cohérentes (par exemple N , Kg , m et s).

Pour ce qui est du choix de la surface de référence S , on doit admettre qu'il n'y a guère d'autres choix simples que celui de la section frontale. Cela explique que lorsque l'on parle du C_x de la sphère, c'est presque toujours en référence à sa section frontale.

N'évoquons donc que pour mémoire deux autres surfaces de référence envisageable (selon le but recherché) : la surface totale de la sphère (πD^2) et la puissance $2/3$ de son volume, cette dernière surface de référence pouvant être utilisée pour comparer la Traînée d'un ballon sphérique avec celle d'un ballon dirigeable fuselé de même volume.

Voilà notre relevé de différents graphes proposés par divers auteurs :



Rappelons que le C_x représenté en ordonnées est défini comme valant :

$$C_x = \frac{T}{\frac{1}{2} \rho V^2 S}$$

...c.-à-d. comme prenant acte d'une variation quadratique de la Traînée en fonction de la vitesse (nous verrons à l'instant que cela n'empêche pas la Traînée de ne pas suivre cette loi quadratique pour certaines plage de Reynolds, cette restriction n'ôtant pas à notre C_x la qualité d'être toujours défini et fonctionnel).

À gauche du graphe, l'ensemble des courbes viennent tangenter à la droite $C_x = 24/R_e$ qui représente le régime de Stokes (régime adopté par les gouttes de brouillards et de bruines lors de leur chute dans l'air, et plus généralement par toutes les particules sphériques décantant dans un fluide).

On doit se souvenir à ce propos, que ce régime est celui où la Traînée de la sphère est proportionnelle à sa vitesse (et non au carré de sa vitesse). Comme sur le graphe [ci-dessus](#) le C_x est exprimé, par définition, en référence au carré de la vitesse, il est logique que, dans ce régime de Stokes, il suive la loi hyperbolique $C_x = 24/R_e$ (traduite ici, en coordonnées logarithmiques, par une droite à 45° descendante).

En effet, dans ce régime, pour une dimension de sphère donnée (donc une section S donnée), la Traînée est définie comme valant $T = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_x$, ...soit $T = \frac{1}{2} \rho V^2 S \frac{24}{R_e}$. puisqu'en régime de Stokes $C_x = 24/R_e$

Si l'on donne au Reynolds R_e sa valeur $R_e = \frac{VD}{\nu}$, on dégage bien que la Traînée T est proportionnelle à la vitesse V du corps (le diamètre D et la viscosité cinématique ν restant inchangés).

En coordonnées logarithmiques l'équation $C_x = 24/R_e$, comme toute équation du type $y = n/x$, est représentée par une droite à 45° (du moins si, comme sur le graphe ci-dessus, on donne la même échelle aux abscisses et aux ordonnées).

Élargissons d'ailleurs cette réflexion sur les *météores* aux gouttes de pluie :

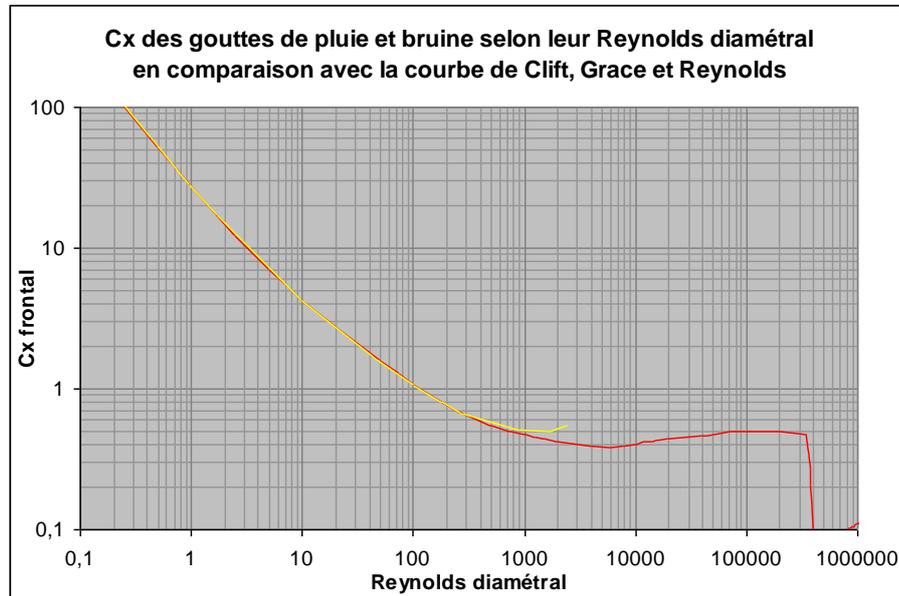
L'Encyclopédie Universalis en donne la vitesse de chute en fonction du diamètre. Comme on s'en doute plus le diamètre est fort et plus la vitesse de chute est grande (c'est ce fait naître l'impression –erronée– que les très fines gouttes d'eau d'un brouillard ne tombent pas).

Les données de cette encyclopédie comportent une coquille (le diamètre **3 mm** est répété deux fois (ce qui est corrigé ci-dessous), ainsi qu'une curiosité dans la vitesse donnée pour le diamètre **0,4 mm**, qui est beaucoup trop faible (ce qui est corrigé ci-dessous) :

| Diamètre de la goutte (m) | Vitesse de la goutte (m/s) |
|---------------------------|----------------------------|
| 0,00001 | 0,003 |
| 0,00002 | 0,012 |
| 0,00003 | 0,026 |
| 0,00004 | 0,047 |
| 0,00005 | 0,072 |
| 0,00006 | 0,103 |
| 0,00008 | 0,175 |
| 0,0001 | 0,25 |
| 0,0002 | 0,71 |
| 0,0004 | 1,6 |
| 0,0006 | 2,46 |
| 0,0008 | 3,25 |
| 0,001 | 4,03 |
| 0,002 | 6,49 |
| 0,003 | 8,06 |
| 0,004 | 8,83 |

Il est aisé de tirer de ces relevés ¹⁶ la courbe du C_x frontal des gouttes en fonction du Reynolds de leur mouvement (en considérant que les vitesses annoncées sont des vitesses terminales, c.-à-d. des vitesses limites de chute stabilisée).

Voici cette courbe, en jaune, comparée avec la courbe *standard* de Clift, Grace et Weber (en rouge), courbe standard que nous étudierons en détails plus bas, mais dont on peut déjà dire qu'elle représente l'état des connaissances actuelles sur le sujet du C_x de la sphère :



Il est patent que le C_x des gouttes devient plus fort que le C_x des sphères étudiées par Clift et collaborateurs à partir d'un Reynolds diamétral compris entre **400** et **1000**, ce dernier Reynolds correspondant à un diamètre de goutte de **2 mm**.

Au demeurant, cette divergence entre les deux courbes est tout à fait normale puisque la pression dynamique au point d'arrêt des grosses gouttes les aplatit légèrement, augmentant par là-même leur C_x .

Cette déformation sort d'ailleurs les gouttes d'eau d'un diamètre supérieur à **2 mm** du cadre du présent texte. ¹⁷

Mais revenons à notre [graphe](#) représentant l'ensemble des courbes collectées par nous.

Vers la droite de ce graphe, le Reynolds rejoint sa plage *aéronautique* (disons de 10^4 à 10^7), plage où des corps construits de main d'homme se meuvent à une vitesse subsonique (ce graphe n'est valable qu'en subsonique).

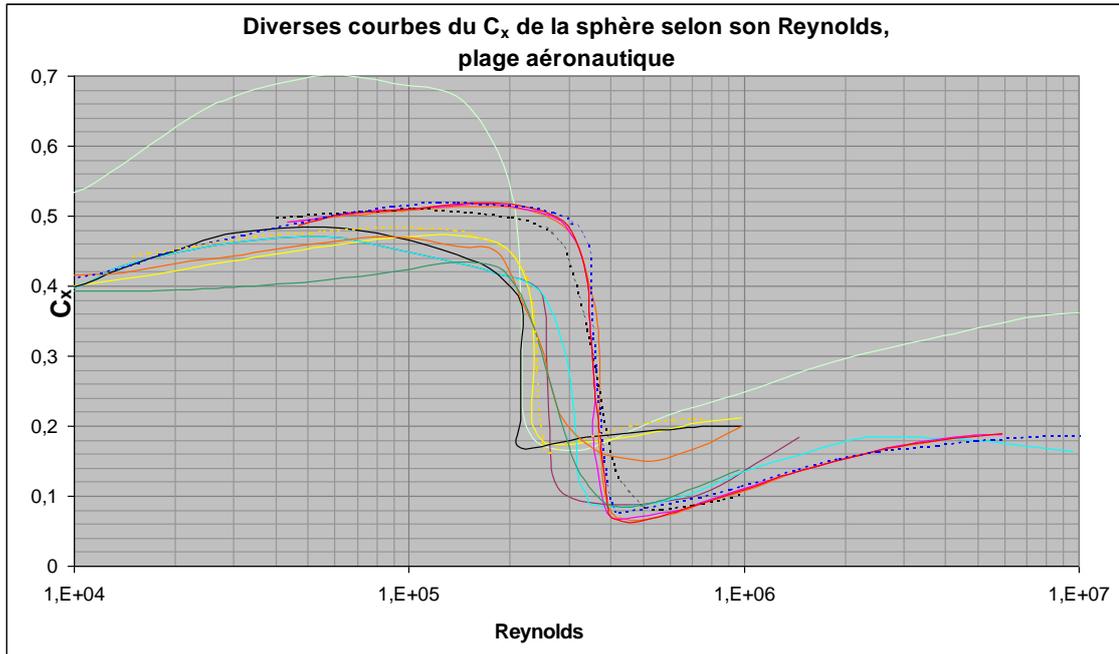
L'ensemble des sphères pouvant se revendiquer de cette plage aéronautique s'étend (par exemple) des sphères de diamètre **1,5 cm** se déplaçant dans l'air à **10 m/s**

¹⁶ On peut aussi en déduire une loi de vitesse pour les gouttes de diamètre allant de **0,2** à **4 mm** : $V = -0,58 D^2 + 4,5 D$, avec D en mm.

¹⁷ Pour mémoire, précisons que lorsque les gouttes d'eau grossissent cet aplatissement de la goutte au point d'arrêt s'amplifie pour évoluer vers un creusement tendant à donner à la goutte d'eau de diamètre **6 mm** une forme d'ombrelle, forme aérodynamiquement instable qui entraînera l'éclatement de la goutte en gouttes plus petites. Ceci explique qu'il n'existe pas de gouttes de pluie de diamètre supérieur à **6 mm**.

(soit **36 km/h**) aux sphères de **1,5 m** de diamètre se déplaçant dans l'air à **100 m/s** (soit **360 km/h**)¹⁸.

Effectuons un zoom sur cette plage aéronautique :



Au premier regard, on ne discerne qu'un lacis confus de courbes ; puis on peut prendre la décision d'exclure de la réflexion la courbe bleu pâle de Frank M. White, mécanicien des fluides réputé (auteur de *Fluid Mechanics*, Éditions McGraw-Hill).

Il est possible que cet auteur ait simplement désiré donner à voir la forme générale de la courbe du C_x de la sphère.

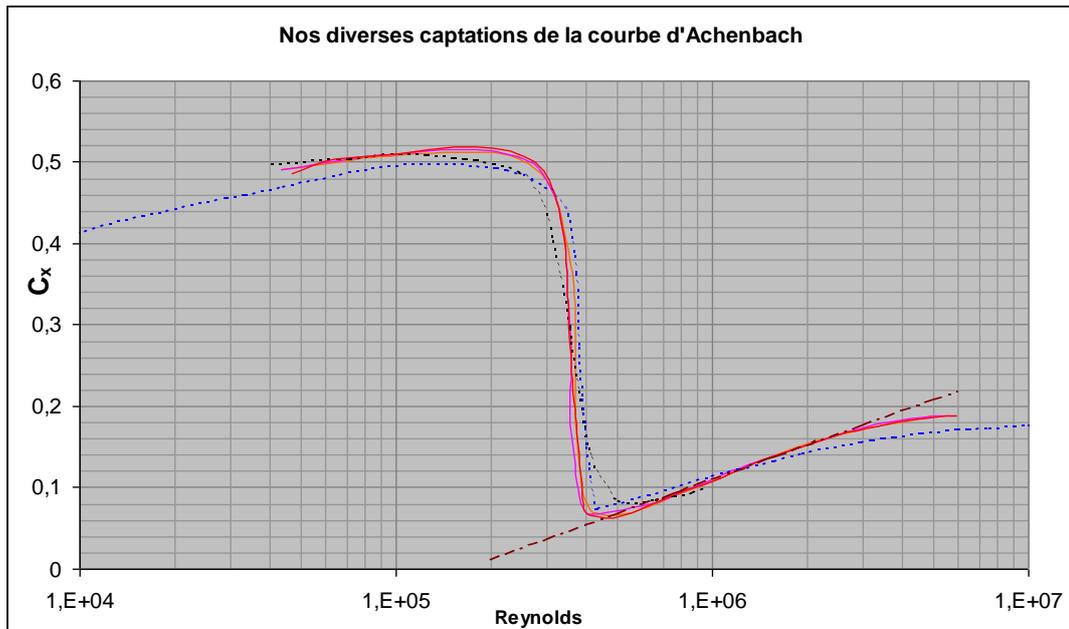
Ensuite, lorsque l'on jette un nouveau regard sur cet [ensemble de courbes](#), on réalise que les C_x supercritiques dessinent deux marches d'escalier distinctes.

La marche la plus haute (et qui débute à plus grand Reynolds) est celle qui a été révélée par les travaux d'Achenbach en 1972.

De fait, et comme on le saisit mieux ci-dessous, deux des courbes de l'ensemble se recommandent de ce chercheur (courbes orange et fuchsia¹⁹), alors qu'une troisième, la courbe rouge a été puisée directement par nous dans les travaux mêmes d'Achenbach :

¹⁸ Cette vitesse commence à s'approcher de celle du son et constitue une limite quant à la validité de la présente étude (qui se limite aux Mach inférieurs à **0,3**).

¹⁹ Bearman et Harvey, dans *GOLF BALL AERODYNAMICS*, par exemple.

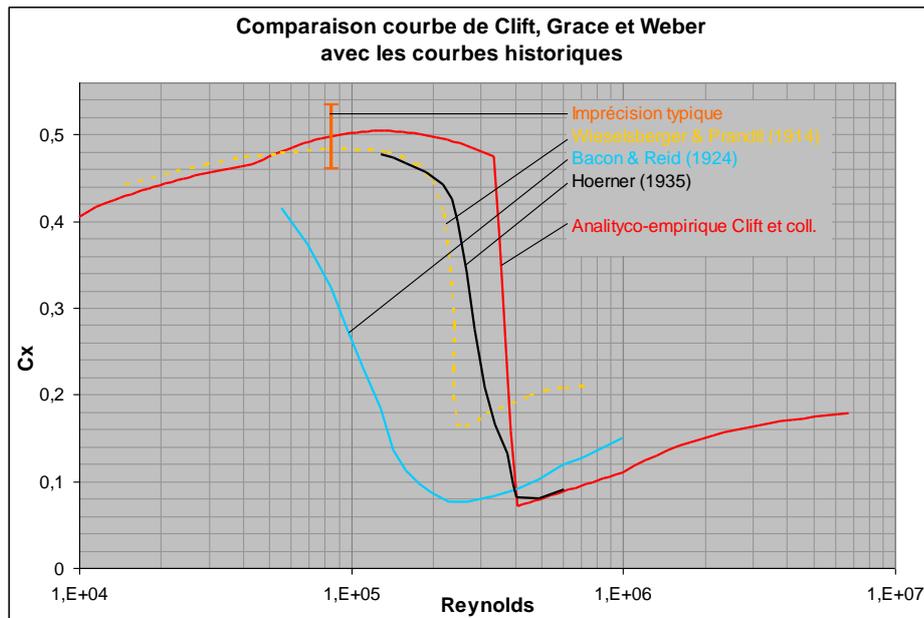


Que ces trois courbes (dont deux de sources indirectes, c.-à-d. qu'elles ont été tracées par d'autres auteurs se recommandant d'Achenbach) soient presque confondues nous rassure sur la précision de la méthode utilisée par nous pour réaliser leur captation d'après les images en notre possession.

La courbe en pointillés bleus visible ci-dessus est la courbe analytico-empirique de Clift, Grace et Weber que nous étudierons [plus loin](#). Elle utilise les résultats d'Achenbach.

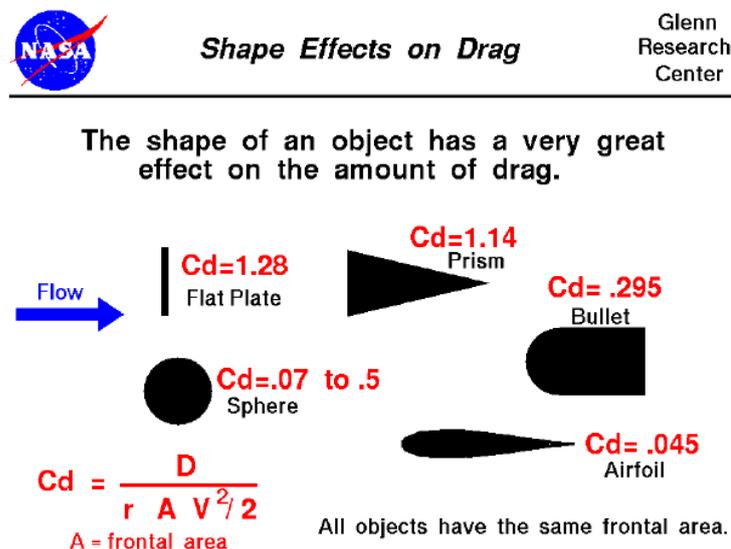
La courbe en pointillés noirs est de [Rod Cross](#), de l'Université de Sydney.

Dans sa [très complète thèse](#) G. K. Suryanarayana effectue la comparaison de la courbe analytico-empirique de Clift, Grace et Weber avec des courbes historiques. Cette comparaison indique que le grand Hoerner (courbe noire, ci-dessous) a obtenu des résultats assez proches d'Achenbach, du moins pour le C_x supercritique.



L'existence d'un quasi-palier pour le C_x supercritique est d'une grande utilité pour l'ingénieur. Le C_x supercritique en ressort comme valant $\sim 0,07$ au plus bas ; au-delà de ce quasi-palier, on peut lui trouver une régression simple²⁰, mais on doit admettre, au vu de la littérature disponible, que beaucoup de mécaniciens des fluides préfèrent s'en tenir, pour ce C_x supercritique, à une valeur fixe (.

À titre de comparaison, certains auteurs de la NASA relatent dans une [page html](#) pédagogique un C_x minimal pour la sphère (C_x supercritique, donc) de $0,07$, valeur qui est celle dégagée par Achenbach :

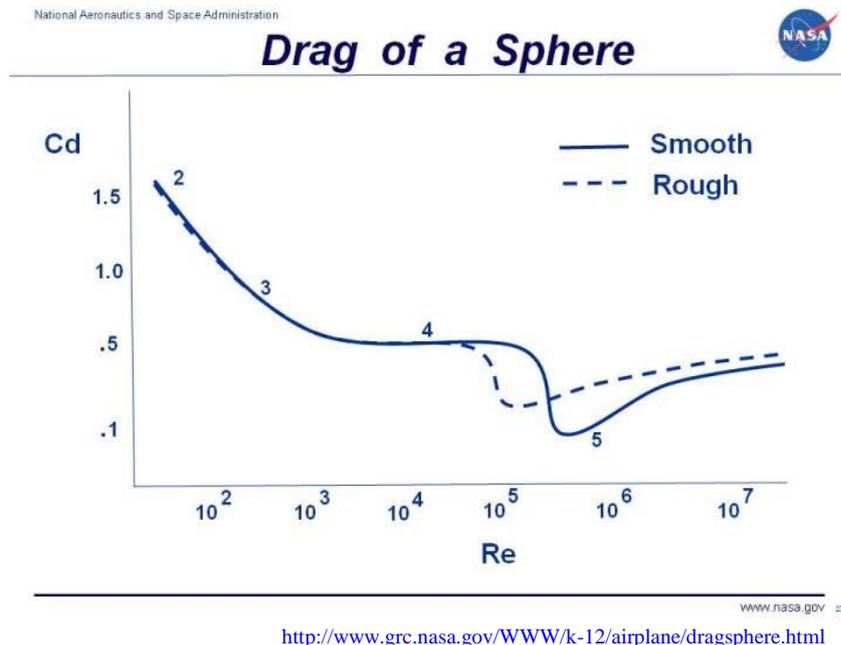


Dans le texte accompagnant ces schémas, on lit :

[...] a sphere has a Cd that varies from .07 to .5 [...].

²⁰ Nous trouvons $C_x = 0,14 \text{ Log}_{10}(R_e) - 0,73$.

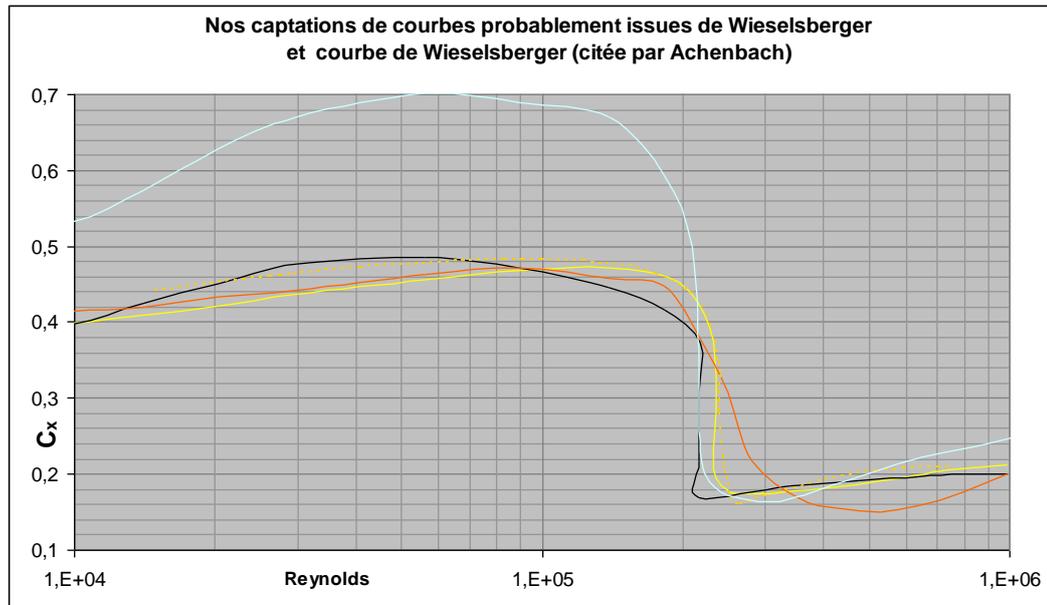
La NASA, malgré les qualités qu'on lui connaît, n'est cependant pas en reste d'approximations, puisqu'on trouve également parmi ses autres pages pédagogiques ce graphe :



Sauf à le prendre pour une vague indication de tendance, ledit graphe est à la limite de la forfaiture puisque ses axes ne comportent aucune graduation et que les valeurs annoncées en ordonnées comme en abscisses suivent des progressions allègrement irrégulières...

Le même graphe a été repris de confiance par un contributeur de Wikipédia qui le propose dans sa [page anglaise sur le \$C_x\$](#) (ou bien est-ce la NASA qui a repris le graphe de Wikipédia).

Mais revenons à notre compilation des différentes courbes du C_x et spécialement à l'autre quasi-palier supercritique (aux alentours du C_x **0,18**). Nous sommes contraint de penser que ce quasi-palier supercritique est dessiné d'après les travaux historiques de Wieselsberger datant de 1922 :



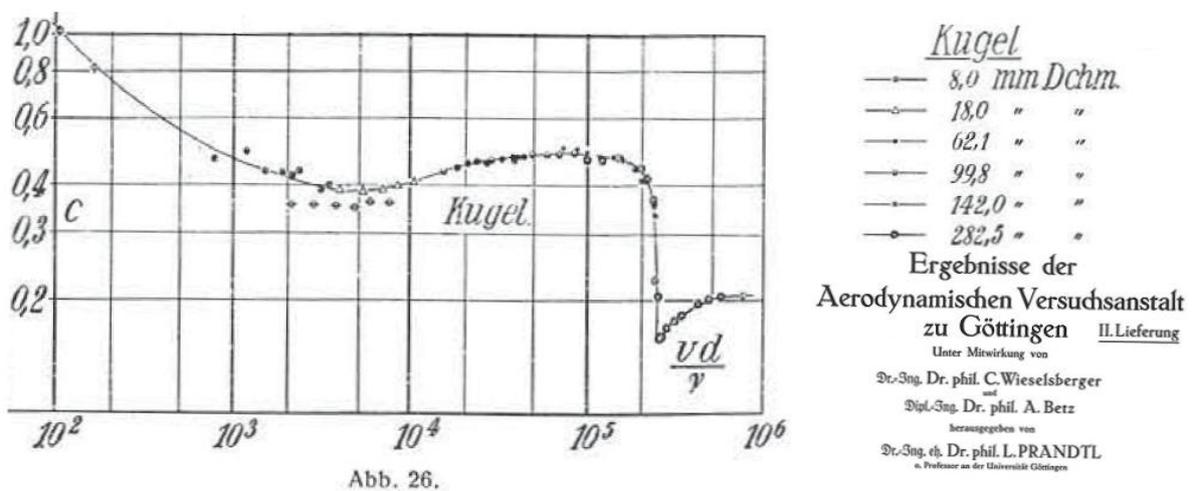
La courbe de Wieselsberger a été reproduite ci-dessus en pointillés jaunes (elle était déjà présente, en jaune pointillés, sur le [graphe de comparaison de Suryanarayana](#)).

La courbe bleu clair de Franck M. White, après avoir vagabondé vers des sommets inusités, semble elle-même se caler sur la valeur supercritique de Wieselsberger.

La position haute de ce quasi-palier de Wieselsberger s'explique par le fait que sa soufflerie était affligée d'un taux de turbulence beaucoup plus élevé que celle d'Achenbach, ce qui entraînait que la crise de la sphère se produise beaucoup plus tôt.

D'autre part, l'influence du dispositif de contention de ladite sphère se fait sentir par un C_x supercritique plus fort^{21 22}.

Voici pour mémoire, tiré d'un ouvrage de 1923, un extrait de la courbe obtenue en 1922 par Wieselsberger (sous la surveillance de Prandtl) :



²¹ “The flow in Wieselsberger's experiments seems to be influenced by the support system, as C_D diminishes only down to a critical value of 0.15.” ([Achenbach](#))

²² Pour l'influence des dispositifs de contention de la sphère, voir plus loin.

(*Kugel* signifie *sphère* en allemand). Le C_x supercritique relevé par Wieselsberger est ici de **0,16**.

Force est de constater que l'on rencontre encore fréquemment cette option d'un C_x supercritique de 0,2.

Admettons cependant que le repli sur cette forte valeur supercritique (par rapport aux **0,07** obtenus par Achenbach) peut constituer un réflexe conservatoire pour le praticien :

→ d'une part, dans le calcul des efforts sur un corps sphérique, la valeur supercritique de **0,2** est sécuritaire ;

→ d'autre part, il faut noter que le [quasi-palier d'Achenbach](#) est assez court : il ne correspond qu'à une faible augmentation du Reynolds (de $4 \cdot 10^6$ à $6 \cdot 10^6$) et donc de la vitesse d'écoulement pour un corps donné ; pour une plus forte augmentation du Reynolds, le C_x rejoint presque la valeur de **0,2** proposée par Wieselsberger.

→ d'autre part encore, le C_x supercritique de **0,07** d'Achenbach ne peut être atteint que dans un écoulement parfaitement non turbulent, ce qui est assez rare à la surface du sol (même si l'on peut attendre cette non-turbulence dans les essais en chute libre ou *aérienne*) ;

→ d'autre part toujours, parce que le C_x d'une sphère non parfaitement polie est également plus fort que le C_x minimal d'Achenbach (nous le verrons [plus bas](#)).

En un mot comme en cent, la valeur à prendre pour le C_x d'une sphère (hormis peut-être pour une sphère lisse en chute libre) reste une affaire d'ingénieur.

Libellés analytiques de la courbe du C_x de la sphère :

Il est évidemment tentant de modéliser la courbe du C_x de la sphère par des équations analytiques.

[Clift, Grace et Weber](#) sont parvenu à un résultat satisfaisant en découpant l'ensemble des Reynolds envisageables en 10 plages, chacune de ces plages constituant le domaine d'expression d'une seule équation.

Nous avons déjà présenté la courbe qui résulte de ces dix équations, courbe captée par nous en tant qu'image et que Clift, Grace et Weber nomment *courbe standard* mais que nous appellerons dans ce texte *courbe analytico-empirique*.

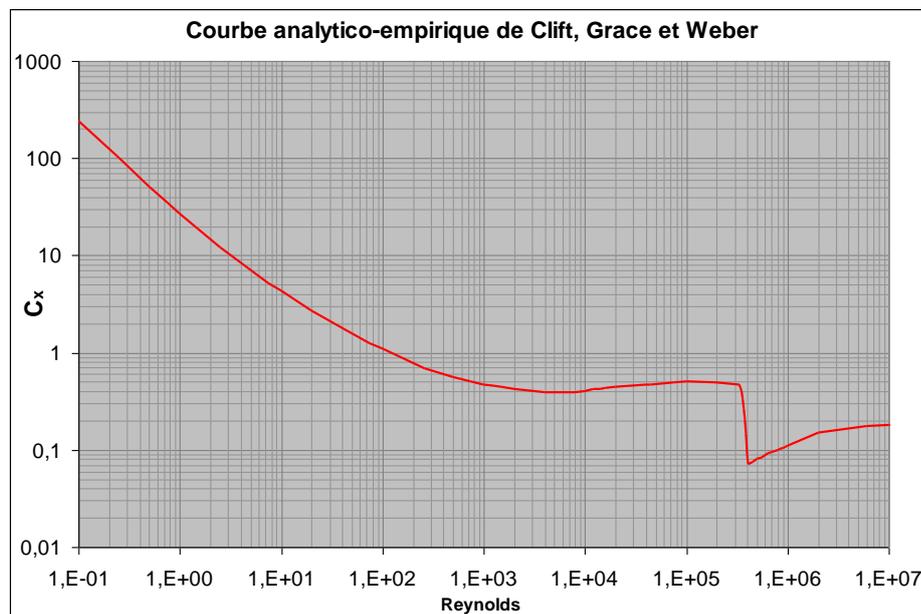
Voici les dix équations donnée par Clift, Grace et Weber, avec la plage de Reynolds où ces équations s'appliquent :

| | |
|--|--|
| $R_e < 0,01$ | $= 2/16 + 24/R_e$ |
| $0,01 < R_e \leq 20$ | $= 24/R_e * (1 + 0,1315 * R_e^{(0,82 - 0,0217 * \text{Ln}(R_e))})$ |
| $20 \leq R_e \leq 260$ | $= 24/R_e * (1 + 0,1935 * R_e^{0,6305})$ |
| $260 \leq 1500$ | $= \text{Exp}(3,7843 - 1,1242 * \text{Ln}(R_e) + 0,06767 * \text{Ln}(R_e)^2)$ |
| $1,5 \cdot 10^3 \leq R_e \leq 1,2 \cdot 10^4$ | $= \text{Exp}(-5,6577 + 2,5558 * \text{Ln}(R_e) - 0,4037 * \text{Ln}(R_e)^2 + 0,01978 * \text{Ln}(R_e)^3)$ |
| $1,2 \cdot 10^4 \leq R_e \leq 4,4 \cdot 10^4$ | $= \text{Exp}(-4,42 + 0,637 * \text{Ln}(R_e) - 0,0276 * \text{Ln}(R_e)^2)$ |
| $4,4 \cdot 10^4 \leq R_e \leq 3,38 \cdot 10^5$ | $= \text{Exp}(-9,996 + 1,5809 * \text{Ln}(R_e) - 0,0671 * \text{Ln}(R_e)^2)$ |
| $3,38 \cdot 10^5 \leq R_e \leq 4 \cdot 10^5$ | $= 29,779 - 2,3017 * \text{Ln}(R_e)$ |
| $4 \cdot 10^5 \leq R_e \leq 10^6$ | $= 0,04343 * \text{Ln}(R_e) - 0,49$ |
| $10^6 \leq R_e$ | $= 0,19 - 8 * 10^4 / R_e$ |

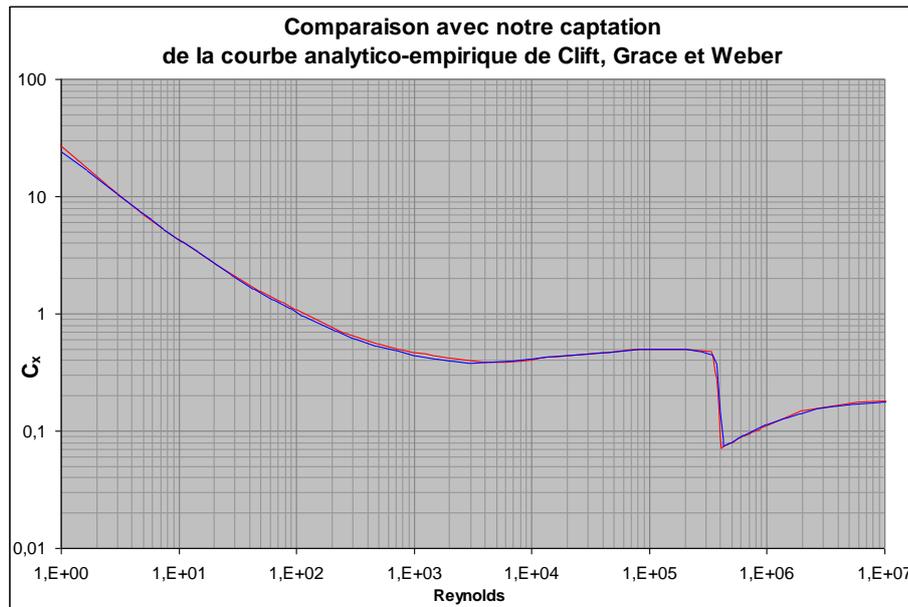
Nous avons ci-dessus effectué certaines simplifications et, par raison d'unité, nous n'avons fait usage que du logarithme népérien.

Le libellé de ces équations doit les rendre utilisables directement par tous les tableurs, à quelques adaptations près...

Voici la courbe que dessinent ces équations dans notre tableur :



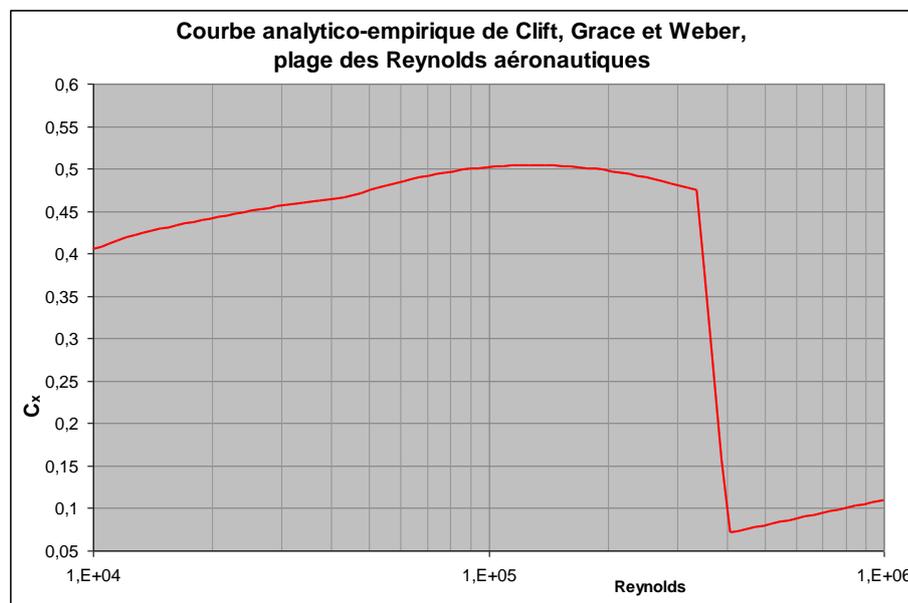
Au passage, comparons cette courbe rouge dessinée par notre tableur avec les résultats de notre captation *image* de la même courbe effectuée dans le texte de Clift et collaborateurs :



En bleu est notre captation "image" de la courbe figurant dans le texte de Clift, Grace et Weber. Le résultat est satisfaisant, à notre goût.

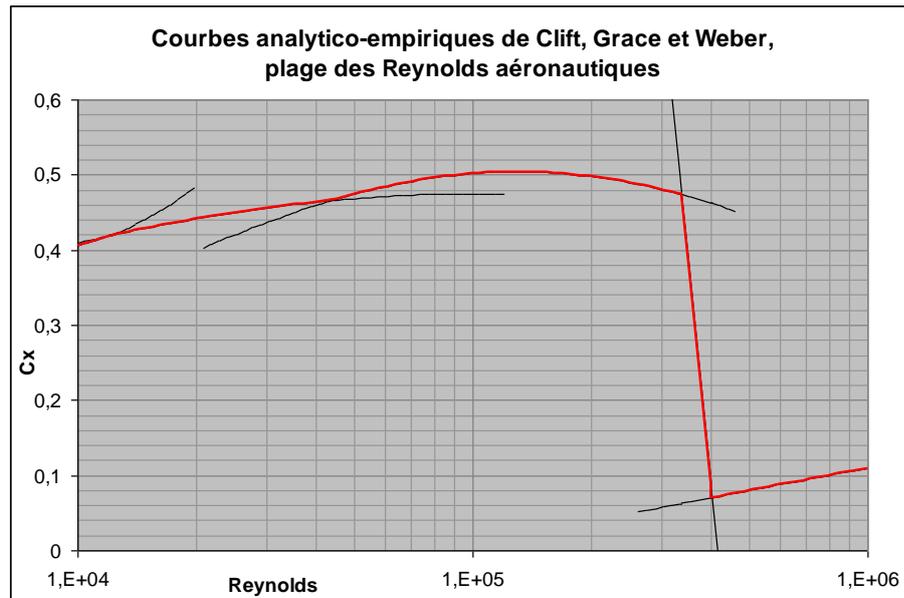
Il apparaît que la courbe bleue des trois auteurs adoucit nettement le début de la crise du C_x (un peu après $3 \cdot 10^5$), ce qui est peut-être dû à la mise en route de la fonction de lissage de leur tableur²³.

Voici à présent la courbe de Clift Grace et Weber, toujours dessinée par notre tableur à partir de leurs équations, mais dans la plage des Reynolds aéronautiques :



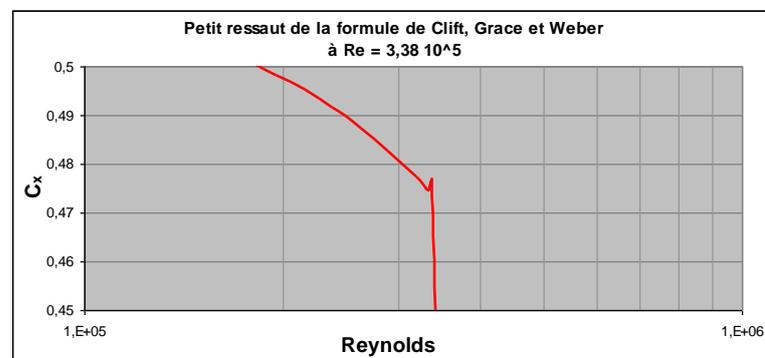
Les bosses et creux existant sur cette courbe se trouvent aux points de jonction des diverses équations élaborées par les auteurs. On le voit mieux si l'on trace la prolongation de ces équations hors de leur plage d'application :

²³ Pour notre part, nous nous méfions de ce type de manipulation cosmétique.



On peut évidemment trouver un peu trop marqués les angles d'entrée et de sortie de crise (aux Reynolds $3,38 \cdot 10^4$ et $4 \cdot 10^4$), surtout si on les compare avec les angles beaucoup plus doux de la [courbe d'Achenbach \(en rouge, orange ou fuchsia\)](#), mais cette option simplificatrice des trois auteurs peut être jugée de bonne ingénierie.

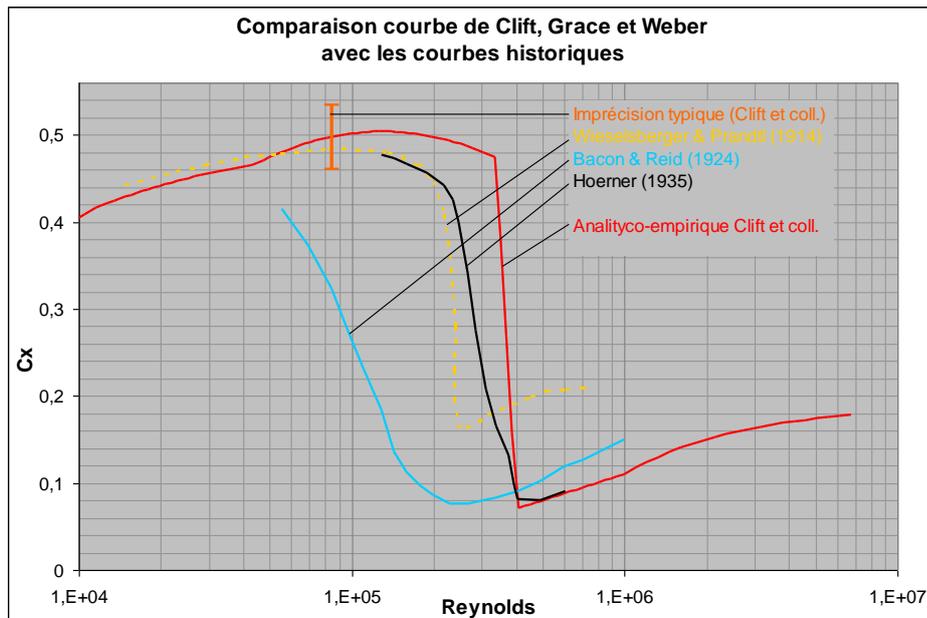
L'angle d'entrée de crise est d'ailleurs plus qu'un angle puisque, si l'on effectue un zoom dessus, il présente une crête :



C'est sans importance, mais pour faire disparaître cette crête, il faut déplacer la frontière entre les deux courbes de $3,38 \cdot 10^5$ jusqu'à $3,385 \cdot 10^5$.

Le chercheur Indien G. K. Suryanarayana, a effectué dans [sa thèse](#) une comparaison de la courbe analytico-empirique de Clift et coll. avec les courbes obtenues par différents auteurs.

Les auteurs historiques, d'abord (graphe déjà présenté par nous) :

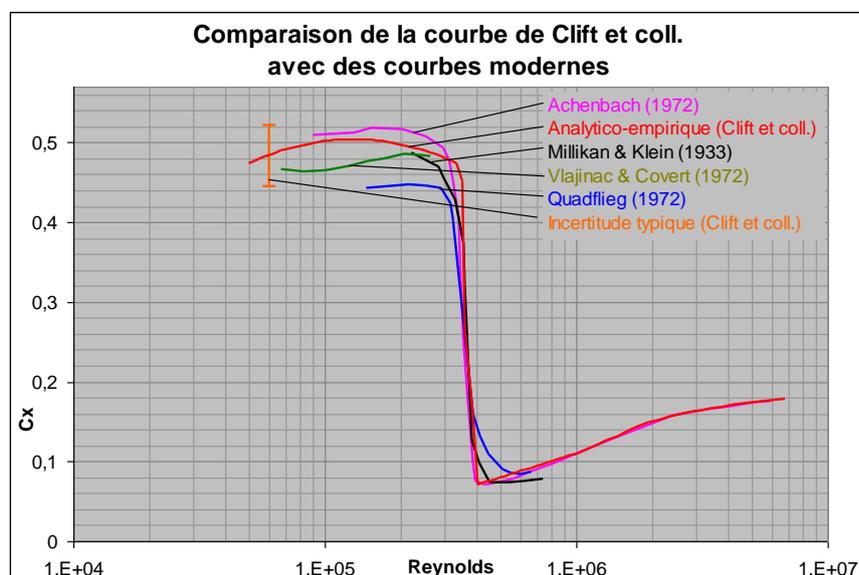


La courbe de Clift et coll. est en rouge.

Suryanarayana analyse le décalage vers les faibles Reynolds de ces courbes historiques comme étant dû à la turbulence des souffleries utilisées.

Quant au décalage vers le haut de certains C_x supercritiques, il l'attribue à l'influence des moyens de contention des sphères.

Le même auteur indien compare bien-sûr la courbe de Clift et coll. aux travaux beaucoup plus récents d'Achenbach et de certains auteurs que nous découvrons à cette occasion :



Ces courbes expérimentales sont presque unanimes ; parmi ces courbes modernes, on remarque la courbe de Millikan et Klein qui fait bonne figure, bien qu'elle date de 1933 : elle a été obtenue par mesure de sphères portées au bout d'un dard par un

avion volant en air calme, méthode qui s'affranchit du défaut de turbidité des souffleries.²⁴

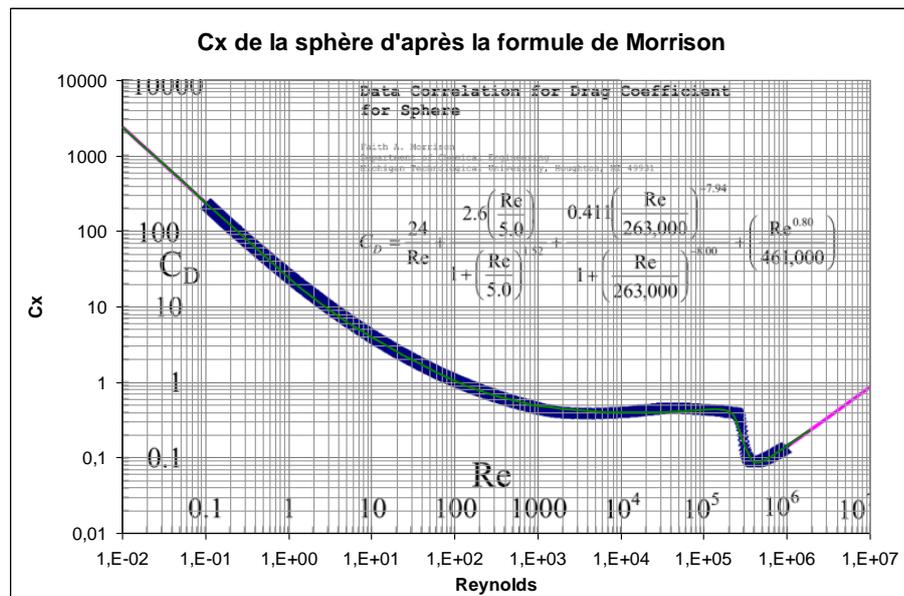
Dans toutes ces analyses et comparaisons, cependant, la représentation de l'incertitude proposée par Clift et ses collaborateurs (segment vertical orange) doit nous inciter à la prudence et à la modestie.

Une autre chercheuse, Faith Morrison, a réalisé le tour de force de concentrer les dix équations de Clift et collaborateurs [en une seule](#) (de libellé d'ailleurs assez simple).

Nous ne saurions mieux faire que d'exposer cette formule, francisée par nos soins²⁵ :

$$C_D = \frac{24}{Re} + \frac{2,6 \left(\frac{Re}{5} \right)}{1 + \left(\frac{Re}{5} \right)^{1,52}} + \frac{0,411 \left(\frac{Re}{263\,000} \right)^{-7,94}}{1 + \left(\frac{Re}{263\,000} \right)^{-8,00}} + \left(\frac{Re^{0,80}}{461\,000} \right)$$

Voici, en trait vert, le résultat que ce libellé unique dessine :



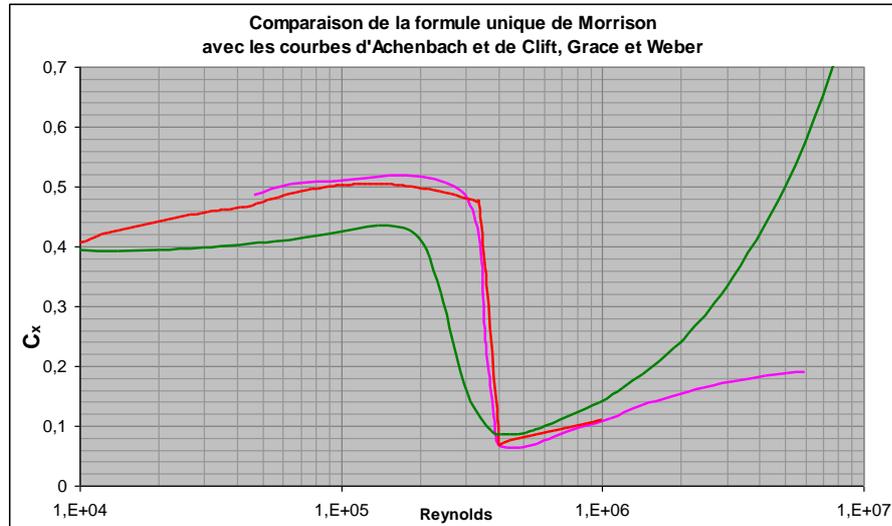
Le gros trait bleu, figure l'ensemble des données de C_x collectées par Schlichting (1955) (donc avant les apports d'Achenbach)...

En tout état de cause, ce tracé est assez satisfaisant. Notons que Faith Morrison limite sa formule aux Reynolds inférieurs à un million.

²⁴ La méthode de prise en compte de l'influence du dard de contention n'est pas connue.

²⁵ Par *francisée* nous voulons dire que les points ont été remplacés par des virgules et les virgules par de simples espaces. Profitons-en pour dire que le système de notation anglo-saxon nous paraît plus logique que le notre, surtout si des points font le travail de nos espaces.

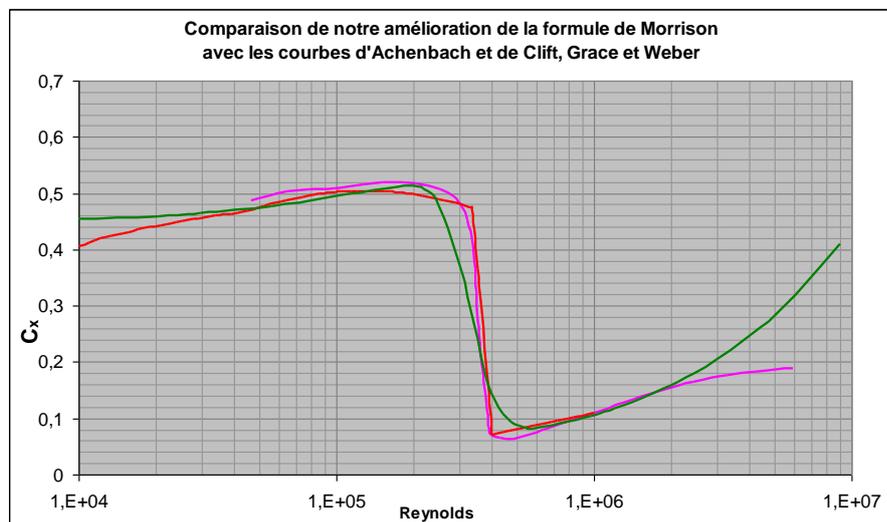
Observons le même tracé vert (effectué d'après la formulation de Morrison) dans une plage plus étroite, en comparaison avec la courbe d'Achenbach (en fuchsia) et celle, analytico-empirique, de Clift, Grace et Weber (en rouge) :



On peut juger que les valeurs choisies par Faith Morrison pour les C_x sous-critique et super-critique ne sont pas celles d'Achenbach (qui ne sont pas pris en compte par Schlichting).

Pour obvier à cet inconvénient, nous avons modifié les coefficients des troisième et surtout quatrième terme de la formule de Morrison.

Par ce moyen, il est assez facile d'obtenir le tracé suivant (toujours en vert) :



Le troisième terme a ici été changé en :

$$\frac{0,49 \left[\frac{R_e}{328\,000} \right]^{-7,94}}{1 + \left[\frac{R_e}{328\,000} \right]^{-8}}$$

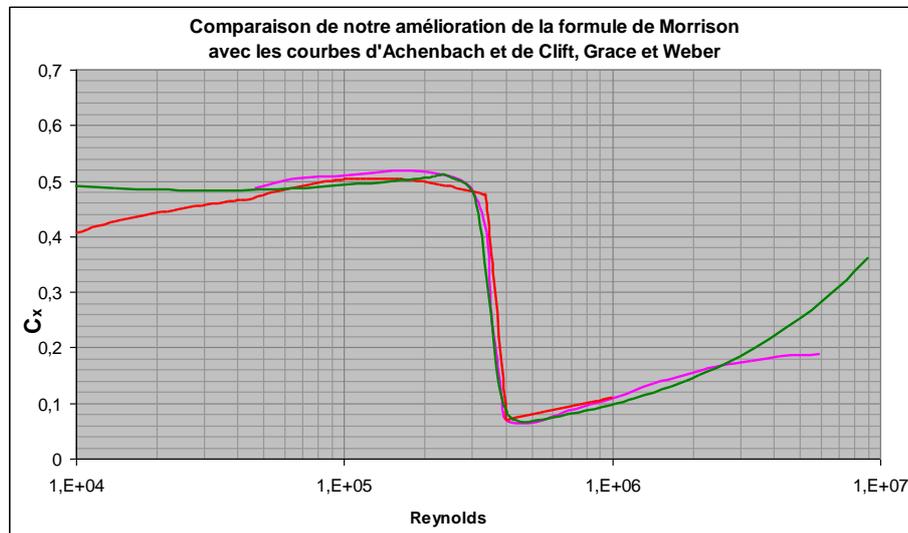
...et le quatrième en :

$$\left[\frac{R_e^{0,64}}{69\,000} \right]$$

Notre courbe reste cependant moins *apiquée* (moins proche de la verticale) que celle d'Achenbach, c.-à-d. que la crise qu'elle décrit est moins brutale, mais, comme on sait, cela peut correspondre à une certaine turbulence de l'écoulement, au moins dans sa partie haute...

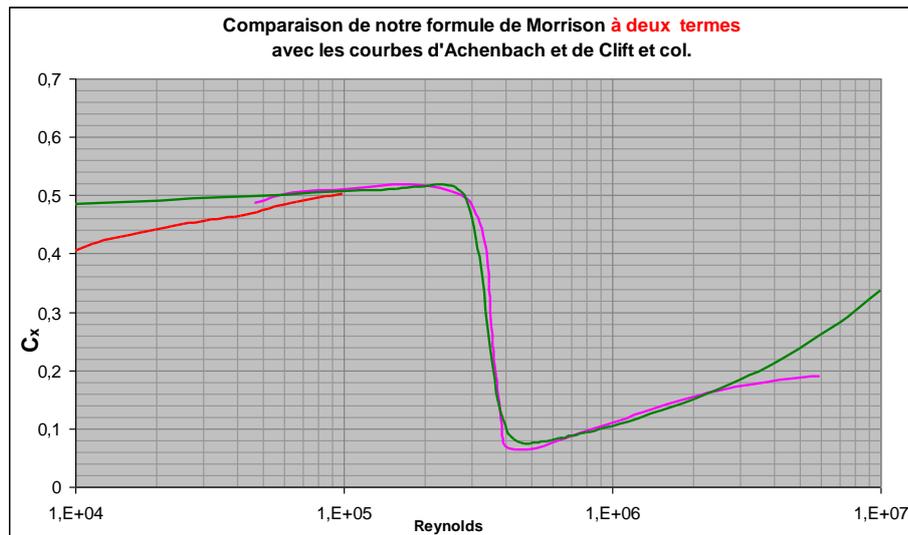
Cette formulation modifiée par nous reste valable sur toute l'étendue des Reynolds possible (autrement dit nos modifications ne touchent pas la partie non-aéronautique des Reynolds).

Cependant, en négligeant l'évolution des C_x en dehors de la plage aéronautique des Reynolds (10^4 à 10^7), nous sommes parvenus à obtenir la courbe suivante (en vert toujours) :



Ici les exposants **-7,94** et **-8** du troisième terme ont été modifiés.

Il faut d'ailleurs noter que, dans cette plage aéronautique, l'usage des seuls deux derniers termes (modifiés) donne le résultat suivant (courbe verte, comparée à la courbe fuchsia d'Achenbach) :



Cette courbe ne décroche vraiment du C_x mesuré par Achenbach qu'au-delà du Reynolds de **3 millions**.

Elle est également au-dessus du C_x de Clift, Grace et Weber (en rouge) pour les Reynolds inférieurs à $6 \cdot 10^4$ (ce Reynolds étant celui d'une sphère de **8,5 cm** à **10 m/s**, par exemple).

L'équation de cette courbe de Morrison simplifiée se présente alors comme suit :

$$C_x = \frac{0,47}{1 + \left[\frac{R_e}{340\,000} \right]^{15}} + \left[\frac{R_e^{0,51}}{11000} \right]$$

...ce qui, dans la langue de notre tableur, s'écrit simplement :

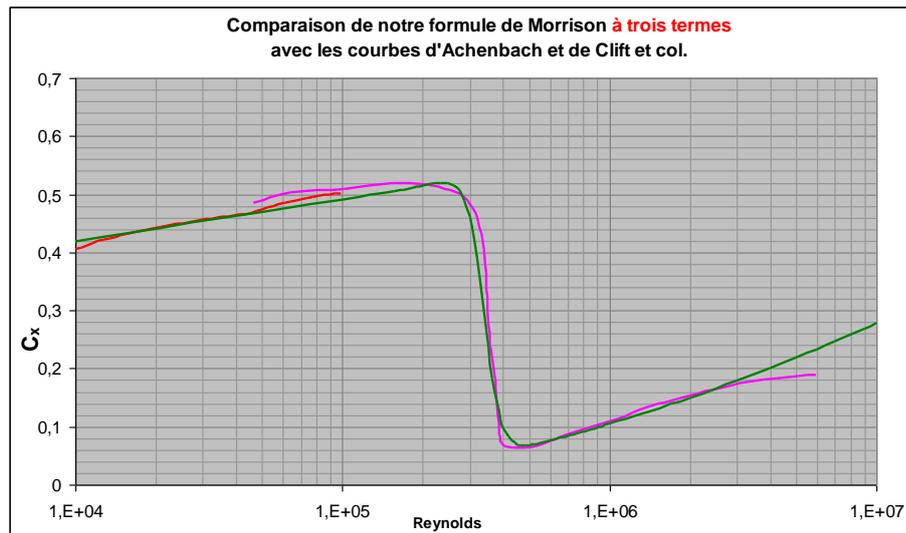
$$0,47 / (1 + (R_e / 340000)^{15}) + R_e^{0,51} / 11000$$

Il est amusant de noter que les modifications du paramètre **340 000** paraissent rendre compte de la rugosité de la sphère que nous étudierons plus bas (la valeur **340 000** correspondant à la sphère polie) : à la réflexion c'est normal puisque la chute de la courbe dans la zone critique se fait à une abscisse égale à ce paramètre (**340 000**, dans le cas de la sphère lisse). Cette particularité nous fait mieux sentir par quel moyen mathématique est réalisée cette chute...

Si l'on accepte une formulation à trois termes, on peut saisir dans un tableur le libellé :

$$= -0,213 + 0,023 * R_e^{0,19} + 0,494 / (1 + (R_e / 340000)^{14})$$

...qui dessine la courbe verte suivante :

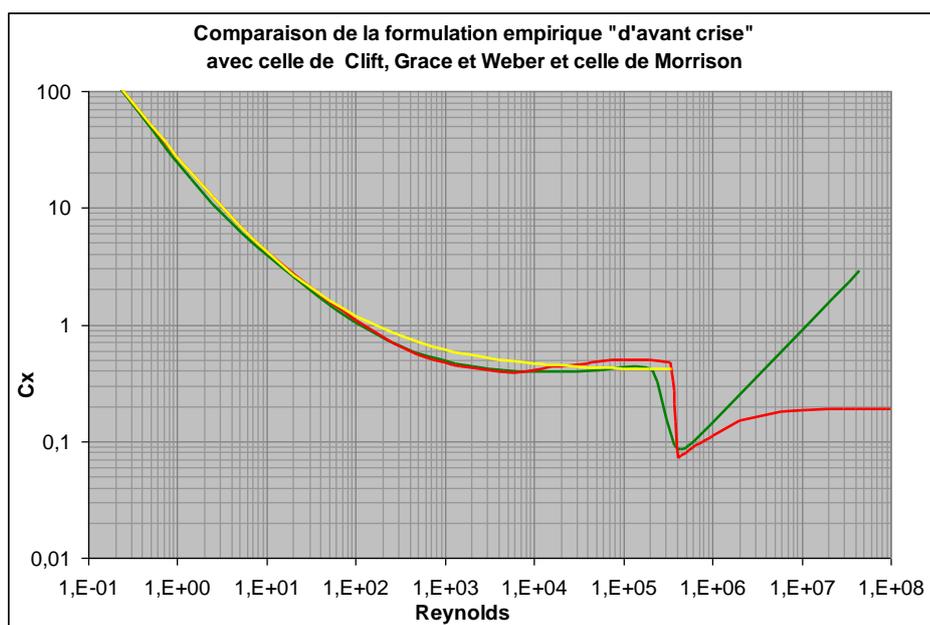


Nous n'avons guère poussé plus loin la réflexion sur cette formule de Morrison qui semble pourtant flexible à souhait. Il est manifeste que l'utiliser dans un logiciel (ou un tableur) sera toujours préférable au fait d'utiliser uniquement les deux C_x sous-critique et supercritique selon le Reynolds comme il est souvent pratiqué.

Rappelons encore au lecteur l'existence de formules empiriques donnant d'assez bons résultats depuis les Reynolds très faibles jusqu'aux abords de la crise du C_x , comme par exemple la relation de White :

$$C_x = 24/R_e + 6 / (1 + \sqrt{R_e}) + 0,4$$

Ce libellé dessine la courbe jaune ci-dessous, présentée à côté de celle de Clift, Grace et Weber (en rouge) et celle de Morrison (en vert) :



Les raisons de la crise du C_x de la sphère :

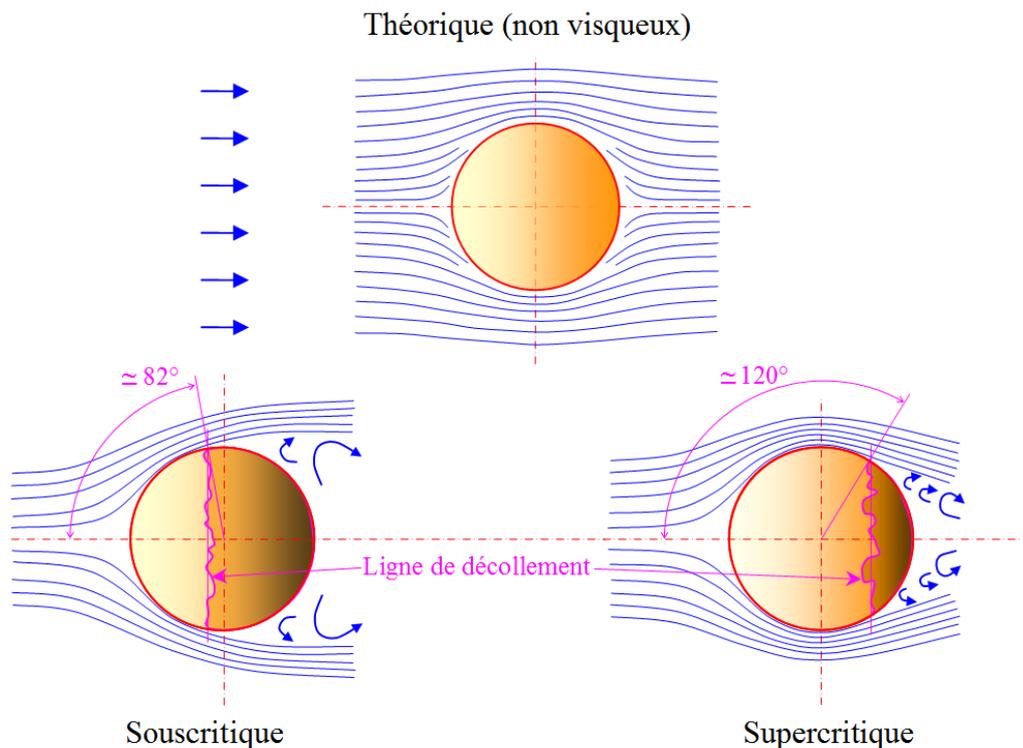
Nous avons déjà donné la principale explication de la brusque diminution du C_x de la sphère à un certain Reynolds : cette raison est la transition de la Couche Limite existant sur la sphère depuis le régime laminaire jusqu'au régime turbulent, ceci lors de l'augmentation du Reynolds.

Une qualité notable de la Couche Limite turbulente est qu'elle résiste beaucoup mieux au décollement que la Couche Limite laminaire.

Pour simplifier, on dit parfois que la Couche Limite turbulente se comporte comme si elle était plus visqueuse (elle colle mieux au corps).

Connaissant ce phénomène, on comprend mieux alors les représentations ci-dessous des différents régimes de la sphère parfaitement lisse :

LA SPHÈRE DANS SES TROIS RÉGIMES



L'écoulement en régime « théorique », qui est l'écoulement calculé d'un fluide parfait (donc *non visqueux*), n'est cité ici que pour mémoire puisque toutes les particularités de l'écoulement autour de la sphère (et autour de l'ensemble des corps fuselés 2D ou 3D) proviennent au contraire de la viscosité du fluide :

→ d'une part parce que cette viscosité est cause de l'existence d'une Couche Limite s'épaississant à mesure que l'on va vers l'arrière du corps (ce qui éloigne quelque peu l'écoulement de la forme sphérique prise en compte par le calcul théorique) ;

→ d'autre part et surtout parce que cette Couche Limite est le siège d'un décollement de l'écoulement, ce décollement éloignant encore plus l'écoulement de la forme idéale prise en compte par le calcul théorique).

Les deux [schémas du bas](#) représentent, quant à eux, la réalité (en fluide visqueux, donc) :

En régime souscritique, nommé également premier régime, l'écoulement se détache de la surface de la sphère à un angle polaire de 82° en moyenne (la ligne de décollement étant quelque peu irrégulière, comme représenté).

Dans ce régime, la Couche Limite qui se forme sur l'avant de la sphère (du point d'arrêt jusqu'à la ligne de décollement) est laminaire.

La région décollée de l'écoulement est occupée par de larges tourbillons.

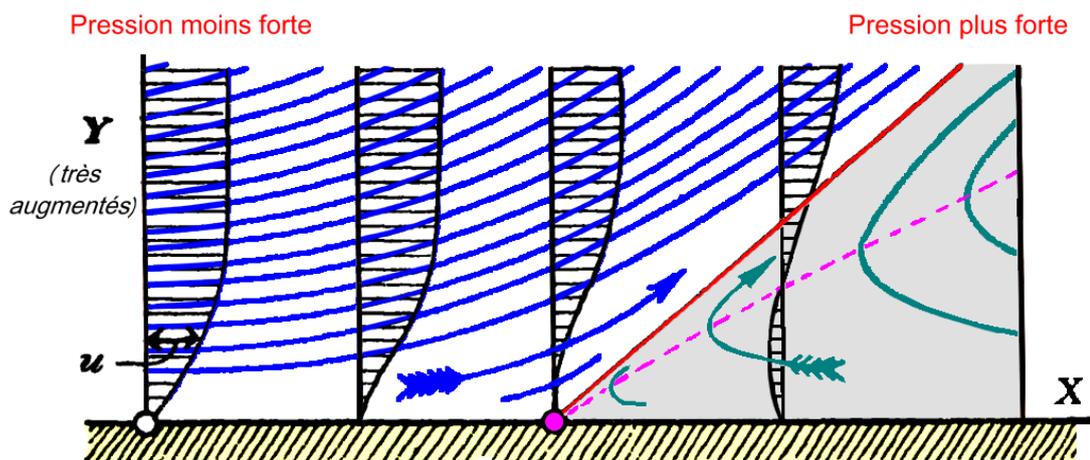
En régime supercritique, nommé aussi second régime, le Reynolds est suffisamment grand pour que la Couche Limite qui se développe à partir du point d'arrêt effectue sa transition depuis l'état laminaire jusqu'à l'état turbulent avant les 82° d'angle polaire qui caractérisent le premier régime. Cette Couche Limite turbulente résistant mieux au décollement, celui-ci est reporté plus en arrière, à un angle polaire moyen de 120° .

Il en résulte un décollement de section frontale nettement moindre.

Nous avons fait don à Wikipédia du schéma ci-dessus. On peut le télécharger [ici](#).

À ce point de notre texte, il est utile de rappeler très rapidement le comportement de la Couche Limite qui se forme autour des corps en mouvement dans un fluide (pour une réflexion plus profonde, nous renvoyons cependant nos lecteurs au début de [notre texte](#) consacré à la Couche Limite).

Voici dessiné en 1904 de la main-même de Ludwig Prandtl (mais mis en couleur par nos soins) le schéma expliquant le décollement de la Couche Limite (Couche Limite dont Prandtl venait d'inventer le concept) :



Page 487 du manuscrit d'époque, colorisé par nos soins : <http://www.mathunion.org/ICM/ICM1904/ICM1904.ocr.pdf>

Sur ce schéma on observe l'évolution de gauche à droite du profil des vitesses dans la Couche Limite, l'écoulement se faisant également de gauche à droite.

Nous avons traduit par *très augmentés* la mention allemande *vergrößert* (transcrit par *enlarged* dans le mémorandum [NACA 452](#) où le texte de Prandtl est

repris) : il s'agit bien sûr d'attirer l'attention sur le très fort agrandissement d'échelle des Y (nous y reviendrons).

Nous avons aussi ajouté en lettres rouges sur ce schéma les mentions "Pression moins forte" et "Pression plus forte", pour indiquer l'accroissement de la pression locale de l'écoulement quand on va de la gauche vers la droite.

Prandtl écrit en effet dans son texte de 1904 :

« La condition nécessaire pour qu'il se produise une séparation de l'écoulement est qu'il y ait une augmentation de pression le long de la surface du corps dans le sens de l'écoulement. »²⁶

Il précise également que la pression qui règne dans l'épaisseur de la Couche Limite (depuis son sommet jusqu'à la surface du corps, par exemple sur les normales colorisées par nous en orange sur le schéma) est constante et qu'elle vaut celle qui règne dans l'écoulement libre (au dessus de la Couche Limite, donc)²⁷

La pression sur les particules de fluide augmentant à mesure qu'elles s'écoulent vers la droite, on est donc dans la situation que, de nos jours, on nomme *gradient de pression adverse* (gradient *adverse* parce qu'il s'oppose au mouvement des particules de la Couche Limite).

Examinons avec la plus grande attention [ce schéma](#) de Prandtl qui allait changer le monde²⁸ :

À mesure que l'on va vers la droite, on peut voir que la base du profil de vitesse (schématisé en noir) se fait plus étroite : les particules de fluide les plus proches de la surface du corps perdent de leur vitesse du fait de la friction du corps et ceci bien que ces particules soient entraînées (par le dessus) par les autres particules de fluide dotées d'une vitesse un peu plus grande.

À une certaine abscisse x (celle du [rond fuchsia](#)), la base du profil de vitesse de la Couche Limite n'a plus d'épaisseur : les particules de fluide les plus proches du corps ont perdu toute vitesse.

Pour une nouvelle progression en abscisse vers la droite, la vitesse des particules de fluide les plus proches du corps s'inversent : il y a ce que l'on appelle *recirculation de fluide* à partir de l'aval (flèche et lignes de couleur [glauque](#) dans le volume grisé par nous) et donc décollement de l'écoulement selon la ligne de courant oblique rouge qui prend naissance au rond fuchsia (ce rond fuchsia constituant le point de *décollement* ou de *séparation*).

Cette ligne oblique rouge est une ligne de courant ; elle sépare l'écoulement *régulier* ou *principal* (venant de l'avant du corps) de l'écoulement de recirculation (grisé) en provenance du culot (ou piégé dans le volume de recirculation). On appelle cette même ligne de courant rouge la *ligne séparatrice*.

Le volume de recirculation (ou *d'eau morte*) que nous avons grisé peut être rendu visible par l'introduction de fumées ou de colorant au culot du corps ; c'est que l'on voit sur les images déjà présentées réalisées par [Werlé](#) ou à [Göttingen](#).

²⁶ « Wie eine nähere Diskussion ergibt, ist die notwendige Bedingung für das Ablösen des Strahles die, daß längs der Wand in der Richtung der Strömung eine Drucksteigerung vorhanden ist. »

²⁷ « Die Druckverteilung wird unserer Übergangsschicht von der freien Flüssigkeit aufgeprägt. »

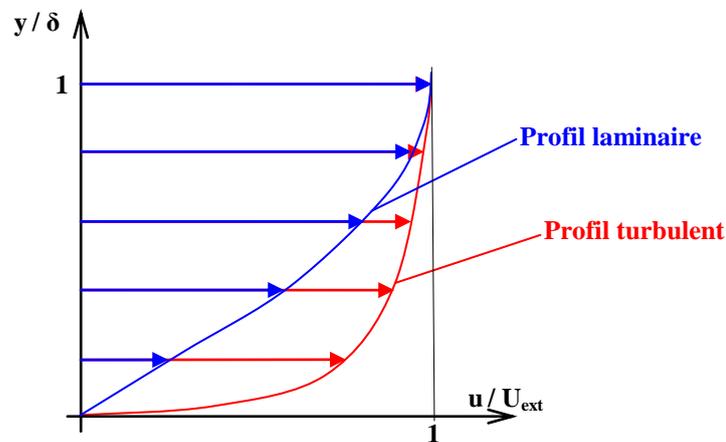
²⁸ D'ailleurs très lentement car il fallut attendre 20 ou 30 ans pour que cette découverte soit admise par l'ensemble des mécaniciens des fluides...

La ligne [tirée fuchsia](#) correspond à l'inversion des vitesses (vers l'amont du corps ou vers l'aval) dans ce volume de recirculation.

Il faut encore remarquer que le volume occupé par la *recirculation* du fluide constitue un obstacle pour l'écoulement *principal* qui doit alors le contourner (flèche et lignes de courant [bleu dense](#)) : ce volume de recirculation augmente donc le volume du corps tel qu'il est vu par l'écoulement, comme c'est le cas pour la sphère en son [premier régime](#).

Dans ce [schéma de 1904](#), Prandtl ne précise pas si la Couche Limite dessinée est laminaire ou turbulente. Pour ce cas précis ce n'est pas important, mais il est instructif de remarquer qu'il existe une grande différence de profil entre les deux types de Couches Limites.

Voici une comparaison des profils des Couches Limites laminaire et turbulente, ces deux Couches Limites étant censées posséder la même épaisseur δ et la même vitesse U_{ext} en leur sommet (soit $y/\delta = 1$ et $u/U_{\text{ext}} = 1$) :

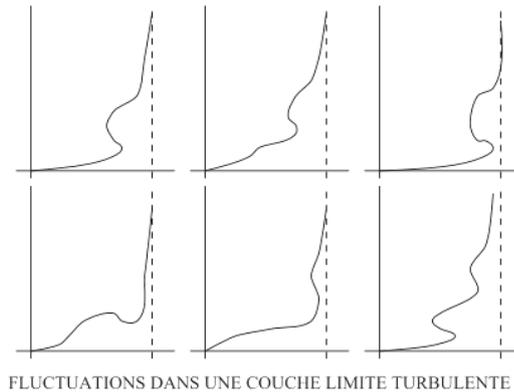


Ainsi qu'on le voit, le profil de la Couche Limite turbulente (en rouge) est beaucoup plus "plein" que celui de la Couche Limite laminaire. Chose importante, la tangente à sa base en ressort comme beaucoup plus horizontale. Or l'angle de cette tangente est directement lié à la friction qu'exerce la Couche Limite sur la surface du corps : la Couche Limite turbulente exerce donc une friction notablement plus forte que sa consœur laminaire ²⁹.

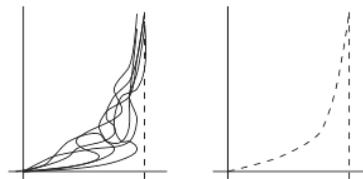
Nous venons de présenter une comparaison des profils des Couches Limites laminaire et turbulente, mais il est nécessaire de dire que le profil de la Couche Limite turbulente est un profil moyen, puisque cette Couche Limite est animée de fortes turbulences en son sein.

À titre d'exemple, citons le [chapitre 4](#) du module 1 de l'UEE d'Arts & Métiers ParisTech qui donne ces représentations du profil de vitesse dans la Couche Limite turbulente à des instants espacés régulièrement dans le temps puis réunies dans le même schéma :

²⁹ Nous donnons les courbes des coefficients de friction des Couches Limites laminaire et turbulente dans notre grand texte sur les [Corps d'Eiffel](#).



FLUCTUATIONS DANS UNE COUCHE LIMITE TURBULENTE



NOTION D'ÉCOULEMENT MOYEN

Les auteurs notent :

«L'évolution de l'écoulement [dans la Couche Limite] semble aléatoire.

Cependant, si on superpose ces profils successifs, on peut faire apparaître un profil de vitesse moyen autour duquel l'écoulement fluctue au cours du temps. »

C'est ce profil moyen que les mécaniciens des fluides retiennent donc pour définir la Couche Limite turbulente.

Il s'avère que ce profil moyen (plus plein que celui de la Couche Limite laminaire) rend la Couche Limite turbulente plus résistante aux décollements : on dit souvent que ses particules disposent de plus d'Énergie Cinétique pour lutter contre un gradient de pression adverse qui s'oppose à leur déplacement dans le sens de l'écoulement.

Ceci est donc l'explication physique du comportement de la Couche Limite turbulente face au décollement ; mais, de l'extérieur, et ainsi que nous l'avons déjà dit, tout se passe comme si la Couche Limite turbulente était *plus visqueuse*, comme si elle *collait mieux* au corps.

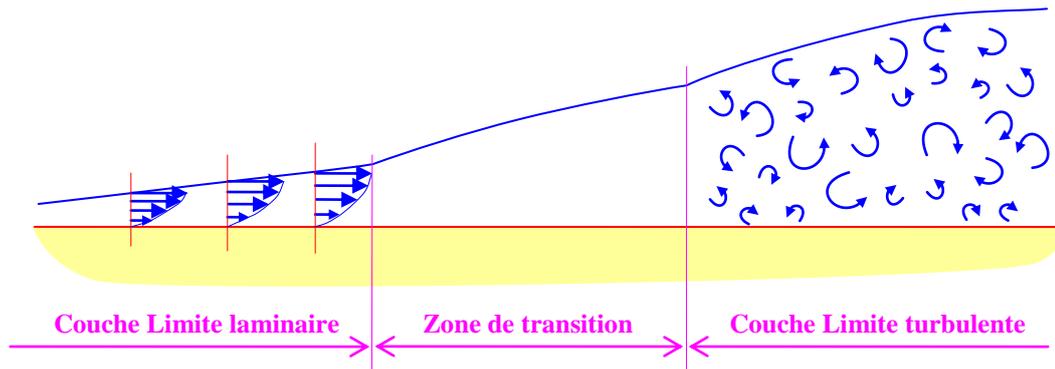
Cette particularité explique que l'écoulement sur la sphère décolle plus tard (en angle polaire compté depuis le point d'arrêt) lorsque l'accroissement du Reynolds a fait que la Couche Limite est passée en régime turbulent : c'est ce report du décollement vers le culot qui provoque la forte diminution du C_x de la sphère.³⁰

Le destin d'une Couche Limite laminaire est toujours de devenir turbulente, au bout d'une certaine longueur d'écoulement (ou plus exactement à un certain Reynolds *local*³¹), même sur un corps non soumis à un gradient de pression.

Sur un tel corps non soumis à gradient de pression (la plaque plane placée parallèlement à l'écoulement, par exemple) on peut donc schématiser le comportement de la Couche Limite comme suit :

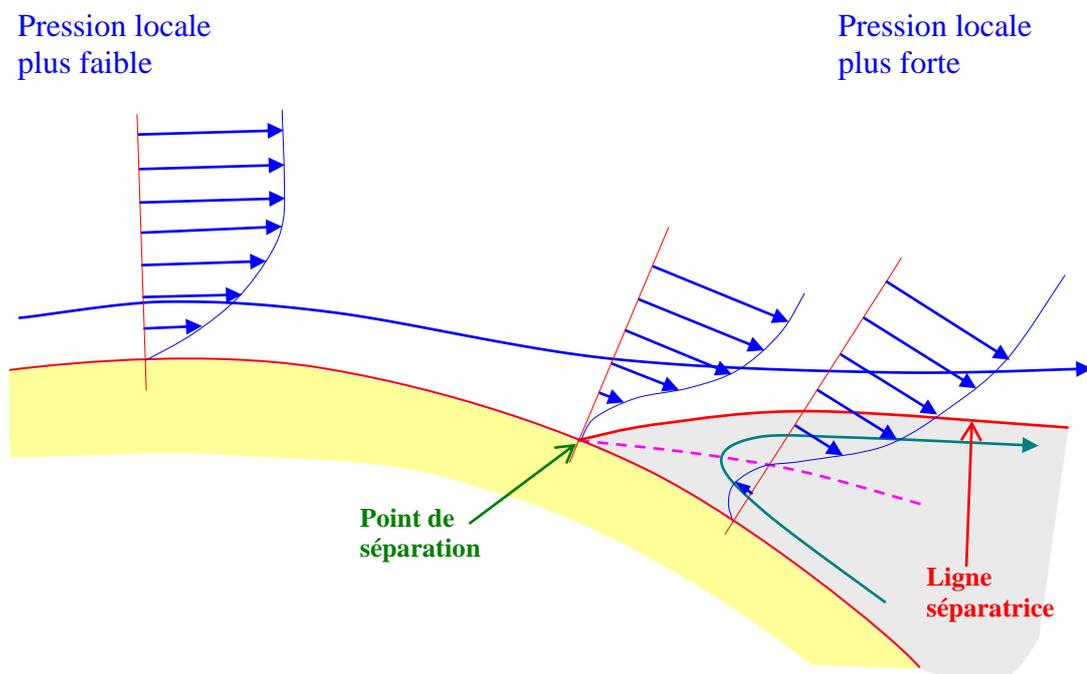
³⁰ Nous nous répétons volontairement.

³¹ Le Reynolds *local* étant basé sur la longueur de l'écoulement depuis le point d'arrêt.



La zone de transition est le siège d'un écoulement intermédiaire entre l'écoulement laminaire et turbulent qui fait l'objet de nombreuses recherches et sur lequel nous serions en mal de nous attarder.

En 2004, soit cent ans après que Prandtl ait proposé [son schéma](#) expliquant le décollement de la Couche Limite), Kundu et Cohen, cités par DongHun Yeo et Nicholas P. Jones³², proposent un schéma très peu différent de celui de Prandtl pour le décollement sur le cylindre :



Nous avons ajouté à ce schéma les mentions "Pression locale plus faible" et "Pression locale plus forte", ces *pressions locales* étant celles données par la distribution des pressions sur le corps (et on se souvient que la pression locale existant au sommet

³² COMPUTATIONAL STUDY ON 3-D AERODYNAMIC CHARACTERISTICS OF FLOW AROUND CHARACTERISTICS OF FLOW AROUND A YAWED, INCLINED, CIRCULAR CYLINDER, DongHun Yeo & Nicholas P. Jones

de la Couche Limite se transmet intégralement dans l'épaisseur de la Couche Limite jusqu'à la surface du corps lui-même³³.

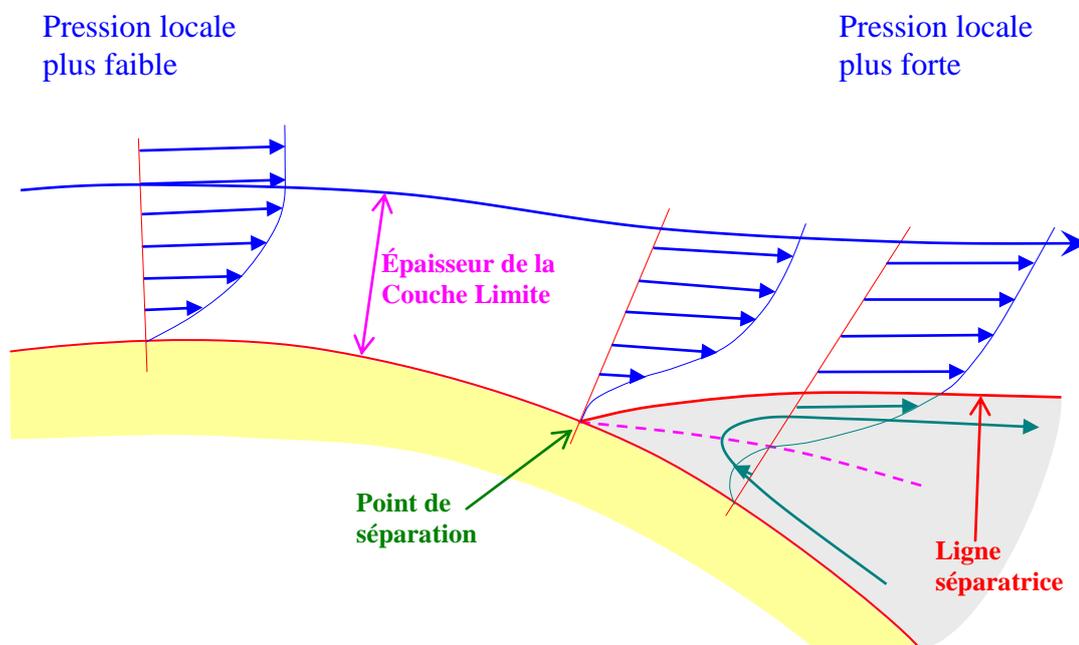
Nous avons également coloré en gris clair le volume de recirculation entre la ligne de séparation et la surface du corps.

Dans leur schéma, contrairement à Prandtl, Kundu et Cohen ont cependant donné une courbure au corps afin d'expliquer l'existence d'un gradient de pression.³⁴

Ce dessin pose d'ailleurs un problème car le profil de vitesse le plus à droite semble indiquer que les vitesses locales passent à travers la *ligne séparatrice*, ligne qui est la frontière entre l'écoulement principal et l'écoulement de recirculation.

Ce problème de représentation est entièrement dû au fait que l'échelle indiquant la courbure du corps est ici beaucoup exagérée par rapport à l'épaisseur de la Couche Limite (qui est inférieure au millimètre pour une sphère de **10 cm** de diamètre à **55 m/s**, soit moins que **1 %** du diamètre).

En tout état de cause, il est cependant sans doute préférable, d'un point de vue pédagogique, de représenter les choses comme ci-dessous :



Nous nous autorisons, pour cette proposition, d'un schéma équivalent de T. Gillespie³⁵ qui a donc eu le même scrupule pédagogique que nous.

Il faut cependant garder en mémoire dans toutes ces réflexions que la frontière de la Couche Limite n'est pas étanche : au contraire, les équations prouvent que cette frontière est le siège d'un faible débit (cette remarque vaut pour la ligne bleu dense, frontière de la Couche Limite)...

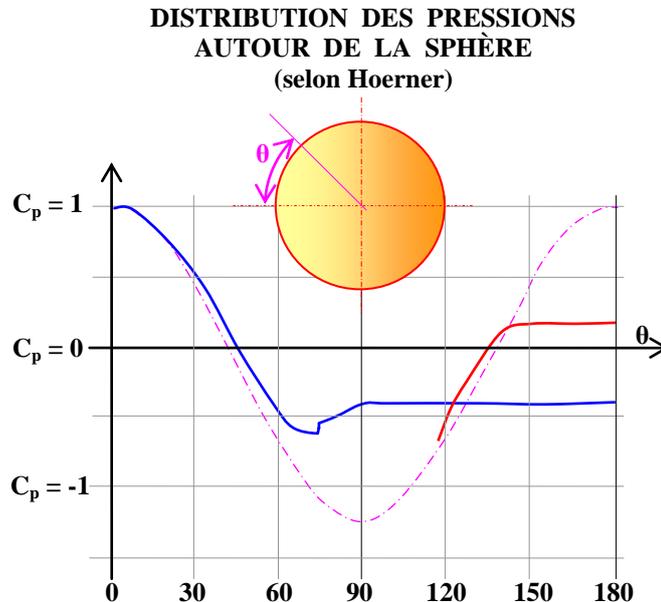
³³ ...surface du corps où elle est d'ailleurs généralement mesurée à travers des trous de faibles diamètres...

³⁴ Prandtl n'avait pas dessiné la courbure du corps mais signalait l'existence d'un gradient de pression. Ce gradient de pression peut d'ailleurs être obtenu sur une plaque sans courbure dans une soufflerie « à gradient de pression ».

³⁵ T. Gillespie, Fundamentals of vehicle Dynamics, SAE, 1992

À propos des gradients de pression sur les corps 3D :

Il est possible que certains de nos lecteurs soient peu au fait de cette notion de gradient de pression ou plus simplement d'évolution des pressions sur un corps ; pour cette raison il est donc utile de présenter les relevés de la pression locale effectués par Hoerner (fig. 9, p. 44 de [Drag](#)) sur la sphère à ses deux régimes :



Les abscisses sont les angles θ mesurés depuis le point d'arrêt, de la façon indiquée en fuchsia.

En fuchsia également est la distribution théorique des pressions, calculée en fluide non-visqueux.³⁶

En bleu est la distribution mesurée des pressions en souscritique et en rouge celle mesurée en supercritique.

Hoerner écrit, dans le [mémoire NACA N° 777](#) :

« Dans la plage critique des Reynolds, la pression qui prévaut à l'arrière de la sphère se hisse d'une valeur souscritique négative de $-0,32 q$ [q étant la pression dynamique] à une valeur supercritique positive de $0,2$ à $0,3 q$. Le coefficient de traînée chute conséquemment de $0,47$ à $0,06$ ou $0,10$. »³⁷

On note ici que pour Hoerner la pression de culot atteint, en supercritique, des valeurs positives.

Cette positivité des pressions de culots avait été constatée par lui dès 1935 à l'occasion de mesures sur avion Junker W 34 en vol par air calme :

³⁶ ...suivant la formulation $C_p = 1 - \frac{9}{4} \sin^2(\theta)$ et non $1 - 0,5 \sin^2(\theta)$ comme indiqué par coquille sur le graphe d'Hoerner.

³⁷ "In the critical range of R the pressure prevailing at the back of the sphere rises from negative subcritical (relative to undisturbed flow) at around $0.32 q$, to positive supercritical: 0.2 to $0.3 q$. The drag coefficient [C_D] drops correspondingly from about 0.47 to $0.[0]6-0.10$."

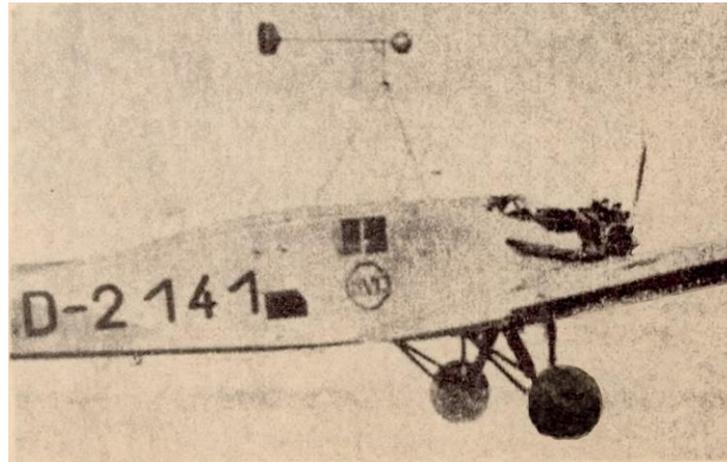
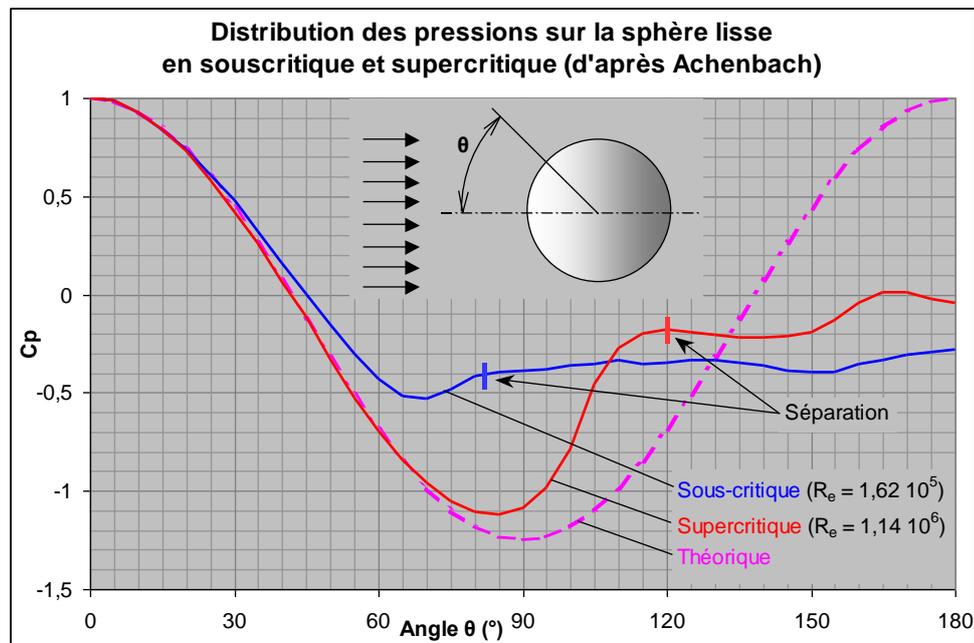


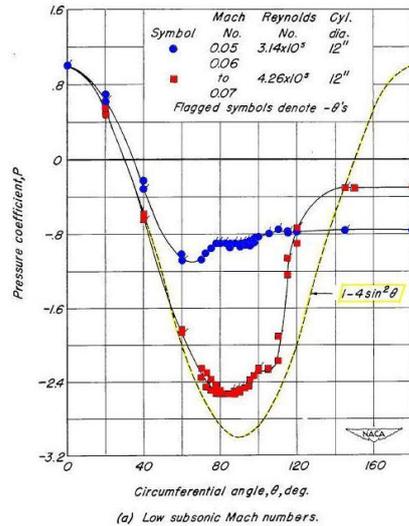
Image tirée du NACA TM 777

Il ne semble pas cependant que les auteurs plus récents (dont Achenbach) aient mesuré (en soufflerie, cette fois) de telles pressions positives au culot de la sphère en régime supercritique (courbe rouge, ci-dessous) :



Il est difficile, à notre niveau, de trancher, mais on peut voir dans ce désaccord entre grands auteurs une résurgence des sempiternels problèmes de contention de la sphère dans les souffleries et de turbidité de celles-ci (problèmes que nous aborderons plus bas).

Sur ce même point de la pression de culot en supercritique, il peut être utile de prendre acte de la distribution des pressions sur le cylindre, corps dont la contention en soufflerie est beaucoup plus aisée (elle se fait par ses extrémités) :



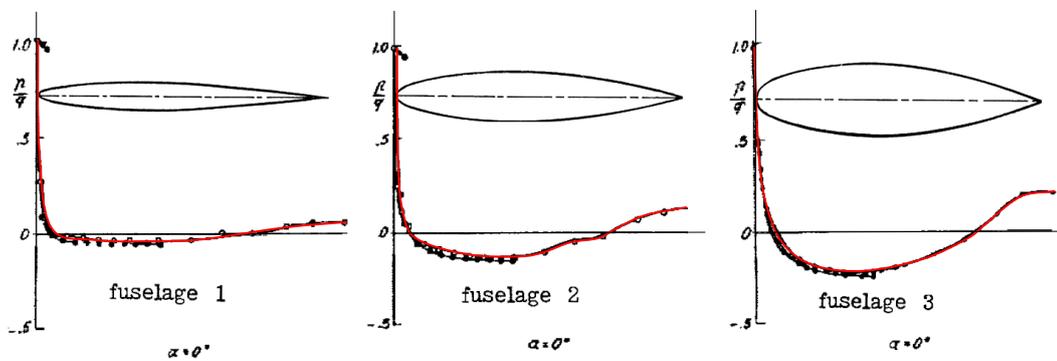
17
NACA TR 2960
DRAG OF CIRCULAR CYLINDERS FOR A WIDE RANGE OF REYNOLDS NUMBERS AND MACH NUMBERS
By Forrest E. Gowen and Edward W. Perkins
Ames Aeronautical Laboratory
Moffett Field, Calif.

(a) Low subsonic Mach numbers.
Figure 5.—Circumferential distributions of pressure coefficient for circular cylinders at various Reynolds numbers and Mach numbers.

En rouge sur ce graphe est la distribution des pressions en supercritique (et toujours en jaune la distribution de pression calculée par la Théorie en fluide non-visqueux).

Dans ce cas du cylindre, la pression de culot supercritique (palier à droite de la courbe rouge) n'atteint pas une valeur positive, mais il est cependant entendu que l'amplitude des variations de pression sur un corps 2D comme le cylindre est par principe plus forte que sur les corps 3D (pression de culot $-2,5 q$ pour le cylindre au lieu de $-1,1 q$ pour la sphère) ce qui rend le recouvrement de la pression plus difficile au culot du cylindre.

Pour ce qui est à présent des pressions sur la face avant de la sphère (pour un angle θ inférieur à 90°), il peut être utile de noter qu'à notre sens leur minimum est d'autant moins marqué que le corps est suivi par un plus fort volume de recirculation : Ce volume de recirculation vient en quelque sorte caréner le culot de la sphère, ce qui produit classiquement le résultat de diminuer l'importance (en valeur absolue) de sa pression minimale. À ce sujet il faut se référer à tous les corps carénés qui connaissent des pressions minimales d'autant plus marquées qu'ils sont plus épais, relativement à leur longueur :



Pressure-distribution record

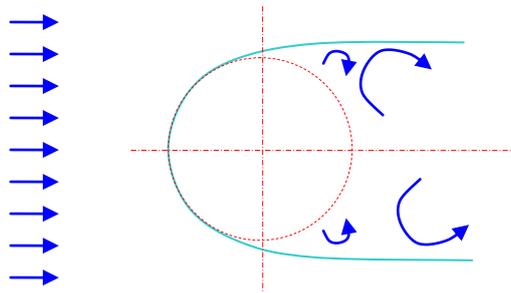
(les courbes rouges dessinent les coefficients de pression mesurés sur ces corps, les courbes noires dessinant les coefficients de pression calculés)

À cette aune, l'élanement de la sphère est à prendre non pas à l'unité (comme sa forme théorique y invite), mais à une plus forte valeur. On ne doit alors pas s'étonner que sa dépression maximale atteigne des valeurs de $\approx 0,5$ en souscritique où la sphère est fortement carénée par son volume de recirculation et $\approx 1,1$ en supercritique où elle est moins carénée par un volume de recirculation plus petit.

Hoerner signale dans son ouvrage [Drag](#) qu'en supercritique, la distribution des pressions sur la sphère ([trait rouge](#)) se place plus près de celle déterminé par le calcul théorique en non-visqueux ([trait mixte fuchsia](#)).

Pour ce qui est des pressions en souscritique ([trait bleu](#)), à notre sens, dès lors que l'on sait que l'écoulement se détache de la sphère pour former un large volume de recirculation (ainsi que nous l'avons déjà observé sur [ce schéma](#)), on pourrait opérer un repli stratégique vers la comparaison des pressions réelles avec les pressions théoriques calculées sur un corps présentant la forme extérieure :

- de la sphère (pour sa partie avant jusqu'à l'angle $\theta = 82^\circ$),
 - et de l'enveloppe extérieure de son volume de recirculation réel tel qu'on l'observe en souscritique,
- ...ce corps pouvant être représenté par la ligne bleu clair ci-dessous :



L'enveloppe extérieure du volume de recirculation constitue en effet un carénage (que l'on qualifie parfois de *tapis roulant*) pour l'écoulement principal...

Si le calcul théorique des pressions sur un tel corps (qui dépasse malheureusement de loin nos compétences) n'est pas possible, il serait à tout le moins intéressant de construire le corps de révolution défini ci-dessus par la génératrice bleu clair et de le présenter dans une soufflerie afin de mesurer les pressions de l'écoulement à sa surface. Ce corps restant continument croissant dans sa partie avant (disons sur deux diamètres de la sphère), il ne serait l'objet d'aucun décollement. C'est bien la comparaison de sa distribution de pression avec celle de la sphère au premier régime (souscritique) qui serait, nous semble-t-il, intéressante, au moins dans sa partie avant...

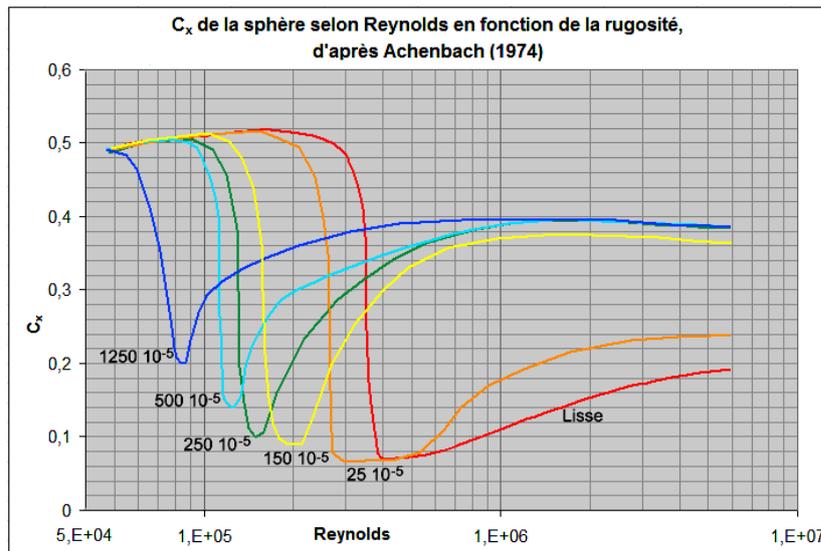
On peut trouver un autre exemple de *carénage fluide* d'un corps dans l'image que nous montrons [plus bas](#) : le carénage de révolution des deux dards les plus bas sur l'image reprend la forme extérieure des fuseaux de gaz de combustion des deux boosters de la navette spatiale états-unienne : C'est logique dans la mesure où l'écoulement d'air sur cette navette doit contourner ces deux énormes sources de gaz...

Influence de la rugosité de la sphère sur son C_x :

Achenbach, en plus de [son texte](#) déjà exploité par nous, a réalisé un [très utile travail](#) de relevé de C_x de la sphère selon la rugosité relative de sa surface.

Cette rugosité relative est définie classiquement comme le quotient de la hauteur moyenne des aspérités sur le diamètre de la sphère ³⁸, toute la surface de la sphère ayant bien-sûr été rendue rugueuse.

Voici les courbes relevées par Achenbach, dans une soufflerie dont il convient de rappeler qu'elle était extrêmement peu turbulente :



Bien que ces courbes révèlent une certaine irrégularité d'échelonnement en abscisse (spécialement pour le début de crise ³⁹), l'anticipation de cette crise du C_x due à la rugosité apparaît nettement, avec une rehausse progressive du point bas des courbes (que l'on peut attribuer à l'augmentation de friction due à la rugosité).

De ce point de vue particulier, il est curieux que la partie souscritique de toutes les courbes rejoigne la partie souscritique de la courbe rouge (celle de la sphère lisse) : l'influence de la rugosité ne se fait donc guère sentir en souscritique, ce qui doit être pris comme un encouragement à forcer au besoin la transition de la Couche Limite par des dispositifs rugueux.

Remarquons que la plus faible rugosité relative (courbe orange) a été obtenue en rayant une sphère lisse avec du papier émeri. Ce mode d'obtention de la rugosité met peut-être cette courbe orange un peu à l'écart des autres.

Achenbach note dans son texte que les C_x supercritiques (le point bas des courbes) sont régulièrement espacés et il en tire une courbe assez seyante (voir [son texte](#)).

³⁸ Il est classique, pour définir une rugosité relative de prendre ce quotient de la hauteur moyenne des aspérités (des sommets jusqu'au fond des creux) par la dimension caractéristique du corps, mais on doit noter qu'un sentiment plus rigoureux aurait enclin à prendre la demi hauteur moyenne des aspérités (la moitié de la distance entre un sommet et un creux) de la même façon qu'on définit l'amplitude d'une vibration. Achenbach a rendu rugueuse quatre de ses sphères en collant dessus des microbilles de verre de diamètre k . C'est ce diamètre k qui forme le numérateur de la rugosité relative k/D .

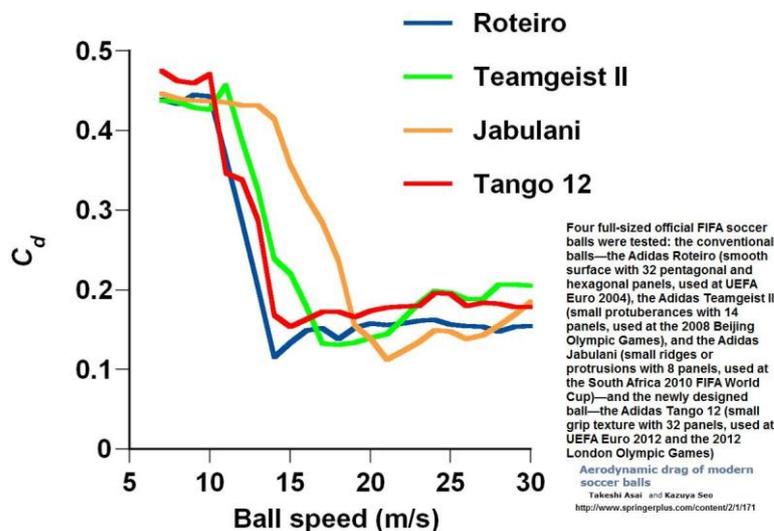
³⁹ On serait bien en mal de pronostiquer la crise d'une sphère de rugosité $2500 \cdot 10^{-5}$, par exemple...

Il est également notable que les C_x *postcritiques*⁴⁰ des quatre autres courbes se rejoignent à peu près (au delà du Reynolds **un million**), même si c'est à un C_x qui vaut le double de celui de la sphère lisse (la courbe orange se tenant encore à part).

Et les sphères de sport ?

Certains lecteurs seront venus à notre texte par le désir de comprendre le comportement des balles et ballons de sports. Pour les renseigner sur ce sujet, nous pouvons les renvoyer vers le texte [Aerodynamic drag of modern soccer balls](#) des japonais Takeshi Asai et Kazuya Seo.

Voici le graphe, établi en soufflerie par ces chercheurs, indiquant le C_x de quatre types de ballons de football Adidas de fabrications différentes :



Les deux auteurs indiquent que le *Reynolds critique*, c.-à-d. le Reynolds en dessous duquel le C_x commence à croître⁴¹ lorsque la vitesse du ballon diminue, est :

$2,2 \cdot 10^5$, $C_x = 0,12$, pour le ballon Roteiro

$2,8 \cdot 10^5$, $C_x = 0,13$, pour le ballon Teamgeist II

$3,3 \cdot 10^5$, $C_x = 0,11$, pour le ballon Jabulani

$2,4 \cdot 10^5$, $C_x = 0,15$, pour le ballon Tango 12

Ces mesures du C_x de ces ballons sont effectuées ballon fixe (donc non doté de rotation), comme on le devine ci-dessous :

⁴⁰ Nous préférons utiliser ce mot *postcritique* que celui de *transcritique*. Bien sûr, le préfixe *trans* possède en français le sens de *au-delà* (comme dans *transalpin*), mais il possède aussi le sens *à travers* (comme dans *transparent*), ce qui fait que *transcritique* peut être compris de façon erronée comme *à travers la zone critique* et donc *dans* la zone critique.

⁴¹ Cette définition du R_c critique est aussi celle d'Achenbach. Elle peut prêter à confusion et on doit veiller à ne pas nommer *critique* le Reynolds à partir duquel le C_x décroît (quand la vitesse augmente, pour un même corps).



<http://www.springerplus.com/content/2/1/171>

© 2013 Asai and Seo; licensee Springer.

Dans sa thèse, [Jeffrey Ryan Kensrud](#) dresse un tableau presque complet du C_x de certaines balles de sports en comparaison avec celui établi par Achenbach pour la sphère lisse (trait noir) :

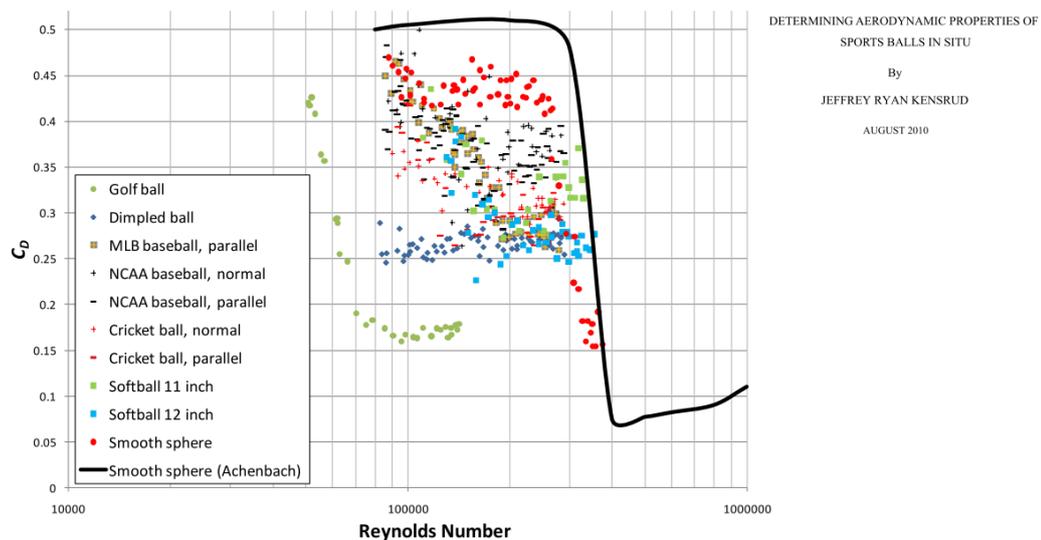
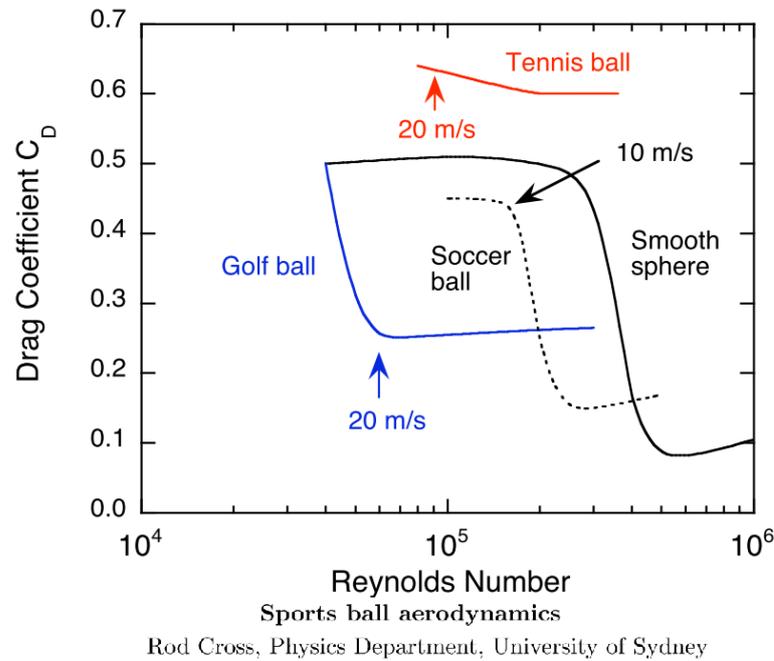


Figure 4.48 - Drag curve for all balls tested

Toutes ces marques se placent logiquement sous l'aile de la courbe d'Achenbach, bien qu'on aurait pu s'attendre à ce qu'en souscritique, certaines se placent au-dessus du C_x de $\sim 0,5$ de la sphère lisse (du fait de la rugosité des coutures et l'irrégularité de forme de certaines balles).

Les marques rondes vertes représentent le C_x d'un certain type de balles de golf (toutes les balles de golf ne présentent pas les mêmes alvéoles). Il est visible que, du fait de leurs alvéoles, ces balles font leur crise de C_x bien avant les autres balles.

Rod Cross, de l'Université de Sydney, dans [Sports ball aerodynamics](#), donne quant à lui le tableau suivant du C_x des balles de golf, de tennis et de football ("Soccer ball"), toujours en comparaison avec une courbe qui ressemble à celle d'Achenbach :



Le graphe comporte certaines indications de vitesses puisque la connaissance du diamètre de ces balles permet de chiffrer leur vitesse à un certain Reynolds.

Le comportement des balles de tennis (en rouge) apparaît comme atypique : Ces balles, imposées par les instances de ce sport pour limiter la vitesse des services, semblent présenter un plus fort C_x que toutes les autres et il en est déduit par les chercheurs que leur revêtement velu les place en régime *postcritique*⁴², régime où la Couche Limite est passée en turbulent sur toute la surface de la balle et où, conséquemment le C_x n'est plus sujet à l'influence du Reynolds. Le $C_x \approx 0,6$ de ces balles (par rapport au C_x de $0,4$ auquel la courbe d'Achenbach déjà montrée ferait penser) est attribué par les mêmes chercheurs à la Traînée propre des poils de feutre⁴³.

Ce passage très anticipé en régime *postcritique* nous semble un comportement très isolé dans le paysage des balles de sports, mais il n'empêche pas, comme on le sait, les joueurs de tennis de mettre en œuvre de très efficaces effets Magnus pour obtenir des trajectoires courbes et relativement imprévisibles pour leurs adversaires.

L'étude dudit effet Magnus ne rentre cependant pas dans le cadre de notre texte.

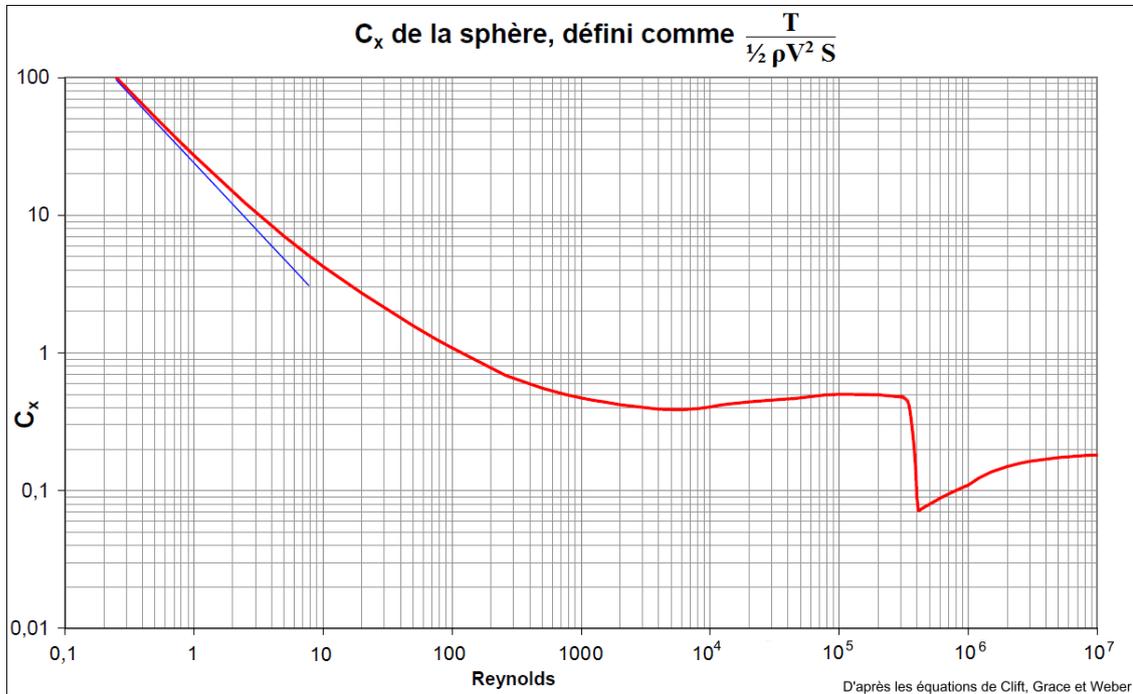
⁴² Par *postcritique*, nous voulons signifier que le Reynolds a nettement dépassé la zone critique ; certains auteurs utilisent le terme *transcritique*, au risque de créer une confusion avec la zone critique où le C_x varie fortement.

⁴³ La légère baisse du C_x avec l'augmentation du Reynolds serait due au fait que les poils se courbent sous l'effet de la vitesse...

La courbe générale du C_x de la sphère :

Armé des réflexions précédentes, il est légitime de faire tracer à notre tableur la courbe générale du C_x de la sphère sur une très large plage de Reynolds.

Le mérite de notre tableur est d'ailleurs faible puisque le tracé reprend les dix équations de Clift, Grace et Weber déjà énoncées [plus haut](#) par nous :



Seul l'arrondi de la courbe avant la chute critique (au Reynolds $3 \cdot 10^6$) est de notre fait : il adoucit l'entrée dans cette zone critique que les équations de Clift et coll. [dessinent](#) parfaitement aigüe.

Le titre du graphe rappelle la définition du C_x , ce que nous croyons opportun puisque certaines diatribes se développent de loin en loin sur le Web à propos de l'évolution quadratique du C_x en fonction de la vitesse : Nous avons [déjà](#) eu l'occasion de préciser que dans les bas Reynolds (inférieurs à $0,1$ ou 1 selon la précision requise par le calcul) le C_x évoluait proportionnellement à la vitesse et non à son carré mais que le C_x tel que défini dans le titre reste valide dès lors que pour connaître la traînée d'un sphère, même dans cette zone des bas Reynolds, on multiplie bien ce C_x par $\frac{1}{2} \rho V^2$ et par la surface frontale $\pi D^2/4$ de cette sphère.

Dans le désir de partage de la connaissance qui nous anime (et que le lecteur aura subodoré), nous avons fait don de ce graphe à Wikipédia. On le trouve à [ce lien](#).

Les difficultés des mesures du C_x de la sphère :

De telles courbes de C_x sont difficiles à relever : la crise de la sphère se produit dans nos souffleries à un Reynolds très dépendant de la rugosité de ce corps, bien sûr, mais surtout de la turbidité de l'écoulement (sa turbulence).

Si le premier critère, la rugosité peut être facilement éliminé en donnant à la surface de la sphère un poli parfait (dit *aérodynamique*), c'est par le deuxième critère

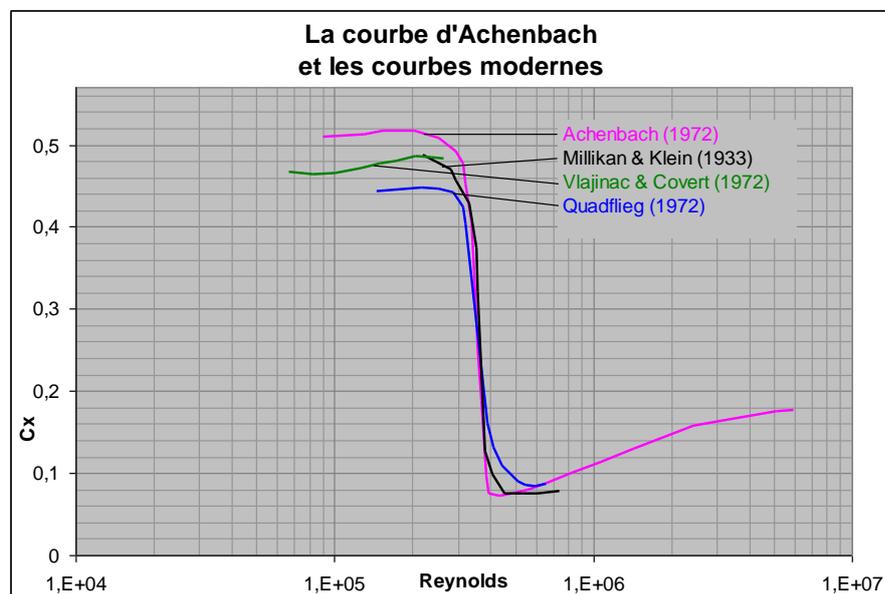
que les résultats des aérodynamiciens ont souvent péché : il reste toujours dans les souffleries un reste de turbidité, aussi faible soit-il, qui déclenche de façon anticipée la crise de la sphère et la déplace donc vers les Reynolds plus faibles.

Le meilleur travail qui ait été produit à ce sujet est celui d'[Achenbach](#) (en 1972 puis 1974) à des Reynolds courant de $5 \cdot 10^4$ à $6 \cdot 10^6$.

Ce chercheur utilisa pour ses mesures la soufflerie pressurisée de l'Institut für Reaktorbauelemente, Kernforschungsanlage Jülich, en Allemagne.

Lesdites mesures furent effectuées à une vitesse de **15 m/s** mais à une pression montant jusqu'à **40 atmosphères**, le taux de turbulence de l'écoulement restant inférieur à **0,45 %**.

Ce faible taux de turbulence peut être comparé avec celui rencontré par des sphères en chute libre et, de fait, Achenbach a obtenu des résultats comparables à ceux, obtenus en vol **39** années plus tôt par Millikan et Klein :



(nous avons déjà présenté ces courbes dans notre étude de la courbes analytico-empirique de Clift et collaborateurs)

Une autre source d'erreurs est le mode de contention de la sphère. Les mesures en soufflerie sur des corps *non refermés* (comme les fusées, ou les avions à réaction en phase propulsée, par exemple) se font à l'aide de dards reprenant la forme des fuseaux de gaz enflammés à l'origine de leur propulsion :



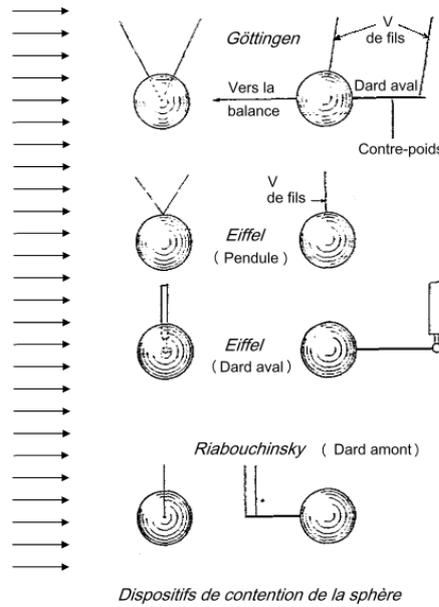
D'après Wikipédia



Mais on ne peut faire de même avec des corps fermés comme la sphère ou les corps profilés 3D. ⁴⁴

Voici différents modes de contention de la sphère utilisés dans l'histoire (le vent vient de la gauche, comme l'indiquent nos flèches) :

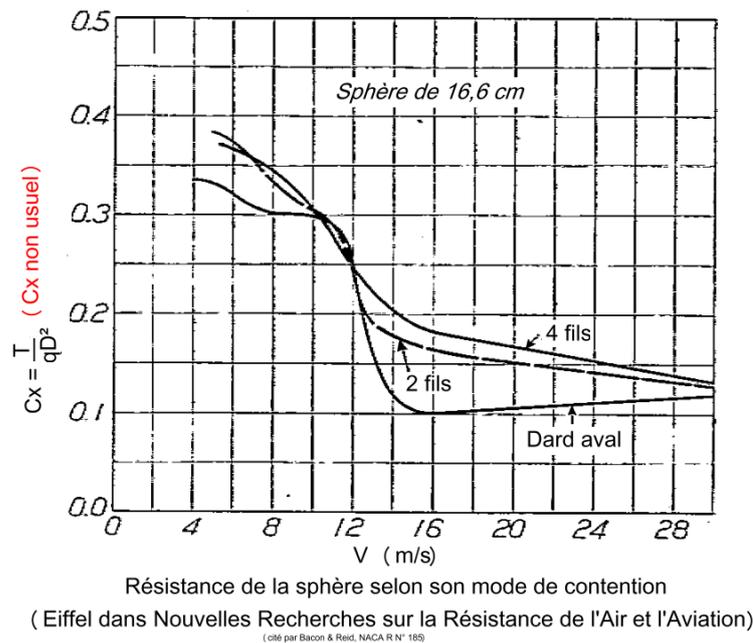
⁴⁴ On le fait malgré tout pour les avions à hélice car il s'agit plus d'étudier les propriétés de leur voilure que celles de leur fuselage.



D'après Bacon & Reid, [NACA Report N° 185](#)

Il s'avère que l'utilisation de fils pour la contention de la sphère déclenche à la surface de ce corps la transition de la Couche Limite depuis le régime laminaire jusqu'au régime turbulent, même si lesdits fils sont extrêmement fins.

Les essais historiques d'Eiffel prouvent ainsi les perturbations apportées par les fils, du moins en comparaison avec celles apportées par un dard aval :



Ce dard aval reste donc le mode de contention qui modifie le moins l'abscisse de transition de la Couche Limite et donc l'écoulement ; encore convient-il que ce dard soit du diamètre le plus fin possible près de la sphère.

Hoerner lui-même s'était enquis [en 1935](#) de ce dernier problème et avait réalisé des essais avec des dards aval de plusieurs diamètres :

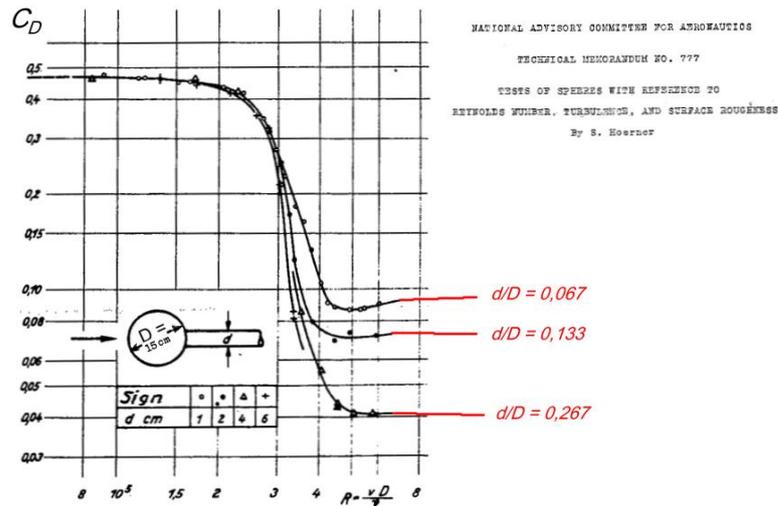


Figure 5. Effect of rear spindle on sphere drag.

Ces essais sont également cités par [Suryanarayana](#).

Il apparaît clairement, au vu de ce diagramme d'Hoerner, que la présence du dard, si elle ne modifie pas le C_x souscritique, diminue grandement le C_x supercritique : on peut donc dire que le dard aval carène l'arrière de la sphère en limitant l'ampleur du tourbillon de culot...

Hoerner tire de ces essais et d'autres le graphe suivant, où le C_x d'une même sphère (au même Reynolds) est mesuré avec des dards de différents diamètres :

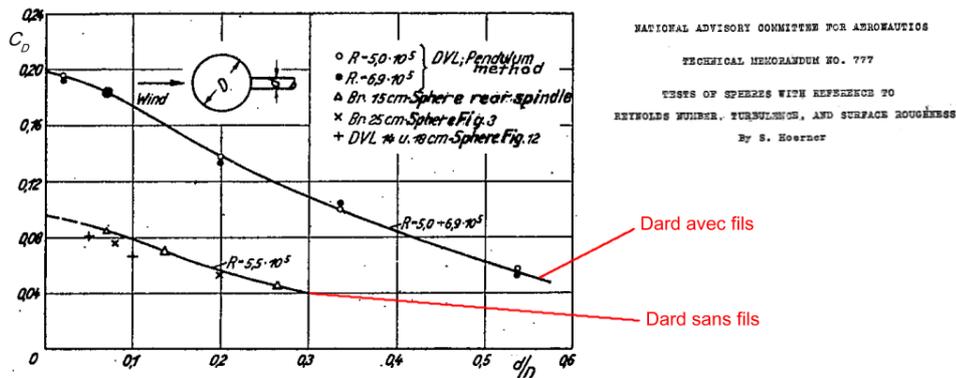


Figure 6.- Super-critical drag of various spheres versus spindle diameter.

La courbe la plus haute correspond à l'usage de dards et de fils.

C'est la courbe du bas (dard sans fils) qui nous intéresse ici.

Bien sûr, la prolongation de cette courbe vers la gauche (vers un diamètre relatif nul du dard) reste une affaire d'opinion : seuls des mesures de C_x supercritiques en lévitation magnétique ou en chute libre pourraient légitimer pleinement l'inscription d'un point sur l'axe vertical.

Sur la foi de cette dernière courbe, Hoerner recommande cependant aux chercheurs de ne pas dépasser pour le dard un diamètre valant **6 centièmes** du diamètre de la sphère.

Selon ce point de vue, le dard d' [Achenbach](#) (dont le diamètre vaut le dixième de celui de la sphère) est donc légèrement trop fort, bien qu'il reste dans le bon ordre de grandeur :

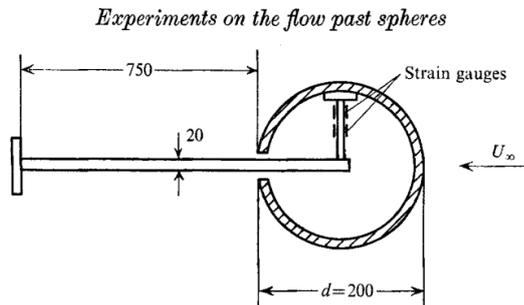
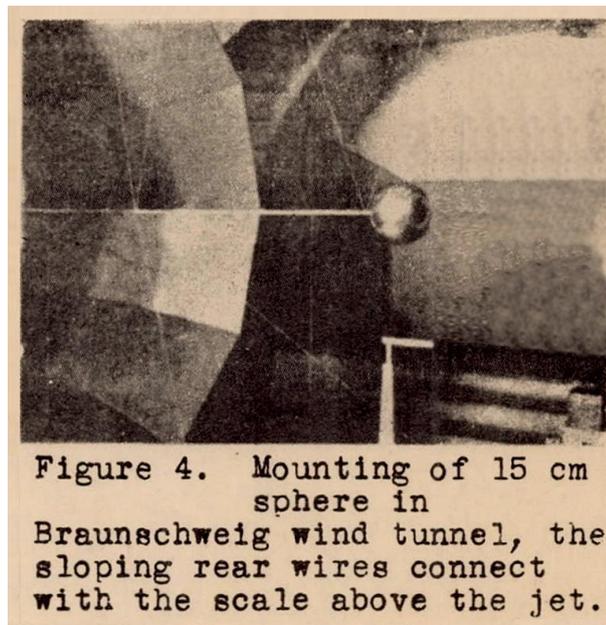


FIGURE 2. Experimental arrangement for the measurement of the total drag forces, dimensions in mm.

Notons que l'usage de fils venant raidir le dard aval (pourvu que ces fils soient fixés en arrière de la sphère) n'influe pas sur le C_x ⁴⁵. Voici par exemple le système de dard et V de fils en aval qui était utilisé en 1935 dans la soufflerie de Braunschweig :



[Image tirée du NACA TM 777](#)

Le souffle vient ici de la droite.

La légende indique : « Les fils arrière en biais sont attachés à la balance au dessus de la veine ».

Sur cette image, un tube de Pitot est également visible sous la sphère.

⁴⁵ "It was not possible to establish whether wires crossing the zone behind sphere affect the drag curve within instrumental accuracy, or its shape in general. Thus a radial cross of 2.2 millimeter gage wires fitted 8 cm aft of the sphere, disclosed a drag identically the same as with the simple set-up;" (tiré du [NACA TM N° 777](#)).

L'avenir :

Nous avons déjà évoqué la lévitation magnétique dans le courant de ce texte : lorsque le modèle testé dans une soufflerie est maintenu à sa place par un asservissement de très forts aimants, l'écoulement autour dudit modèle n'est plus modifié par les obstacles que constituait les dards et autres fils de contention : les mesures effectuées se rapprochent alors un peu plus de l'idéal (ou des mesures effectuées en chute "aérienne").

Le seul problème qui limite la précision des mesures effectuées en lévitation magnétique est celui de la turbidité de l'écoulement de la soufflerie (les essais en chutes *aérienne* sont eux-mêmes justement faits par air calme).

Dans un de [leurs textes](#), les Japonais Sawada, Suda et Kunimasu relatent leurs mesures de Traînée d'une sphère maintenue en lévitation magnétique :

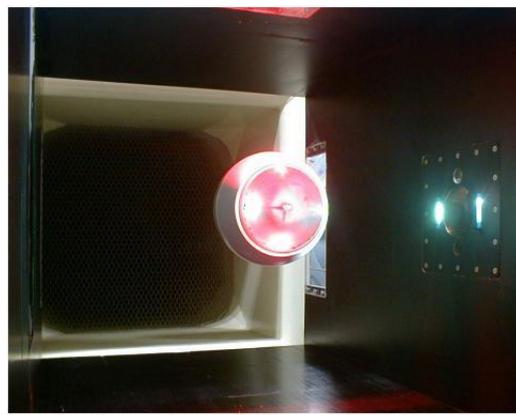
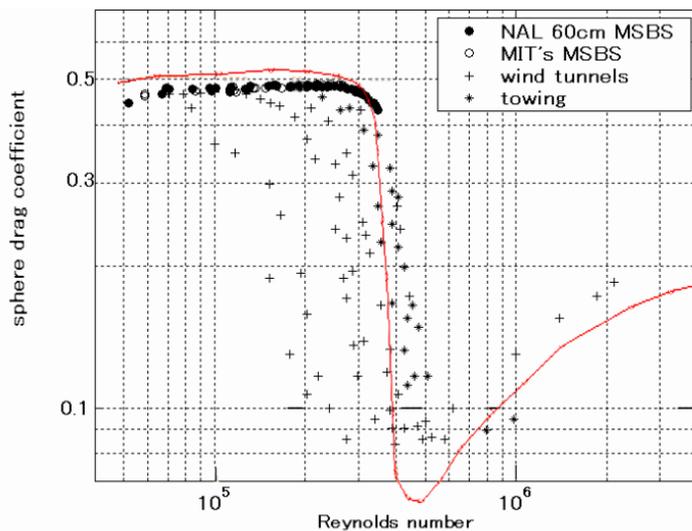


Fig. 19. The Magnetic Suspended Sphere Model

Cette image, tirée d'un [autre texte](#) ; montre en lévitation magnétique une sphère dont la partie avant est transparente.

Les points obtenus lors de ces essais (marques rondes et noires, ci-dessous, désignées NAL 60cm MSBS) font jeu égal avec les points obtenus par le MIT dans sa soufflerie également à lévitation magnétique (marques rondes et blanches).

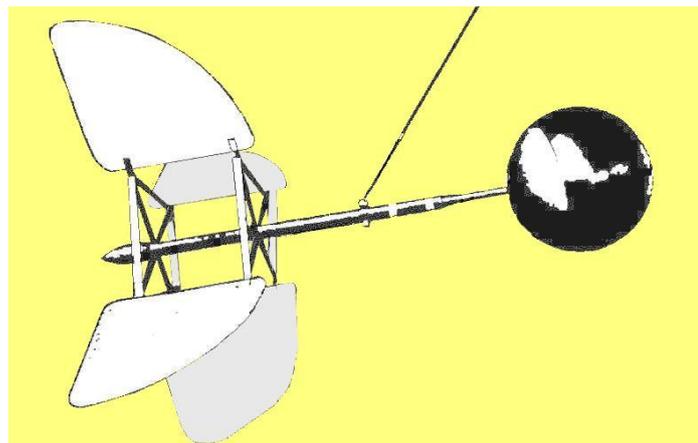
D'autres mesures du C_x , obtenues par des moyens plus classiques, sont également représentées par les auteurs Japonais :



NAL 60CM
MAGNETIC SUSPENSION
AND BALANCE SYSTEM
SAWADA, SUDA, KUNIMASU

Fig.18 Reynolds Number vs. Sphere Drag Coefficient

Parmi ces mesures "plus classiques", certaines sont repérées par le qualificatif *towing*, mot qui signifie *remorquage*. Elles sont en effet obtenues par remorquage en air calme, à partir d'un avion ou en bassin de carène, d'une sphère au bout d'un dard empenné :



D'après le rapport [NACA 558](#)

Dans le cas précis dont découle ce dessin, le remorquage se faisait depuis un autogyre.

Il s'avère que la crise du C_x que dessinent ces mesures par *remorquage* est décalée vers les Reynolds plus fort, ce qui est révélateur du reste de turbidité des autres moyens d'essais pris en compte dans ce graphe...

Nous avons ajouté en rouge sur le [graphe japonais](#) la courbe dégagée par Achenbach.

Il apparaît que le C_x souscritique d'Achenbach est plus fort que celui obtenu en lévitation magnétique. On pourrait penser que cette divergence est due à la présence, lors des essais d'Achenbach, d'un dard de contention de la sphère, bien que Hoerner, ainsi que nous l'avons déjà dit [plus haut](#), avait montré que le dard ne modifie pas le C_x souscritique. Ceci étant, avec un pseudo-dard de l'ordre du dixième du diamètre de la

sphère, d'[autres auteurs](#) japonais constatent une très faible diminution du C_x de la sphère de 3 %.

Cette diminution reste néanmoins dans la marge d'erreur des essais d'Hoerner.

Les mesures de Sawada et coll. ([marque rondes noires et blanches](#)) s'arrêtent cependant aux Reynolds de **0,35 millions**, c.-à-d. au seuil de la crise du C_x de la sphère. Il y a donc encore un petit bout de chemin pour en arriver à la détermination du C_x supercritique (disons qu'il faudrait un doublement du Reynolds).

Or cet accroissement du Reynolds ne pourra se produire que :

→ par augmentation de la vitesse du fluide dans la soufflerie. Le Reynolds de **0,35 millions** ayant été obtenu grâce à un courant d'air de **35 m/s**, il y a encore possibilité de gain de ce côté-là avant que la vitesse du son ne soit trop approchée : si l'on part du principe qu'il ne faudrait pas dépasser deux dixièmes de la vitesse du son, on peut donc attendre le doublement du Reynolds par ce procédé.

→ par augmentation de la masse volumique du fluide en mouvement dans la soufflerie, donc par pressurisation : nous ignorons si cette pressurisation est compatible avec le dispositif de lévitation magnétique.

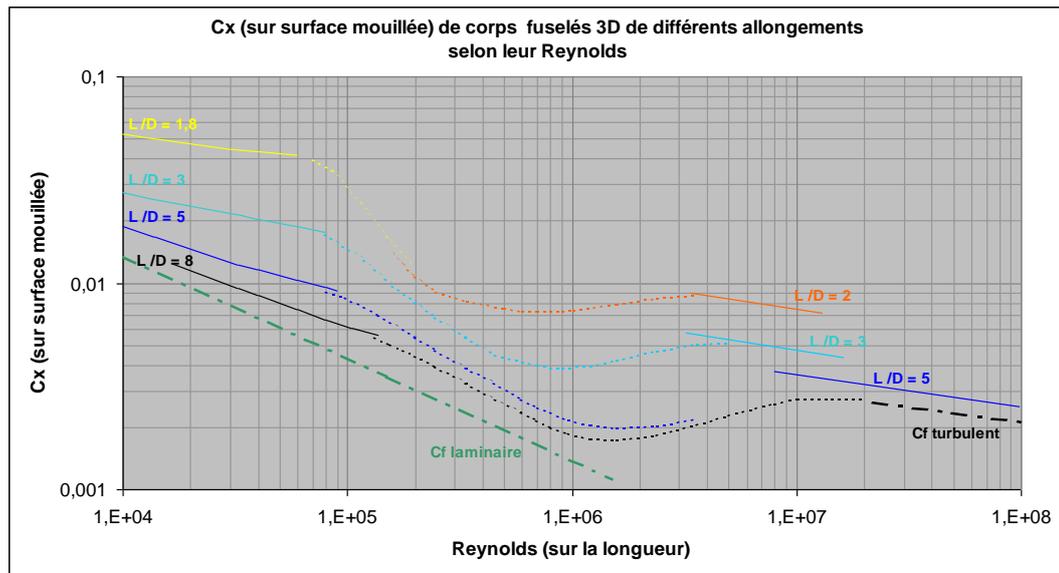
→ par augmentation de diamètre de la sphère (qui est de **150 mm** dans ces essais) et donc de la dimension de la veine (qui est de **600 mm**), et donc de la puissance des aimants produisant la lévitation magnétique. Nous ignorons également si cette augmentation de puissance est envisageable.

Quoiqu'il en soit de ces difficultés techniques, nous sommes persuadé que ce nécessaire élargissement de la plage de Reynolds dans les souffleries à lévitation magnétique sera obtenu incessamment.

Sphère et cylindre, oui, mais les autres corps ? :

Les aérodynamiciens ont découvert très tôt que le comportement complexe de la sphère et du cylindre dessinait l'archétype du comportement de tous les corps 2D ou 3D même suffisamment fuselés : tous les corps 2D et 3D même convenablement profilés connaissent une crise de C_x !

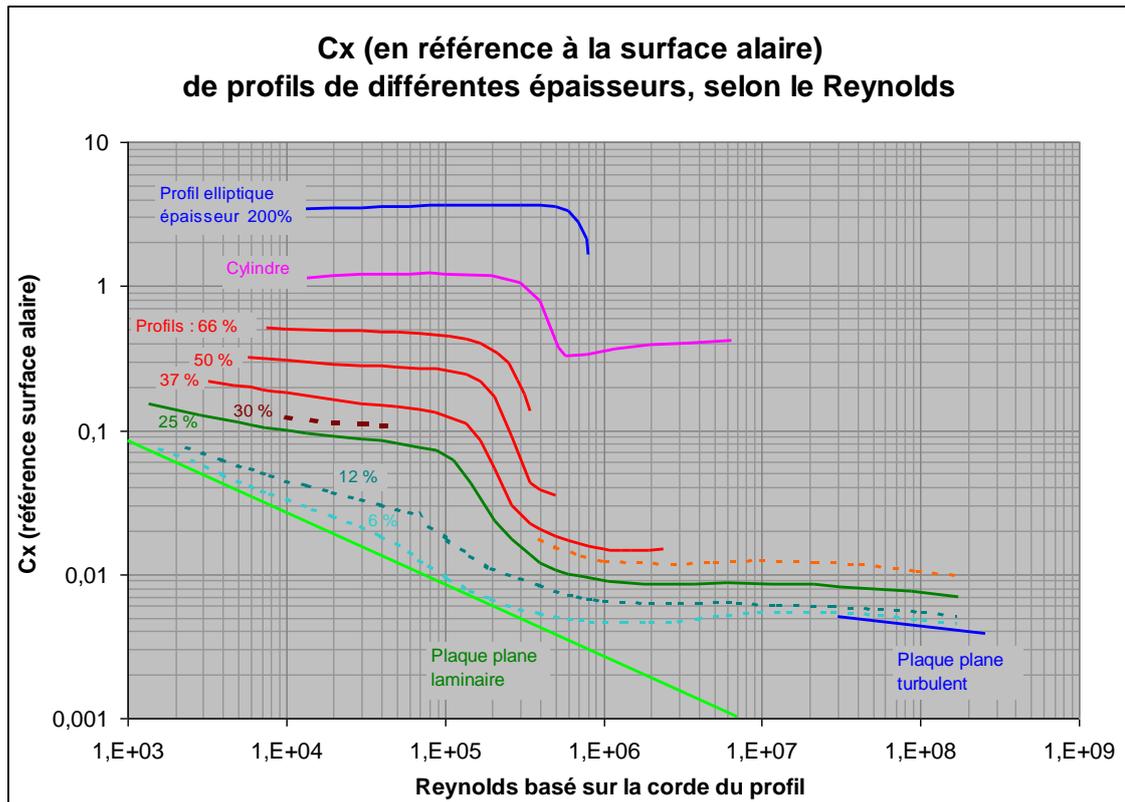
Ne présentons pour illustrer cette crise (générale) que le graphe suivant, où Hoerner, à la page 112 de son ouvrage [Drag](#), rassemble les données de Traînée, à portance nulle, de corps de révolution 3D profilés (c.-à-d. adoptant les formes dites de façon erronée *en goutte d'eau*) :



Même si cela semble moins préjudiciable aux corps de fort élancement (élangements supérieurs à **5**), il existe bien pour ces corps de révolution profilés une crise du C_x , avec chute progressive de celui-ci au-dessus du Reynolds **10^5** .

Quant à la remontée des courbes pointillées au dessus du Reynolds **1 million**, elle correspond à l'extension progressive de la Couche Limite turbulente vers le point d'arrêt (cette Couche Limite turbulente entraînant plus de friction que la Couche Limite laminaire qu'elle remplace, comme nous l'avons déjà écrit)...

Dans notre texte [Aérodynamique des corps d'Eiffel](#), nous commentons plus longuement ce graphe. Nous y présentons aussi un graphe équivalent pour les corps 2D symétriques (entretoises ou mâts profilés et profils symétriques utilisés pour les avions de voltige) :



Il est patent que la crise du cylindre (en fuchsia), dont nous avons dit qu'elle a la même origine que celle de la sphère, peut servir ici d'archétype à la crise de ces profils symétriques.

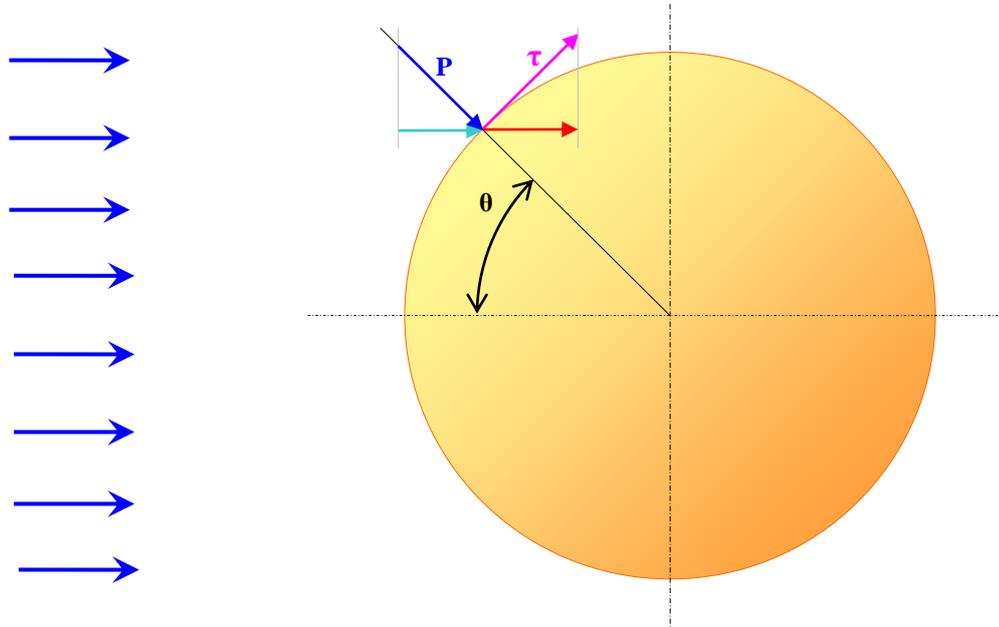
Ce graphe ne traite que des profils symétriques, mais, aux faibles Reynolds, la dégradation du C_x des profils dissymétriques et cambrés (de loin les plus courants) est beaucoup plus forte. Leur courbe Portance selon Traînée abandonne alors la forme classique en C pour adopter une forme en zigzag très marqué (voir sur ce sujet particulier notre texte [Aérodynamique des corps d'Eiffel](#)).

Le C_x frontal de friction de la sphère :

Achevons ce texte en évoquant le C_x de friction de la sphère.

Comme c'est le cas pour tous les corps, le C_x de la sphère est bien sûr la somme de son C_x de pression et de son C_x de friction.

Rappelons la définition de ces deux C_x à l'aide d'un schéma :



Chaque point de la sphère, défini par l'angle polaire θ , est l'objet d'une pression et d'une friction.

De la pression P s'appliquant sur un point (en bleu dense) seule la composante $P \cos(\theta)$ (en bleu clair) compte dans l'intégration de la Traînée de pression.

De même, de la friction τ (en fuchsia) seule la composante $\tau \sin(\theta)$ (en rouge) compte dans l'intégration de la Traînée de friction.

Intégrer, sur toute la surface de la sphère, les efforts naissant de la pression et de la friction revient donc à intégrer leurs composantes efficaces sur toute la plage d'angle polaire θ (les intégrations des deux autres composantes étant nulle, par raison de symétrie).

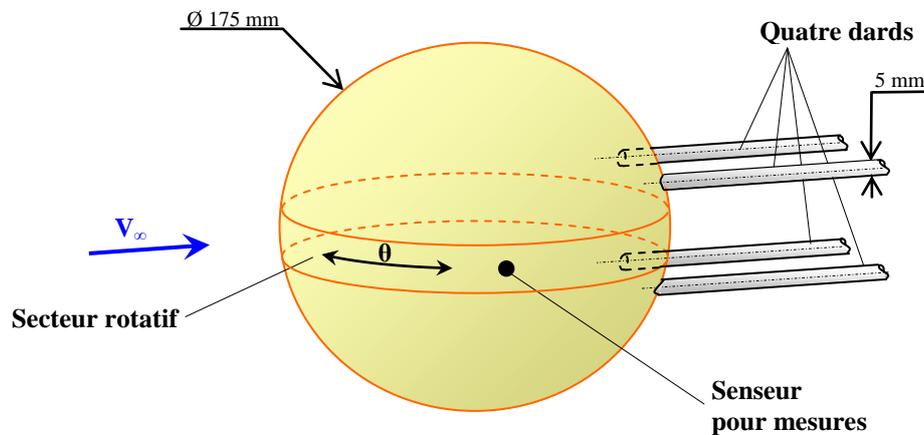
Les deux C_x qui nous intéressent (C_x de pression et de friction) sont évidemment tirés de ces intégrations d'efforts par simple quotient de la surface frontale.

En théorie, si l'on connaît le C_x complet de la sphère à un certain Reynolds, (C_x mesuré par un capteur d'effort placé sur le dard unique, par exemple), on peut connaître son C_x de friction en soustrayant de ce C_x complet le C_x de pression obtenu par intégration des [coefficients de pression](#) sur toute la surface de la sphère.

Cette soustraction prouve alors que la Traînée de friction sur la sphère est assez réduite et d'un autre ordre de grandeur que la Traînée de pression.

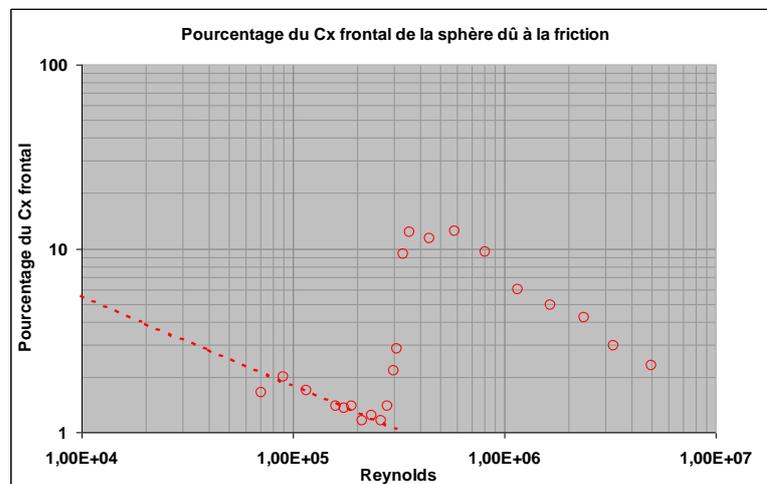
Néanmoins, le dispositif de mesure de la distribution de pression sur la sphère interfère souvent trop fortement avec cette mesure pour que la différence C_x complet –

C_x de pression soit vraiment signifiante : Voici par exemple le dispositif de contention de la sphère (dispositif à quatre dards) utilisé par Achenbach pour la mesure de la distribution des pressions locales :



La présence de ces quatre dards s'explique par la nécessité d'articuler en rotation le secteur rotatif central (qui porte le capteur) tout en maintenant immobiles les autres parties de la sphère.

Avec ce même dispositif cependant, mais à l'aide d'un capteur différent, Achenbach a directement mesuré la friction locale sur la sphère. Il donne de ces mesures locales de friction, dans [son texte](#) de 1972, une intégration sur toute la surface, en pourcentage du C_x complet (C_x toujours frontal) :

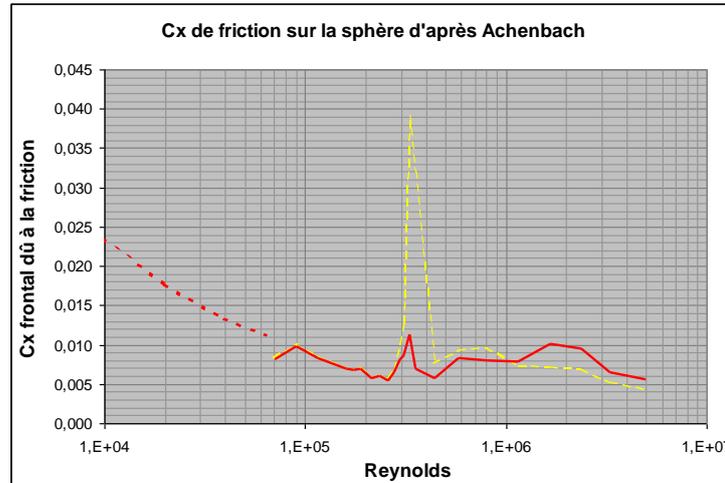


Ce pourcentage (marques rondes rouges) atteint **12,5 %** dans la partie supercritique du C_x (du fait que le C_x de pression y devient très faible, ce qui donne plus d'importance relative au C_x de friction).

À gauche du graphique, la droite en tirets représente une évolution du C_f en $Re^{-1/2}$ proposée par Achenbach.

Nous avons eu l'idée de tirer de ce graphique, dans une démarche inverse à celle de l'auteur, la valeur absolue (et non plus relative) du même C_x frontal de friction c.-à-d. la portion du C_x frontal de la sphère due à la friction.

En reprenant les valeurs relatives du graphe ci-dessus et en nous basant sur le C_x mesuré par Achenbach à l'aide de sa sphère à un seul dard ([courbe rouge de ce graphe](#)), nous avons obtenu la courbe [jaune](#) ci-dessous :



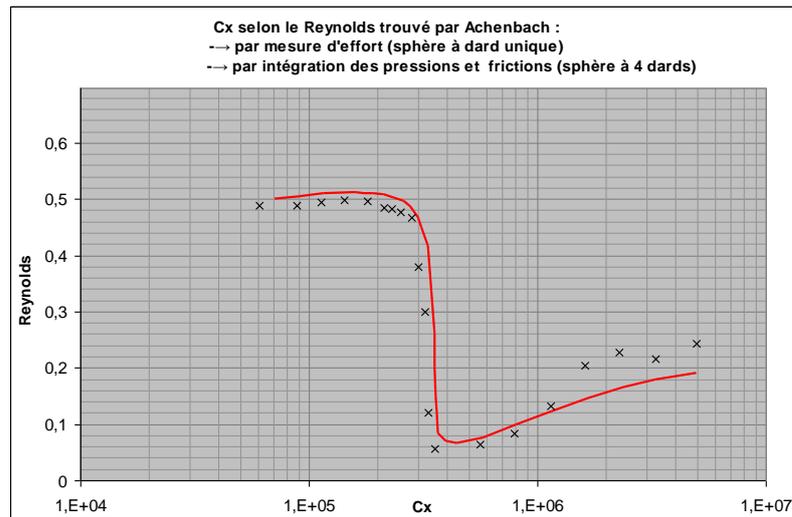
L'importante crête de ce C_x se situe bien-sûr dans la [zone critique](#) (entre 3 et $4 \cdot 10^5$). Elle pourrait être réaliste, mais on peut facilement la suspecter de naître du décalage en Reynolds des deux fronts presque verticaux des deux graphes dans la zone critique :

- front du graphe dessinant le [pourcentage de \$C_x\$ de la sphère dû à la friction](#).
- front du [graphe du \$C_x\$](#) correspondant à la crise classique ;

Or cette crise *classique* du C_x est la partie de la courbe la plus difficile à mesurer (nous avons vu que la présence de défaut de surface ou celle d'organes de contention décale souvent le front de cette courbe vers la gauche).

Il est alors probable que la sphère à quatre dards et à secteur tournant utilisée par Achenbach anticipait quelque peu sa crise.

De fait, en relisant le [texte d'Achenbach](#), nous avons pris conscience qu'Achenbach avait utilisé comme C_x total, pour déterminer le pourcentage de C_x dû à la friction, un C_x issu de l'intégration de ses mesures de pression et de friction effectuées sur le dispositif à quatre dards. Il donne dans son texte ces C_x sous la forme de marques noires en **x** ; les voici :



Les abscisses de ces marques en x correspondent peu ou prou aux Reynolds des marques rondes du graphe des [pourcentages de friction](#).

Achenbach fait le constat que ces marques en x sont effectivement décalées par rapport à sa courbe de C_x obtenue avec une sphère à un seul dard (courbe rouge). Il explique ce décalage par l'influence des fentes permettant la rotation du secteur portant le capteur de friction (ces fentes anticipant la transition de la Couche Limite) ⁴⁶

En nous basant sur ces C_x déterminés par intégration des pressions et des frictions sur la sphère à quatre dards (marques noires en x ci-dessus), nous avons alors fait redessiner à notre tableur la courbe de la valeur absolue (et non relative) du C_x de friction de la sphère. Cette nouvelle courbe est la courbe rouge [ci-dessus](#), beaucoup plus lisse et réaliste que la jaune...

Gardons cependant en mémoire que par défaut d'étalonnage de son capteur de friction pour la Couche Limite turbulente, Achenbach présente ses relevés de frictions comme ayant simplement une valeur qualitative...

On peut néanmoins retenir que la valeur absolue du C_x de friction frontal sur la sphère est de l'ordre de **0,008** (en sous et supercritique) et, au plus fort, comme l'indique le graphe d'Achenbach, de l'ordre du dixième du C_x frontal complet en supercritique.

Nous n'avons pas trouvé d'autres mesures de la friction sur la sphère que celles d'Achenbach.

Influence du nombre de Mach sur le C_x frontal de la sphère :

Ce texte a été uniquement consacré jusque là au C_x de la sphère en subsonique. Mais il est intéressant d'évoquer quelque peu l'influence sur le C_x du nombre de Mach,

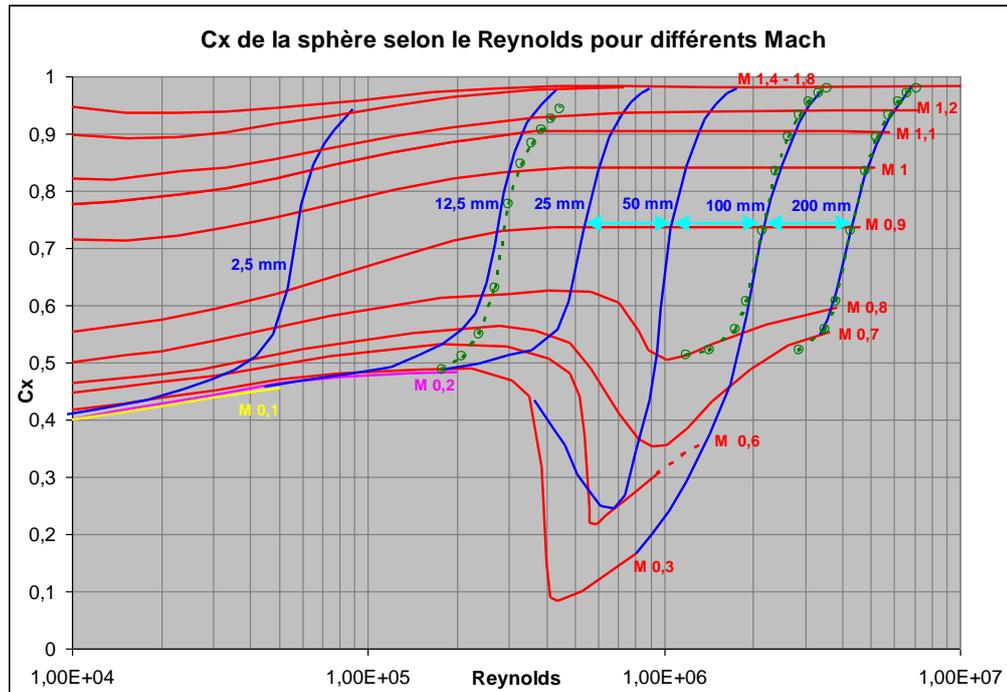
⁴⁶ "In the critical and transcritical flow range significant deviations become evident. Probably the slots which are incorporated in the rotating segment act as a boundary-layer trip."

ce nombre adimensionnel étant bien sûr défini comme le quotient de la vitesse de l'écoulement par la vitesse locale C du son :

$$M = V_{\infty} / C$$

Dans leur [texte de 1979](#), Miller et Bailey dressent le bilan des études aérodynamiques⁴⁷ et des tests en souffleries portant sur les sphères lisses.

Ils en tirent le graphe suivant où le C_x des sphères est exprimé selon le Reynolds de leur écoulement :



La famille des courbes jaune, fuchsia et rouges représentent, aux différents Mach, le C_x de la sphère selon le Reynolds.

Au Mach inférieurs à **0,3** (**M 0,1** en jaune, **M 0,2** en fuchsia, et **M 0,3** en rouge) la forme des courbes nous est connue. On note simplement qu'il y a un léger écart vertical entre ces trois courbes, dû aux premiers effets de la compressibilité de l'air.

À mesure que croît le Mach (différentes courbes rouges), la crise du C_x se fait moins sensible et pour **M 0,9**, on peut dire qu'elle n'existe plus.

L'explication qui vient à l'esprit pour cette réduction progressive de la crise du C_x est que ladite crise a à peine le temps de se faire sentir que la sphère se trouve dans les affres transsoniques (avec la forte élévation du C_x qui va avec).

Cette explication vaut, à notre sens, tout ou partie, pour les Mach allant jusqu'à **0,8**.

Pour les Mach supérieurs, à notre sens toujours, un autre comportement de la Couche Limite doit être envisagé. À ce propos, Clift, Grace et Weber écrivent, dans leur [ouvrage](#), commentant cependant des constats effectués au Reynolds 10^3 :

⁴⁷ Les études aérodynamiques consistent à accélérer des objets à l'aide de canon à gaz et à mesurer, par exemple, l'évolution de leur vitesse.

"Aux vitesses transsoniques ($0,9 < M < 1,1$), [...] de fortes interactions [de l'onde de choc] avec la Couche Limite surviennent qui tendent à déclencher la séparation de cette Couche Limite [et donc de l'écoulement de culot]."

Sur le même graphe, la famille de [courbes bleues](#) représente le C_x de sphères lisses de différents diamètres (diamètres indiqués en **mm**).

Pour comprendre ces courbes, il faut se souvenir que la [courbe classique](#) du C_x selon le Reynolds est établie, en écoulement incompressible, en faisant varier soit la vitesse U de l'écoulement, soit le diamètre D des sphères (le nombre de Reynolds, l'avons-nous assez dit ?, valant à très peu près $70\,000 D U$, si D est le diamètre de la sphère en **m** et U la vitesse de l'écoulement en **m/s**).

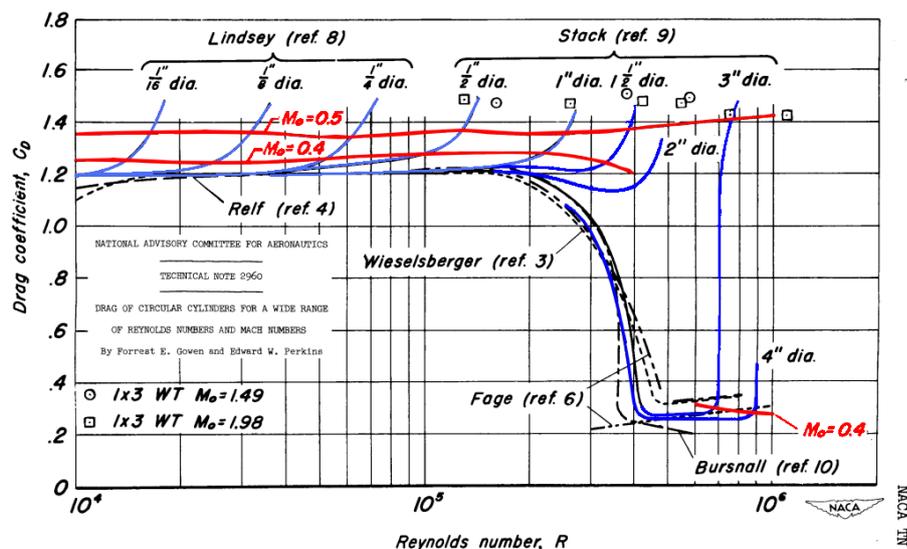
Cependant, lorsque la vitesse de la soufflerie, par exemple, s'approche de **Mach 0,2** ou **0,3**, les aérodynamiciens qui s'intéressent au C_x de la sphère selon le Reynolds en écoulement incompressible ne disposent plus, pour gagner encore en Reynolds, que de la possibilité d'augmenter le diamètre de leurs sphères (ce qui ne peut se faire que dans des souffleries de dimensions augmentées en proportion).

A contrario, les [courbes bleues](#) montrent ce qu'il advient du C_x de la sphère lorsque, afin d'augmenter le Reynolds, on augmente la vitesse de l'écoulement au-delà de **M 0,3** : l'écoulement ressent les effets de la compressibilité de l'air, ce qui conduit le C_x à croître vertigineusement. De la sorte, on accroît bien un peu le Reynolds, mais c'est surtout le C_x qui décolle !

En conséquence, les [courbes bleues](#) montrent toutes un fort accroissement du C_x pour une faible augmentation du Reynolds (et donc du Mach, puisqu'à diamètre constant, l'augmentation du Reynolds ne peut être obtenue que par une augmentation de vitesse, et donc du Mach).

Le lecteur aura bien-sûr deviné que ce brusque accroissement du C_x de chaque sphère de diamètre donné correspond à [l'approche du mur du son](#).

Le même type de famille de courbes existe évidemment pour le cylindre. Gowen et Perkins, par exemple, dessinent ces courbes comme suit :



Les courbes bleues traduisent le comportement de cylindres de différents diamètres (diamètres exprimés ici dans les unités médiévales qui ont toujours cours aux États-Unis à la NASA).

Ces mêmes courbes bleues reflètent bien la sensibilité de l'écoulement sur le cylindre aux premiers effets de la compressibilité de l'air (effets probablement mesurables dès **M 2** ou **M 3**).

La vive montée de la Trainée qui s'ensuit (non représentée ici) portera le C_x de ces cylindres jusqu'à **2,1**, un peu avant **Mach 1**⁴⁸.

Mais revenons au problème du [C_x des sphères selon le Mach](#) :

Lorsque l'on fait tracer à un tableur ces [courbes bleues](#), comme nous l'avons fait, on est vite frappé d'une chose : la partie haute de toutes ces courbes bleues se répète presque inchangée d'un diamètre à l'autre.

Mieux : Une simple translation permet à la courbe bleue pour le diamètre **25 mm**, par exemple, de venir presque couvrir la courbe bleue pour le [diamètre 50 mm](#).

Et la valeur de cette translation (qui peut être représentée sur le graphe par la première des flèches à double fer bleu clair) correspond au doublement du Reynolds.

Le même constat peut être effectué pour le passage de **50 mm** à **100 mm** (par doublement du Reynolds, [nouvelle flèche](#) à double fer bleu clair) ou même pour le passage de **25 mm** à **100** puis **200 mm** (ce qui se ferait par une multiplication du Reynolds par quatre puis encore par deux, d'où la dernière flèche à double fer bleu clair).

Pour prouver ces dires, nous avons effectué la translation de la courbe du diamètre **25 mm** jusqu'au diamètre **100** (courbe en [tiretés verts à marques rondes](#) recouvrant presque la courbe bleue de ce diamètre **100**) par simple multiplication du Reynolds par **4**.

De même nous avons effectué le passage de **25 mm** à **200 mm** (par simple multiplication du Reynolds par **8**, soit trois translations correspondant aux trois flèches doubles bleu clair) : cela donne la [courbe tiretée verte](#) recouvrant presque parfaitement celle du diamètre **200**.

Il est patent que ces translations son très seyantes, du moins pour la partie médiane et haute des courbes.

De la même façon encore, nous nous sommes essayé au passage du diamètre **2,5 mm** au diamètre **12,5 mm**, mais avec [moins de succès](#) (tiretés verts à marques rondes très proche de la courbe bleue du diamètre **12,5 mm**) : les deux courbes sont très voisines mais l'erreur en C_x se chiffre quand-même à presque **0,1**.

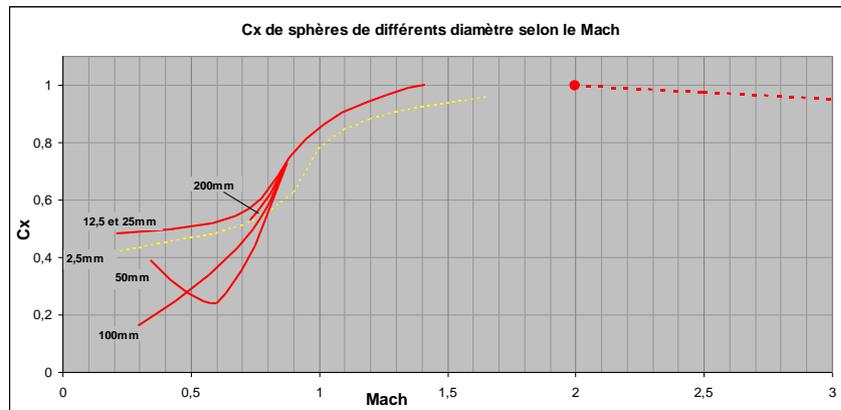
Que signifie cette possibilité de passage des courbes bleues d'un diamètre à un autre par une translation de Reynolds valant le quotient des diamètres ?

Elle ne signifie rien moins que le fait que pour les Mach supérieurs à **M 0,85** le Reynolds n'intervient plus dans le C_x !

En effet, lorsque l'on passe de la courbe bleue du diamètre **50 mm**, par exemple, à la courbe bleue du diamètre **100 mm**, le C_x est le même mais le Reynolds est juste multiplié par deux, ce qui ne correspond qu'à l'augmentation de diamètre...

⁴⁸ ...ce C_x diminuant ensuite pour se stabiliser à **1,33** vers **M 3**.

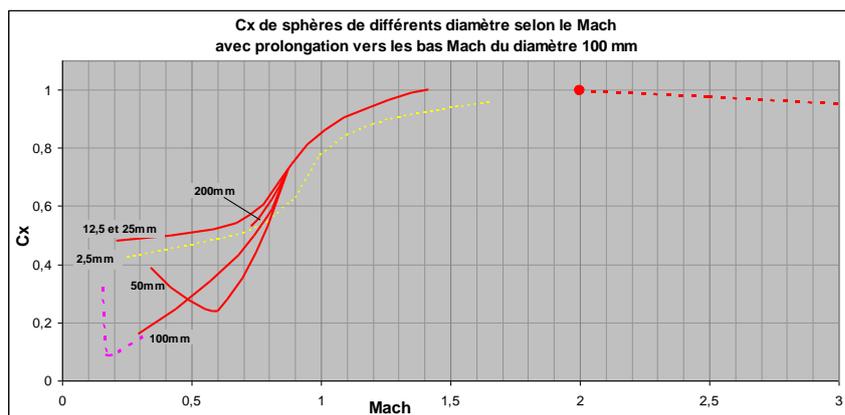
Miller et Bailey présentent autrement cette indifférence du C_x au Reynolds pour les Mach transsoniques et supersoniques : ils dessinent la courbe du C_x de sphère de différents diamètres en fonction du Mach (pour des Reynolds non précisés mais évidemment fonction du Mach et du diamètre de chaque sphère) ; cela donne les courbes rouges ci-dessous :



Les courbes correspondant aux diamètres de **12,5 à 200 mm** se rassemblent toutes pour faire cause commune au-dessus de **M 0,85**⁴⁹, même si la courbe en tirets jaunes (pour le petit diamètre **2,5 mm**) se tient légèrement au-dessous (d'un écart vertical inférieur à **0,1**).

À gauche, la remontée du C_x du diamètre **50 mm** (lorsque la vitesse et le Mach diminuent) correspond à la crise classique mâtinée cependant d'influences de la compressibilité⁵⁰.

La même remontée du C_x (lorsque la vitesse diminue) n'a pas été dessinée pour le diamètre **100 mm** par Miller et Bailey, mais, puisque cette remontée se produit sous les auspices d'un Mach inférieur à **0,3**, on peut facilement le dessiner d'après le [graphe](#) de ces auteurs (ce sont les tirets fuchsia ci-dessous⁵¹) :



⁴⁹ Cela correspond, sur la plus petite des sphères, à savoir celle de **12,5 mm**, à un Reynolds de **$2,5 \cdot 10^5$** .

⁵⁰ Si cette crise se produit entre **M 0,3** et **M 0,6**, cela équivaut, pour ce diamètre de **50 mm** à une plage de Reynolds de **0,36 million** à **0,71 million**, ce que l'on voit sur la courbe [bleue du graphe](#).

⁵¹ Les deux courbes (fuchsia et rouge) ne se raccordent pas au **M 0,3**, cela semble imputable à une petite erreur de Miller et Bailey.

Gageons qu'une prolongation vers la gauche de la courbe du diamètre **200 mm** présenterait la même physionomie, au moins en dessous de **M 0,3** ; malheureusement, cette zone des forts Reynolds et des faibles Mach du [graphe](#) de Miller et Bailey (en bas à droite), manque cruellement de points (nous verrons plus loin comment, et à quels risques, nous nous sommes autorisé à combler cette lacune).

Faisons remarquer que cette même remontée du C_x pour les faibles vitesses (donc Reynolds, donc Mach) n'existe pas pour les diamètres de **25, 12,5 et 25 mm** : cela apparaît clairement sur le [graphe](#) de Miller et Bailey ; comme nous l'avons dit, ces sphères connaissent les effets de la compressibilité de l'air avant de vivre la crise du C_x liée à la transition de leur Couche Limite.

Sur ces deux derniers graphes du [C_x selon le Mach](#) pour différents diamètres de sphère, c'est nous-même qui avons prolongé la courbe rouge vers les grand Mach ([tirés rouges](#)) d'après les extrapolations de Miller et Bailey (le C_x pour **M 2** correspondant cependant à une mesure).

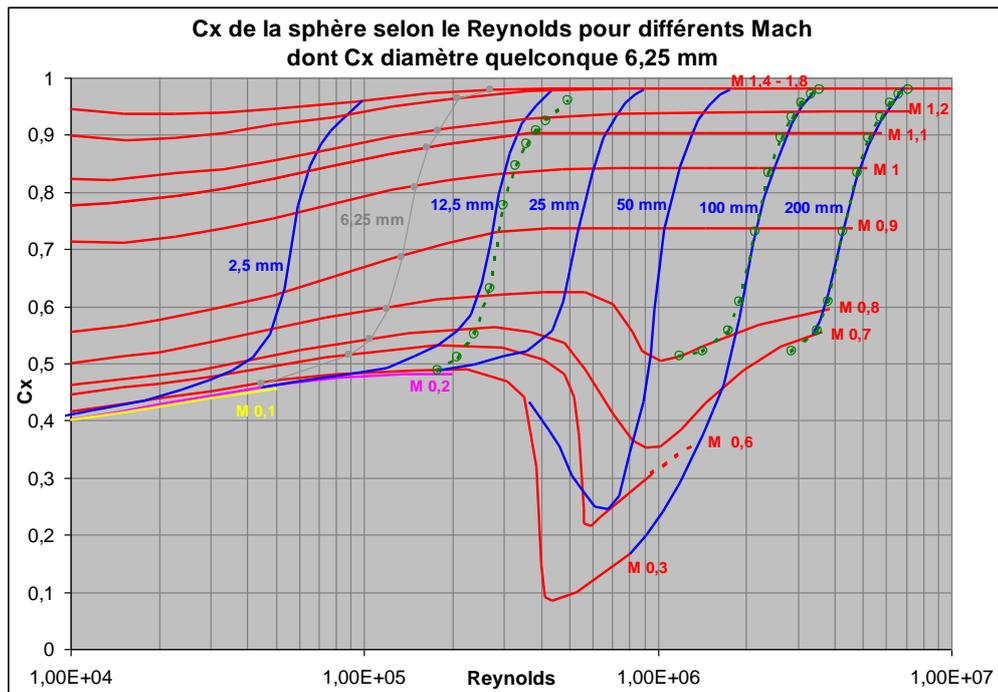
D'après d'autres sources, au-delà de Mach **3** et à hauts Reynolds, le C_x de la sphère respecte la valeur asymptotique théorique de **0,92**⁵²...

Sur [leur graphe](#) du C_x selon le Reynolds, Miller et Bailey ont choisi de dessiner l'évolution du C_x de sphères de diamètres donnés selon leur Reynolds. Il ne faudrait cependant pas croire qu'il nous est interdit de dessiner nous-mêmes l'évolution du C_x d'une sphère [d'un diamètre quelconque](#).

Si l'on accepte en effet [le graphe](#) de ces auteurs, on doit prendre conscience qu'il contient assez de données pour nous informer du C_x d'une sphère de diamètre quelconque.

Pour exemple, nous avons choisi de tracer (en gris ci-dessous) la courbe du C_x d'une sphère de diamètre **6,25 mm** :

⁵² À basse comme à haute altitude, donc à masse volumique de l'air quelconque (mais pas à très haute altitude en atmosphère raréfiée).



Pour ce faire, nous nous sommes contenté de déterminer à quel Reynolds correspond chaque Mach rond ayant donné lieu à une courbe rouge sur ce graphe (à savoir **M 0,3**, **M 0,6**, **M 0,7**, etc.)⁵³.

Il nous a suffi ensuite de prendre comme ordonnée pour chacun de ces Reynolds celle imposée par la courbe rouge du Mach rond correspondant.

Sur le [graphe C_x selon le Mach et le diamètre](#), l'évolution du C_x d'une sphère de diamètre **6,25 mm** ainsi déterminée tracerait une courbe intermédiaire entre celle du diamètre **2,5 mm** (en jaune) et la courbe supérieure rouge qui réunit, à partir de **M 0,85**, tous les diamètres supérieurs à **12,5 mm**).

On peut résumer cette partie consacrée à l'influence de la compressibilité de l'air sur le C_x de la sphère en écrivant que les sphères de faible diamètre (inférieur ou égal à 25 mm) n'ont pas le loisir de connaître la crise du C_x due à la transition de leur Couche Limite parce qu'elles sont prises trop tôt dans les affres transsoniques (du fait de leur petite taille, leur Reynolds est encore souscritique, alors même que leur vitesse est déjà transsonique).

Par contre, du fait de leur taille (qui augmente le Reynolds de leur écoulement à Mach égal), les grosses sphères (de diamètre supérieur à 25 mm et typiquement 50 mm) développent leur crise du C_x (liée à la transition de leur Couche Limite) avant de rentrer en zone transsonique...

⁵³ Les deux nombres adimensionnels sont évidemment reliés, en atmosphère standard, par la relation $R_e \approx M * 340 \text{ m/s} * 70\,000 \text{ s/m}^2 * D$, **M** étant le nombre de Mach, **D** le diamètre de la sphère en **m** et **340 m/s** la vitesse du son.

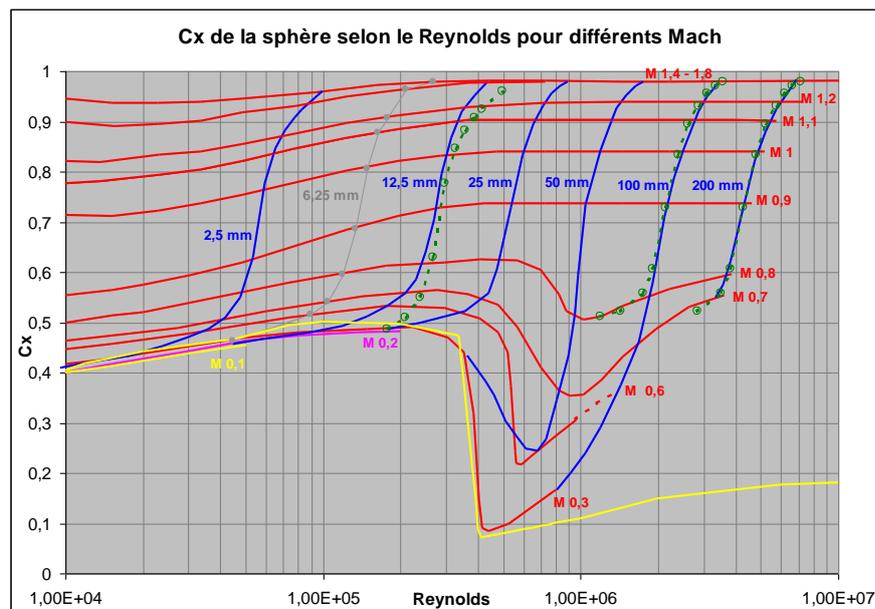
Avec les renseignements ci-dessus, essayons-nous maintenant à appréhender le comportement de la sphère qu'était le vaisseau spatial Vostok de Gagarine (dont une [image](#) illustre le début de ce texte).

Comme nous venons de l'écrire, cette sphère de **2,3 m** de diamètre devait bien connaître une crise du C_x (avec remontée du C_x à mesure que la vitesse diminuait) : en effet, si l'on place cette crise classique entre les Reynolds de **0,3 à 0,4 million**⁵⁴, le Vostok ne croisait à ce Reynolds qu'après décélération à **Mach 0,007**, soit une vitesse très largement subsonique.

Cependant, comme cette vitesse de **Mach 0,007** équivaut à **2,48 m/s**, c'est plutôt sous son parachute que le Vostok devait éventuellement connaître sa crise du C_x ...

L'évolution du C_x du Vostok pourrait donc avoir été celle-ci (en partant cette fois-ci des plus petites vitesses et dans une atmosphère considérée comme standard, c.-à-d. proche du niveau de la mer) :

→ en dessous de **Mach 0,2**, le Reynolds de l'écoulement sur le Vostok se tenant en dessous du Reynolds de **11 million**, on peut donc admettre qu'il restait justiciable de la [courbe standard](#) de Clift, Grace et Weber qui traite du subsonique incompressible ; nous avons ajouté cette courbe standard en jaune sur le graphe de Miller et Bailey :



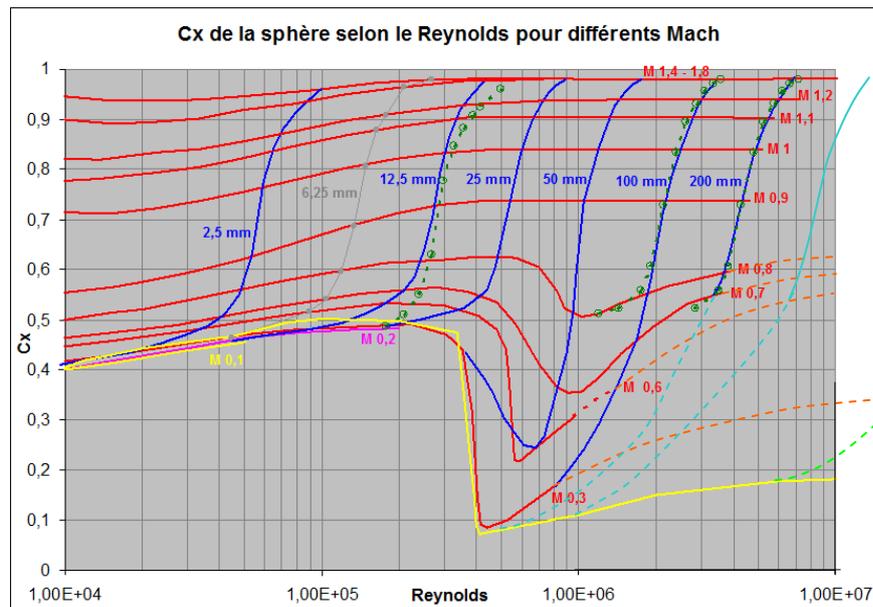
Il y a certaines différences entre cette courbe standard et la courbe retenue par Miller et Bailey pour le **Mach 0,1** et **0,2**, mais c'est sans importance...

Plus important pour nous est la dimension de l'écart entre cette courbe jaune et l'amorce de la courbe rouge pour **M 0,3**, un peu avant le Reynolds de **1 million**. Nous ignorons si cet écart traduit un artefact ou un réel phénomène physique.

L'évolution du C_x du Vostok se déroule malheureusement dans la zone aveugle du graphe de Miller et Bailey (en bas et à droite) du moins si, comme nous l'avons dit, on se ramène à l'atmosphère standard. Nous avons alors ci-dessous pris le risque de

⁵⁴ Nous considérons ici que le Vostok était une sphère lisse alors que [notre photo](#) la montre plutôt ébouriffée, ce qui pouvait repousser sa crise du C_x vers les plus petits Reynolds.

prolonger dans Word, en orange tireté, les courbes rouges de Miller et Bailey, ainsi qu'en bleu clair tireté la courbe du diamètre **200 mm** :



De même, nous proposons ci-dessus en trait continu bleu clair la courbe correspondant au C_x d'une sphère de diamètre **400 mm** : Au vu des conclusions de Miller et Bailey exposées plus haut, cette proposition nous semble assez peu risquée dans sa partie supérieure (non tireté). Par contre sa prolongation vers le bas en tireté est assez osée, comme la même prolongation du diamètre **200 mm** ⁵⁵.

Cependant, il faut réaliser que la logique impose que les croisements de ces deux dernières courbes du C_x des sphères de diamètres **200** et **400 mm** avec les courbes orange tiretées des Mach ronds se produisent à des Reynolds donnés (calculables facilement à partir du Mach des courbes orange et du diamètre considéré ⁵⁶) : le résultat est que le dessin des [courbes orange et bleu clair](#) est contraint et beaucoup moins libre qu'il y paraît.

Mais revenons à notre Vostok. Nous avons dessiné sur le graphe ci-dessus en tiretés verts ce qui pourrait être la courbe de son C_x dans la plage de Reynolds entourant les **10 millions** ⁵⁷.

→ à **Mach 0,2**, c'est-à-dire au Reynolds de **11 millions**, nous sommes immédiatement à droite d'une zone aveugle du graphe de Miller et Bailey. On peut cependant imaginer que le C_x du Vostok se situe un peu au-dessus de la courbe jaune, un peu au-dessus de **0,2**.

→ à **Mach 0,3** (au Reynolds de **16,4 millions**), on peut imaginer que le C_x est entre **0,3** et **0,4**, du moins si l'on se fie à notre prolongation de la courbe rouge (en [tiretés orange](#)) à ce Mach (prolongation ici très risquée).

→ pour les Mach supérieurs à **0,3**, à savoir **M 0,6** et au-dessus jusqu'à **M 1,8** on peut sans doute tabler sur une remontée progressive du C_x vers une valeur tournant autour de l'unité comme indiqué sur le deuxième [graphe de Miller et Bailey](#)...

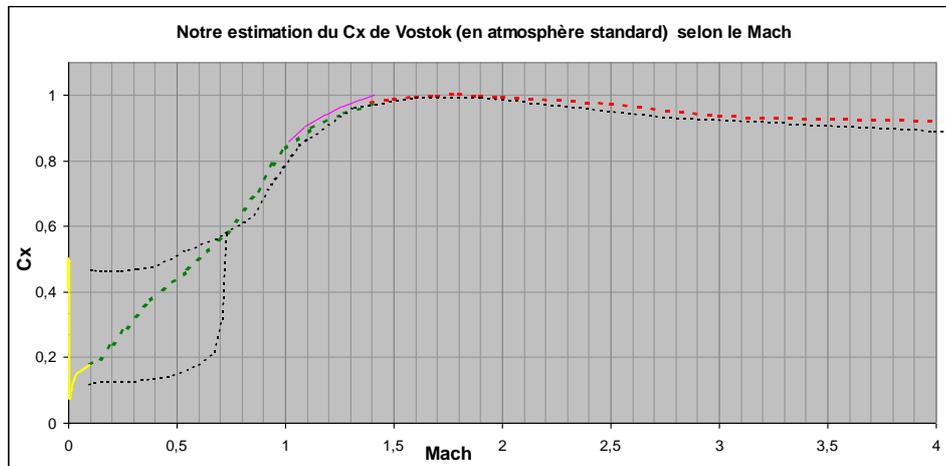
⁵⁵ On connaît cependant l'abscisse où ces deux courbes rejoignent la courbe jaune, cette courbe étant supposée être celle valable pour **M 1**.

⁵⁶ Par exemple, le croisement de la courbe du diamètre **200 mm** avec la courbe **M 0,3** doit se faire au Reynolds de **0,3*340 m/s*0,2 m*70000**, soit **Re = 1,43 millions** (ce calcul n'étant légitime qu'en atmosphère *standard*).

⁵⁷ De même, cette courbe verte rejoint la courbe jaune à **5,47 millions**.

→ au-dessus de **M 1,8**, nous avons déjà dit que le C_x de la sphère tend asymptotiquement vers la valeur théorique de **0,92** qu'elle atteint vers **M 3**⁵⁸...

Cette estimation du C_x de Vostok (en atmosphère standard) donne quelque chose comme les courbes en tiretés verts et rouges ci-dessous :



La courbe fuchsia, reproduite ici pour comparaison, représente le C_x des sphères de diamètre supérieur à **200 mm** entre **M 1** et **M 1,4** tel que [dessiné](#) par Miller et Bailey.

La courbe jaune, à l'extrême gauche est la courbe analytico-empirique de Clift, Grace et Weber (dite aussi [courbe standard](#)) : elle nous montre que la crise du C_x du Vostok se produit vraiment à vitesse très basse (sous parachute, ainsi que nous l'avons dit)...

Les différentes inflexions de notre courbe verte dans sa partie basse proviennent probablement des différents choix de courbes que nous avons effectués dans Word sur le [graphe extrapolé](#) de Miller et Bailey ; nous laissons ces inflexions comme aveux de nos difficultés.

Les courbes en tiretés noirs sont les courbes d'Hoerner (fig. 6 p 322 de l'[édition française](#) de Drag), légèrement corrigées d'une singularité par Clift, Grace et Weber :

En dessous de **M 0,75**, coexistent la branche souscritique (la plus haute, pour les sphères de petit diamètre qui atteignent de forts Mach avant d'atteindre le Reynolds critique) et la branche supercritique (la plus basse, pour les sphères de grand diamètre qui vivent la transition de leur Couche Limite et la crise de leur C_x avant de s'engager dans les affres transsoniques).

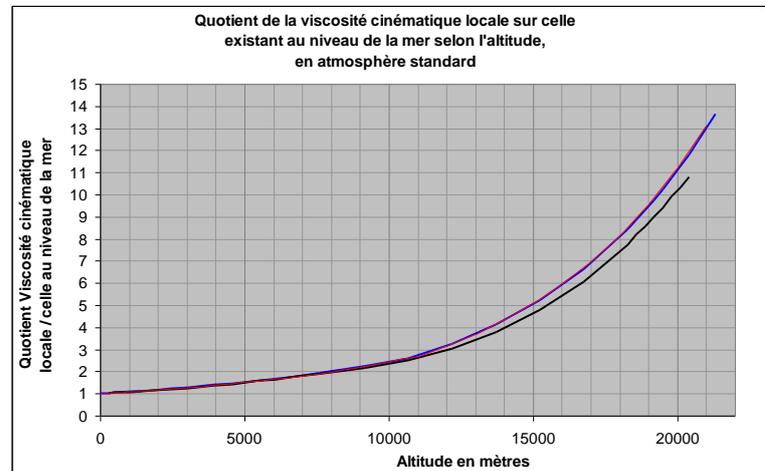
À notre sens, cette branche basse (supercritique) a été relevée sur des sphères de trop faibles diamètres pour décrire correctement la montée du C_x du Vostok avec le Mach que montre, ci-dessus, notre courbe tiretée verte et bien sûr le [graphe extrapolé](#) de Miller et Bailey.

On peut quand-même apprécier la proximité du reste de la courbe d'Hoerner avec la nôtre.

⁵⁸ À basse comme à haute altitude, donc à masse volumique de l'air quelconque (mais pas à très haute altitude en atmosphère raréfiée).

Insistons sur le fait que tous ces calculs sur le vaisseau Vostok ont été faits avec un état de surface considéré comme lisse et avec la viscosité cinématique et la célérité du son existant au niveau de la mer ⁵⁹), or le Reynolds d'un écoulement de vitesse donnée dépend de la viscosité cinématique du fluide.

Voici des modélisations de l'évolution, en fonction de l'altitude, du rapport Viscosité cinématique locale / Viscosité cinématique au niveau de la mer :



La courbe noire est une évolution dudit rapport en atmosphère moyenne donnée par les ballonistes de Planète-Sciences dans [ce document](#).

La courbe bleue est tirée d'un [document](#) australien qui présente l'atmosphère standard internationale (ISA).

En trait fin rouge est notre calcul de la même évolution d'après la formule de Sutherland et la régression des fuséistes donnant la Masse Volumique de l'atmosphère selon l'altitude ⁶⁰. Nous avons prolongé cette régression (valide jusqu'à **11 000 m**, limite de la stratosphère), par une autre très seyante jusqu'à plus de **20 000 m**. ⁶¹.

Il est visible sur ce graphe qu'entre l'altitude **zéro** et l'altitude **20 000 m**, la viscosité cinématique est, en atmosphère standard, multipliée par **10** ou **11** (selon les courbes). Le nombre des Reynolds d'un écoulement en altitude en est donc divisé par le même facteur et est donc plus faible qu'un écoulement de même vitesse près du sol.

Cependant, nous avons [vu ici](#) que le C_x marque une certaine insensibilité au Reynolds aux Mach transsoniques et supersoniques...

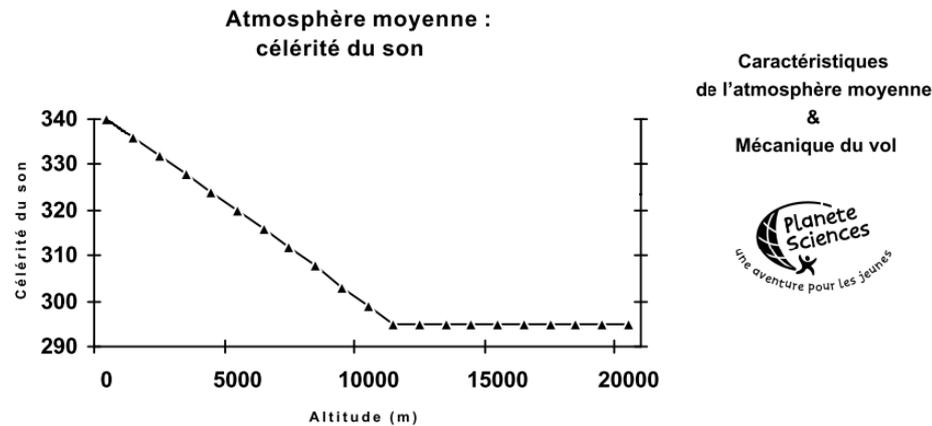
Quant à la célérité du son (qui sert de référence au nombre de Mach), elle varie avec la température de l'air, celle-ci variant elle-même, comme on le sait, avec l'altitude :

⁵⁹ La masse volumique de l'air est déjà plus faible de **10 %** à **1000 m**.

⁶⁰ Pour l'estimation de cette masse volumique, les fuséistes utilisent l'approximation hyperbolique suivante :

$$\rho_{(h)} = \rho_0 (20000 - h) / (20000 + h) \text{ avec } h \text{ en mètres et } \rho_0 = 1,225 \text{ kg/m}^3.$$

⁶¹ Cette régression est : $\rho = 1,6834 * \rho_0 * \text{EXP}(-0,000158 * h)$, h étant toujours l'altitude en mètres.



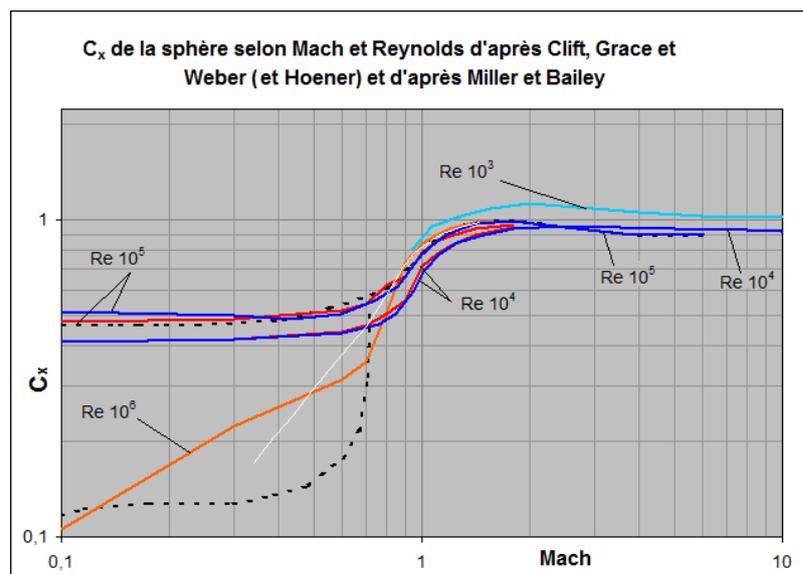
Comme on le voit, cette variation reste cependant modérée (-13% de **zéro** à **11 000 m**), du moins dans l'atmosphère moyenne prônée par Planète-Sciences.

L'un dans l'autre donc, notre proposition d'évolution du C_x de Vostok, bien qu'elle soit basée sur des Reynolds et des Mach ramenés au niveau de la mer s'avère donc assez parlante...

Autres apports :

Clift, Grace et Weber, dans la partie supersonique de leur ouvrage, n'utilisent pas les chiffres obtenus par Miller et Bailey au Reynolds du million⁶². Cela peut s'expliquer par le fait que les travaux de tous ces auteurs sont contemporains (1978 pour les deux publications).

Clift et coll. dressent par contre, p 276 de leur ouvrage, les courbes des C_x selon le Mach pour différents Reynolds, donc deux Reynolds qui nous intéressent (10^4 et 10^5). Ce sont les courbes bleu dense ci-dessous :



⁶² Ils se limitent au Reynolds de 10^5 alors que Miller et Bailey ont bien documenté le Reynolds 10^6 .

Ces courbes bleu dense font à peu près jeu égal avec celles relevées par Miller et Bailey (en rouge).

En bleu clair est la courbe proposée par Clift, Grace et Weber pour le Reynolds de 10^3 (qui transcrit le comportement de très petites sphères, par exemple **0,4 mm** à **M 0,1** et encore plus petites aux Mach plus forts).

Nous présentons également sur ce graphe la courbe orange captée sur [le graphe](#) de Miller et Bailey pour le Reynolds 10^6 : elle montre une progression assez régulière du C_x selon le Mach.

On remarque que cette courbe orange est très différente des deux autres jeux de courbes rouges et bleues. C'est normal dans la mesure où les Reynolds 10^4 et 10^5 sont tous deux souscritiques et correspondent donc à des C_x très forts à faibles Mach : Encore une fois on peut dire que ces sphères connaissent les affres transsoniques avant même de vivre la transition de leur Couche Limite et la chute du C_x qui y est liée.

Par contre la courbe orange du Reynolds 10^6 est supercritique : les sphères qu'elle représente connaissent les affres de la compressibilité alors qu'ils ont déjà subit leur crise du C_x avec la chute qui s'ensuit.

Sur le graphe ci-dessus, les courbes orange, bleue et rouge pour le Reynolds 10^5 se rejoignent pour faire jeu presque égal à partir de **M 0,85** comme remarqué [plus haut](#) ; ce regroupement des courbes est représentatif d'une certaine insensibilité du C_x au Reynolds et au Mach en supersonique, au moins à partir du Reynolds de 10^5 .

En tiretés noirs sur ce même graphe sont les deux courbes sous et supercritique d'Hoerner déjà montrée.

Nous nous sommes posé la question de savoir si le type de graphe [ci-dessus](#) (celui de Clift et coll.) permettait la représentation du C_x de sphères de diamètres donnés selon leur Mach.

La réponse est oui. Nous montrons sur le graphe ci-dessus, sous la forme de la [courbe blanche](#), l'exemple d'évolution du C_x d'une sphère de **100 mm** selon son Mach.

Contrairement au type de [graphe](#) utilisé par Miller et Bailey, cette courbe blanche n'est pas traversière par rapport aux autres (et peut donc se confondre avec celles-ci en transsonique et supersonique⁶³) : c'est en cela que le [graphe de Miller et Bailey](#) est d'une lecture plus pratique, surtout si l'on s'intéresse à la Traînée de sphères de diamètre donné (ce qui est le cas en général).

Bernard de [Go Mars !](#)
le 15/10/2014

⁶³ C'est normal puisqu'à partir de **M 0,85** le C_x des sphères de diamètre supérieur à **12,5 mm** est quasiment [insensible au Mach et au Reynolds](#).

BIBLIOGRAPHIE ET LIENS :

Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung", von L. Prandtl aus Hannover, Verhandlungen des III. Internationalen Mathematiker Kongresses, Heidelberg, 1904, S. 484-491, numérisé par Google :
<http://ia700307.us.archive.org/18/items/verhandlungende00krazgoog/verhandlungende00krazgoog.pdf>

Une autre version des minutes du congrès de 1904 :
VERHANDLUNGEN DES DRITTEN INTERNATIONALEN MATHEMATIKER-KONGRESSES
IN HEIDELBERG VOM 8. BIS 13. AUGUST 1904.
<http://www.mathunion.org/ICM/ICM1904/ICM1904.ocr.pdf>
(le texte fondateur de Prandtl se trouve à la page 484)

La traduction états-unienne d'une édition de 1927 de ce texte de 1904 de Prandtl :
NACA Technical Memorandum 452
<http://hdl.handle.net/2060/19930090813>

PRANDTL AND THE GÖTTINGEN SCHOOL, Eberhard Bodenschatz and Michael Eckert :
<http://www.cambridge.org/aus/catalogue/catalogue.asp?isbn=9780521149310>, extrait de : "A Voyage
Through Turbulence", edited by, P. A. Davidson, Y Kaneda,
H.K. Moffatt & K.R. Sreenivasan, Cambridge University Press, Oct. 2011
<http://www.cambridge.org/aus/catalogue/catalogue.asp?isbn=9780521149310>

FLUID-DYNAMIC DRAG , S. F. HOERNER
HOERNER FLUID DYNAMICS , P.O. Box 21992 , Bakersfield, CA 93390
présenté souvent comme la bible de l'aérodynamique est disponible ici :
hoernerfdy@sbcglobal.net
<https://oscommerce.darcorp.com/>

Une traduction française de cet ouvrage, "Résistance à l'avancement dans les fluides", a été réalisée :
S. F. Hoerner, Gauthier-Villars éditeurs Paris 1965:

TESTS OF SPHERE WITH REFERENCE TO REYNOLDS NUMBER, TURBULENCE AND
SURFACE ROUGHNESS, S. Hoerner, NACA TM N° 777
<http://ntrs.nasa.gov/search.jsp?R=19930094640>

EXPERIMENTS ON THE FLOW PAST SPHERES AT VERY HIGH REYNOLDS NUMBERS
by Elmar Achenbach, J. Fluid Mech. (1972), vol. 54, part 3, pp. 565-575
<http://journals.cambridge.org/action/displayFulltext?type=1&fid=372596&jid=FLM&volumeId=54&issueId=03&aid=372595&bodyId=&membershipNumber=&societyETOCSession=#>

THE EFFECTS OF SURFACE ROUGHNESS AND TUNNEL BLOCKAGE ON THE FLOW PAST
SPHERES,
by Elmar Achenbach, J. Fluid Mech. (1974), vol. 65, part 1, pp. 113-125
<http://journals.cambridge.org/action/displayFulltext?type=1&fid=386399&jid=FLM&volumeId=65&issueId=01&aid=386398&bodyId=&membershipNumber=&societyETOCSession=#>

THE RESISTANCE OF SPHERES IN WIND TUNNELS AND IN AIR
D. L. Bacon and E. G. Reid, NACA Report N° 185
<http://naca.central.cranfield.ac.uk/reports/1924/naca-report-185.pdf>

TESTS OF SPHERES WITH REFERENCE TO REYNOLDS NUMBER, TURBULENCE, AND
SURFACE ROUGHNESS, by S. Hoerner, NACA TM N° 777
http://digital.library.unt.edu/ark:/67531/metadc63443/m2/1/high_res_d/19930094640.pdf

TURBULENCE FACTORS OF N.A.C.A WIND TUNNELS AS DETERMINED BY
SPHERE TESTS, Robert C. Platt, NACA REPORT N° 558
<http://hdl.handle.net/2060/19930091633>

BUBBLES, DROPS, AND PARTICLES
R. Clift, J. R. Grace and M. E. Weber, ACADEMIC PRESS 1978
<http://public.beuth-hochschule.de/~s38803/Clift%20R.,%20Grace%20J.R.,%20Weber%20M.%20E.pdf>

DATA CORRELATION FOR DRAG COEFFICIENT FOR SPHERE, Faith A. Morrison
www.chem.mtu.edu/~fmorriso/DataCorrelationForSphereDrag2013.pdf.

ON THE REDUCTION OF DRAG OF SPHERE BY NATURAL VENTILATION,
by G. K. SURYANARAYANA, INDIAN INSTITUTE OF SCIENCE BANGALORE (INDIA), 1995

LA RÉSISTANCE DE L'AIR, examen des formules et des expériences,
par G. Eiffel, Dunod et Pinat, Paris 1910.
<http://cnum.cnam.fr/DET/8CA400.html>

RÉSUMÉ DES TRAVAUX EXÉCUTÉS PENDANT LA GUERRE AU LABORATOIRE
AÉRODYNAMIQUE EIFFEL, 1919
(encore non disponible sur le Web)

AERODYNAMIC DRAG OF MODERN SOCCER BALLS, Takeshi Asai et Kazuya Seo
<http://www.springerplus.com/content/2/1/171>

SPORTS BALL AERODYNAMICS, Rod Cross, Physics Department, University of Sydney,
<http://www.physics.usyd.edu.au/~cross/TRAJECTORIES/Sports%20Balls.pdf>

DETERMINING AERODYNAMIC PROPERTIES OF SPORTS BALLS IN SITU, by
JEFFREY RYAN KENSRUD
baseball.physics.illinois.edu/KensrudThesis.pdf
ou encore :
http://www.dissertations.wsu.edu/Thesis/Summer2010/j_kensrud_052110.pdf

Module 1 de l'UEE d'Arts & Métiers ParisTech : SIMULATION DES SYSTÈMES FLUIDES (SISYF),
AÉRODYNAMIQUE FONDAMENTALE, Chapitre 4 : LA COUCHE LIMITE EN
AÉRODYNAMIQUE, par Jean-Christophe ROBINET, Christophe CORRE 2009 – 2010
http://sin-web.paris.ensam.fr/IMG/pdf/Aero_2009_CL.pdf

SPHERE DRAG MEASUREMENTS WITH THE NAL 60CM MSBS,
Hideo SAWADA, Tetsuya KUNIMASU, Shinichi SUDA :
https://www.jstage.jst.go.jp/article/jwe/29/1/29_1_98_129/.pdf

NAL 60CM MAGNETIC SUSPENSION AND BALANCE SYSTEM,
Hideo Sawada, Shinichi Suda, Tetsuya Kunimasu, JAXA, the Institute of Space Technology and
Aeronautics (ISTA)
http://www.icas.org/ICAS_ARCHIVE/ICAS2004/PAPERS/182.pdf

DEVELOPMENT OF A LOW ELECTRIC POWER 40 CM CLASS MAGNETIC SUSPENSION AND
BALANCE SYSTEM,
Yoshiyuki KAWAMURA, Tomoyasu TAKENAGA, Jong-bin OH, Takaomi TAKAHASHI, Chang-ki
KWON, Taketo MIZOTA
https://www.jstage.jst.go.jp/article/jwe/29/1/29_1_98_117/.pdf

SPHERE DRAG AT MACH NUMBERS FROM 0.3 TO 2.0 AT REYNOLDS NUMBERS
APPROACHING 10^7
by Donald G. MILLER and Allan B. BAILEY
J. Fluid Mech. (1979), vol. 93, part 3, pp. 449-464
<http://dx.doi.org/10.1017/S0022112079002597>

Les textes essentiels de l'association INTER ACTION :
<http://inter.action.free.fr/> ,

et spécialement :

L'AÉRODYNAMIQUE & L'ORIGINE DES TRAÎNÉES PARASITES
<http://inter.action.free.fr/publications/aero-trainees/aero-trainees.pdf>

Les textes de notre page Physique de la fusée :
<http://perso.numericable.fr/fbouquetbe63/gomars/physique.htm>

et en particulier :

LE REYNOLDS DES CORPS VOLANTS (NATURELS OU FAITS DE MAIN D'HOMME)
http://perso.numericable.fr/gomars/reynolds_corps_volants.doc

AÉRODYNAMIQUE DES CORPS D'EIFFEL
http://perso.numericable.fr/gomars/aero_corps_d_eiffel.doc

ainsi que :

LA COUCHE LIMITE ET SON ÉQUATION INTÉGRALE DE VON KÁRMÁN
http://perso.numericable.fr/gomars/equat_integ_karman.doc

CARACTÉRISTIQUES DE L'ATMOSPHÈRE MOYENNE & MÉCANIQUE DU VOL, document PLANÈTE-SCIENCES :
http://www.planete-sciences.org/rhone/IMG/pdf/Caracteristiques_atmosphere_meca_vol_ballon.pdf

AERODYNAMICS FOR STUDENTS, PROPERTIES OF THE ATMOSPHERE :
www.aerodynamics4students.com
ou :
http://aerodynamics.aeromech.usyd.edu.au/atmosphere_w.php?page=6&