

QUELQUES UTILISATIONS SIMPLES DU THÉORÈME DE BERNOULLI.

Ce texte comporte des facilités de navigation interne.

Si vous le lisez dans une visionneuse de pdf, vous y trouverez sans doute un bouton « Retour à l'emplacement précédent », par exemple. Sinon, le raccourci clavier Alt+flèche gauche produit souvent le ce résultat.

L'adresse où ce texte est téléchargeable dans sa dernière version pdf est :

https://gomarsfusées.eu/gomars/qq_utilisations_bernoulli.pdf

Version du 04/03/26

I EXPÉRIENCE DE LA MAIN DANS UN COURANT D'EAU

Lors d'un voyage au Portugal, nous avons découvert le site de Fecha de Barjas, Vilar da Veiga, et en particulier ses très jolies cascades nommées *Tahiti*. (Cascatas Tahiti) :



L'image ci-dessus représente la cascade à un moment où elle ne comportait que deux arceaux. Il convient de préciser le rôle de ces arceaux en acier : ils permettent d'assurer les personnes au moment de leur traversée du courant d'eau, dès lors que s'il dérapent sur le rocher glissant ils se fracassent les os en contrebas (ce qui est arrivé précédemment).

Voici une vue générale des lieux avec votre serviteur (en chemise bleue et couvre-chef) :



L'une des cascades naissait d'un fort courant d'eau glissant sur un rocher lisse.

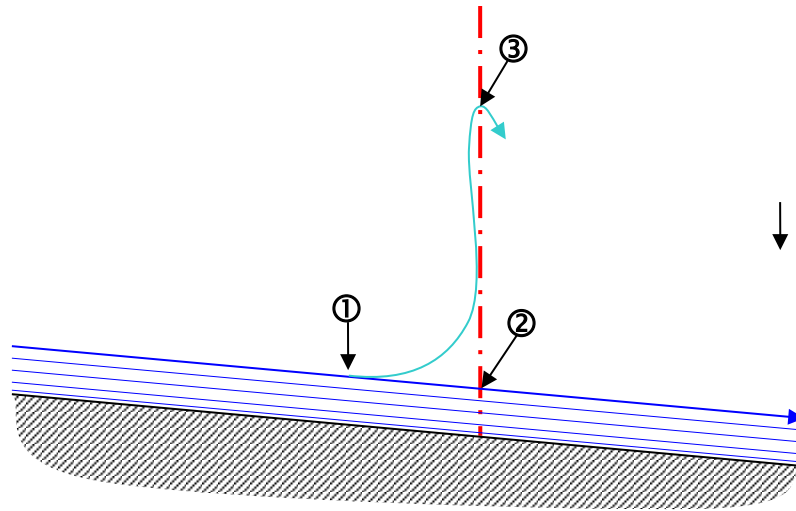
En observant cet écoulement nous notons la présence de jaillissements verticaux sur certains obstacles placés dans le courant. Nous avons alors l'idée de créer de tels jaillissements en plongeant notre main dans l'écoulement :



(image tirée de notre animation publiée aux WikimdiaCommons : https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Bernoulli_dans_un_courant_d%27eau.gif)

Nous vint alors évidemment l'idée que la hauteur du jaillissement vertical est liée à la vitesse de l'eau à l'endroit où plonge la main (ne serait-ce que parce que, si la vitesse était nulle, il n'y aurait pas de jaillissement).

Schématisons l'écoulement comme suit :



Sur ce schéma, l'écoulement d'eau en l'absence de la main est en bleu dense ; le jaillissement d'eau dû à la présence de la main est en bleu plus clair.

L'obstacle que représente la main est symbolisé par le trait d'axe rouge.

En visant l'utilisation classique du Théorème de Bernoulli, nous pouvons écrire les caractéristiques des deux points ① et ③ de l'écoulement :

$$[P_1 = 0 ; z_1 = 0 ; V_1]$$

$$[P_3 = 0 ; z_3 ; V_3 = 0]$$

Comme on le voit, nous avons négligé la Pression Atmosphérique, ou plutôt nous l'avons prise comme nulle (adopter une valeur littérale P_a aurait donné les mêmes résultats, ce qui aurait prouvé que cette Pression Atmosphérique n'intervient pas).

Le Théorème de Bernoulli exprime la conservation de la densité volumique d'énergie totale des particules d'eau au long d'une ligne de courant ; cette densité volumique d'énergie totale est la somme de la densité volumique d'énergie de pression, de la densité volumique d'énergie cinétique et de la densité volumique d'énergie potentielle de gravité. Cette conservation de la densité volumique d'énergie totale s'écrit :

$$P + \frac{1}{2} \rho V^2 + \rho g z = \text{Constante}$$

En appliquant cet énoncé en chacun des points ① et ③ de notre [schéma](#), on obtient :

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho V_1^2 + \rho g z_1 = P_3 + \frac{1}{2} \rho V_3^2 + \rho g z_3$$

...ou, puisque nous avons déjà exprimé certaines caractéristiques P_i , z_i et v_i :

$$\frac{1}{2} \rho V_1^2 + \rho g z_1 = \rho g z_3$$

...ou encore :

$$V_1^2 = 2 g (z_3 - z_1) \quad \text{équation (10)}$$

D'où l'on tire :

$$V_1 = \sqrt{2 g (z_3 - z_1)}$$

Nous progressons dans notre démonstration : la pente du courant par rapport à l'horizontale est faible, de sorte que $(z_3 - z_1)$ est presque la hauteur du jaillissement d'eau au-dessus de la surface de l'eau du fait de la présence de la main.

Cependant on gagnerait à prendre comme critère de mesure la hauteur $(z_3 - z_2)$, le point ② apparaissant sur notre schéma comme étant à la surface de l'écoulement en l'absence de la main et le point ③ étant comme précédemment le point le plus haut atteint par l'eau en la présence de la main.

À tout hasard, rédigeons l'équation de Bernoulli pour les deux points ① et ② :

$$\frac{1}{2}\rho V_1^2 + \rho g z_1 = + \frac{1}{2}\rho V_2^2 + \rho g z_2$$

On tire de cette égalité, comme P_2 est également nul :

$$V_1^2 = V_2^2 + 2 g (z_2 - z_1)$$

Si l'on place cette valeur de V_1^2 dans notre équation (10) ci-dessus, on trouve :

$$V_2^2 + 2 g (z_2 - z_1) = 2 g (z_3 - z_1)$$

Soit, très simplement :

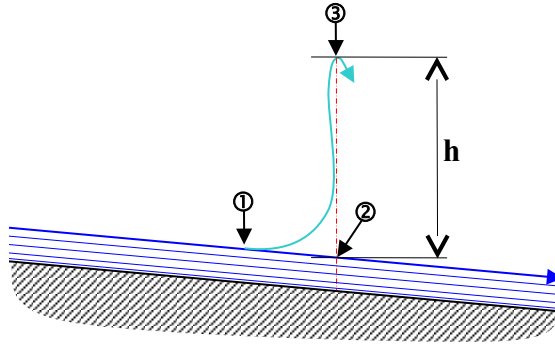
$$V_2^2 = 2 g (z_3 - z_2)$$

...ou encore :

$$V_2 = \sqrt{2 g (z_3 - z_2)}$$

...les symboles V_2 , z_2 et z_3 étant certaines caractéristiques des points ①, ② et ③ de notre schéma.

Cet encadré est le résultat que nous cherchions à démontrer, la hauteur $z_3 - z_2$ étant la hauteur **h** du jaillissement d'eau au-dessus de la surface libre de l'eau en l'absence de la main mais à la verticale de cette main (donc sur le trait d'axe rouge ci-dessous :) :



Application numérique :

Nous mesurons sur l'animation (ou le vidéo) une hauteur **h** de **14 cm**. Cette hauteur du jaillissement d'eau promet, selon l'encadré [ci-dessus](#), une vitesse de **1,66 m/s**.

Remarques sur cette démonstration :

Le lecteur attentif aura sans doute remarqué que notre calcul fait appel à deux cas fort différents de l'écoulement :

- le cas où la main fait obstacle à l'écoulement et où l'on peut mesurer l'altitude atteinte par le jaillissement de l'eau (celle du point ③) ;
- le cas où la main ne fait pas obstacle à l'écoulement et où l'on peut mesurer l'altitude de la surface libre de l'eau (celle du point ②).

On peut même considérer que l'on utilise le Théorème de Bernoulli *à travers le temps*, ce temps s'étendant de la date de la situation *sans main* -où l'on mesure h_2 - à la date de la situation *avec main* -où l'on mesure h_3 -.

C'est normal, dans la mesure où ce Théorème de Bernoulli est justement un théorème qui prend acte de la constance de l'énergie totale d'une particule à un instant t_1 et l'énergie totale de la même particule à un instant t_2 .

Lorsque l'écoulement étudié est stationnaire (ou considéré comme tel, en moyenne), les particules de fluide qui partent d'un certain point effectuent toutes le même trajet. On peut donc utiliser le Théorème de Bernoulli soit dans le temps, soit dans l'espace (c-à-d entre deux abscisses sur une même ligne de courant).

Autres remarques :

→ Les calculs ci-dessus ont été fait en négligeant l'action de l'air sur l'eau et l'action du substrat sur l'écoulement d'eau (le rocher, sur lequel doit se former une Couche Limite turbulente classique) ;

→ La valeur [encadrée](#) que nous trouvons pour la vitesse du courant d'eau (soit $V_2 = \sqrt{2 g (z_3 - z_2)}$) peut bien-sûr être retrouvée en calculant la vitesse verticale qu'une particule d'eau à la surface du courant (sans la main) doit posséder pour être projetée verticalement à la hauteur $(z_3 - z_2)$. Cette particule d'eau pourrait d'ailleurs être

remplacée par un caillou ou n'importe quel objet puisque les lois de la gravité sont les mêmes pour tous les corps (du moins lorsque l'action de l'air peut être négligée).

Il est d'ailleurs plus facile, le mouvement d'un objet étant symétrique par rapport à son apogée, de considérer cet objet comme étant abandonné sans vitesse au sommet de sa trajectoire (ce qui est vraiment le cas). L'utilisation des lois découvertes par Galilée, à savoir :

$$h = \frac{1}{2} g t^2 \text{ et } v = g t$$

...permettent d'écrire :

$$h = \frac{1}{2} V^2/g$$

...soit

$$V = \sqrt{2gh}$$

...h étant ici la hauteur de chute mesurée depuis l'apogée.

En 1732, soit quelque six années avant que Bernoulli ne pose son fameux théorème (en 1738, date de publication de *Hydrodynamica*), Henri Pitot en avait déjà pressenti une des composantes en écrivant, dans le [mémoire](#) qui décrit son fameux *tube de Pitot* :

**Donc l'eau doit monter
dans le Tuyau de notre Machine par la force d'un courant,
précisément à la hauteur d'où elle auroit dû tomber pour
former ce courant.**

Source : Gallica ¹

Quant à la paternité de la phrase ci-dessus de Pitot, on sait qu'elle peut être largement partagée (par Torricelli, entre autres génies²).

Voici une représentation, augmentée par nous (en rouge), de ce fameux **tube de Pitot** (que celui-ci appelle *Machine*) :

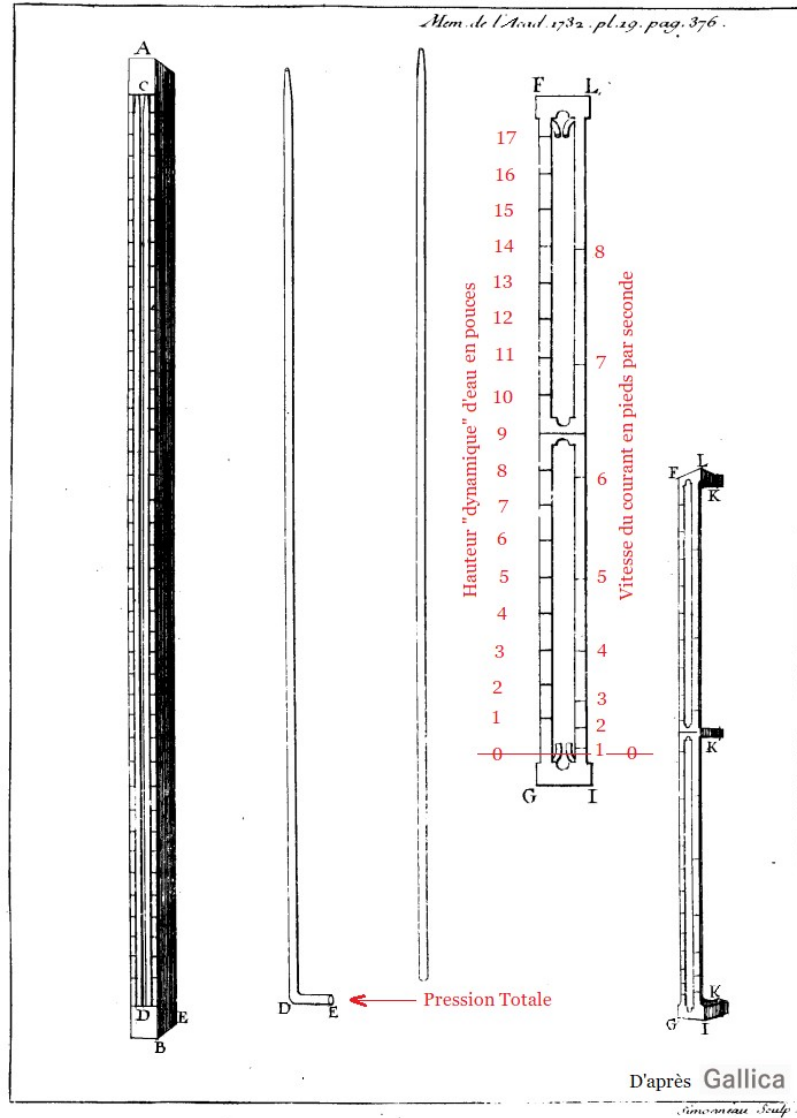
¹ « Donc l'eau doit monter dans le Tuyau de notre Machine par la force du courant précisément à la hauteur d'où elle aurait dû tomber pour former [un] courant [de cette vitesse]. »

²M. Strubel, un ami professeur de Physique me fait remarquer qu'Evangelista Torricelli a écrit la phrase suivante : « Je suppose que les eaux qui sortent avec violence, ont au point de leur sortie la même impétuosité, ou le même degré de vitesse, qu'auroit acquis un corps pesant ou une goutte de la même eau, si elle estoit tombée naturellement, de la plus haute surface de la même eau, jusques à l'ouverture par où elle sort. » Evangelista Torricelli, *De Motu Aquarum* (1644). Voir aussi [Archive.org à ce lien](#).

Machine pour mesurer la vitesse des Eaux courantes, & le sillage des Vaisseaux.

Par M. PITOT.

CONSTRUCTION



Cette image (tirée de <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k35294/f543.item.langFR>) a été versée par nous aux Wikipédia Commons (https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Tube_de_Pitot_description.png).

Nous y avons apporté des informations en rouge. Comme on le voit, l'appareil est constitué d'un prisme triangulaire en bois (dessin de gauche), l'une des faces de ce prisme étant creusée pour accueillir les deux tubes représentés plus à droite. La prise de Pression Dynamique (ouverture E) est située sur l'arête opposée du prisme.

Une règle coulissante (représentée de face plus à droite et en perspective à l'extrême droite) transporte l'origine des mesures à la surface de l'eau lorsque les points D, B et E sont immergés pour mesurer la vitesse de l'eau à une certaine profondeur dans un courant.

Bien sûr, aussi bien Bernoulli que Pitot négligent les frottements visqueux du fluide dans leurs calculs (on dit que l'équation de Bernoulli vaut pour des fluides *non*

visqueux, encore appelés *fluides parfaits* ³). Dans le calcul de Pitot, cependant, les frottements n'interviennent pas puisque, dans ses deux *tubes*, l'eau est à l'arrêt et ne peut donc perdre d'énergie en friction : les hauteurs d'eau dans les deux *tubes* de la *machine* de Pitot sont donc assez bien représentatives de la Pression Dynamique et de la Pression Statique du courant à la hauteur de son ouverture (à certaines erreurs près qui seront corrigées par Darcy et plus tard par Prandtl).

Néanmoins, Henri Pitot, qui a aussi rapproché la vitesse du courant d'un fleuve de la hauteur dont ce courant descend (c.-à-d. l'altitude de sa source) note, dans son [mémoire à l'Académie des Sciences](#) :

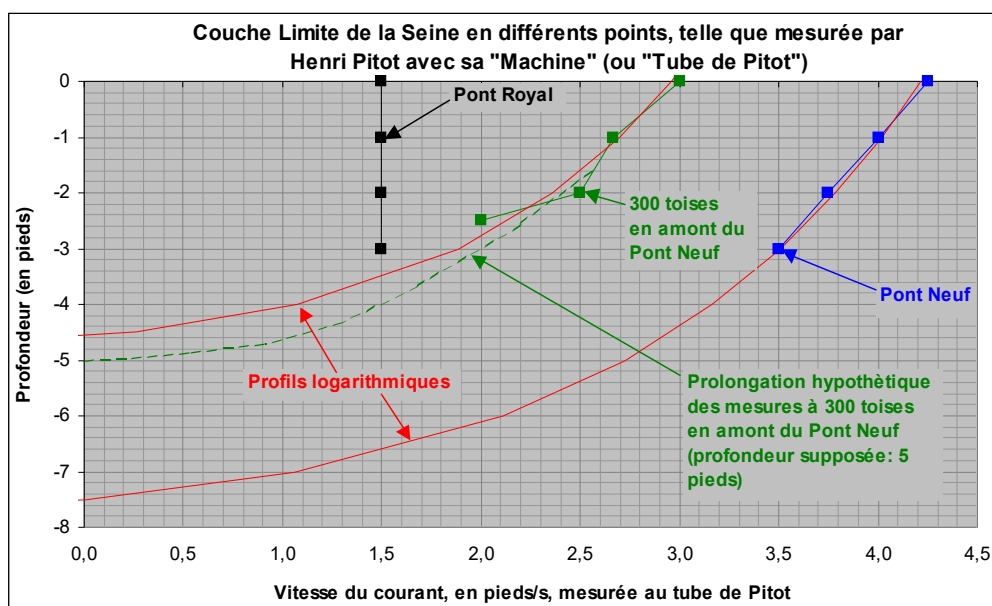
« [...] il est vrai, comme je crois l'avoir démontré dans un Mémoire en 1730, que [la quantité du frottement des eaux contre le fond ou le lit et les bords des Fleuves] est prodigieuse, et il est heureux qu'elle le soit, car sans les frottements, les Fleuves et les Rivières ne seraient pas navigables, en voici une preuve bien sensible : Si l'on calcule par les principes du mouvement des eaux la vitesse que [...] les fleuves doivent prendre par leur chute de la hauteur de leur source, en faisant abstraction des frottements, on trouvera toujours cette vitesse vingt fois et souvent plus de trente fois plus grande que celle que les eaux des mêmes Fleuves ont réellement ; ainsi sans les frottements presque toutes les eaux courantes seraient des torrents affreux dont on ne tirerait aucun avantage. »

De fait, si l'on reprend [notre formule](#) (qui est bien-sûr également celle de Pitot) on trouve, la Seine prenant sa naissance à l'altitude de **446 m**, qu'elle devrait avoir à son embouchure une vitesse de **93,5 m/s** (soit **337 Km/h**) alors qu'on lui attribue un courant de **1 à 2 Km/h** allant jusqu'à **5 ou 7 Km/h** à l'occasion des grandes crues. ⁴

Henri Pitot, muni de sa *Machine* (que l'on nommera plus tard le *tube de Pitot*) effectua plusieurs relevés de vitesse de la vitesse de la Seine à Paris. Il donne ces vitesses dans [son mémoire](#). Nous en avons tiré le graphe suivant :

³ Pratiquement, cela impose que l'équation de Bernoulli ne soit appliquée qu'en dehors de la Couche Limite des corps ou des conduits ou canaux.

⁴ Quant à la Loire, sa naissance à **1404 m** d'altitude lui donnerait, sans frottements, une vitesse de **166 m/s**, soit **600 Km/h**.



Les vitesses mesurées (en pieds par seconde) sont les marques carrées pleines noires, vertes et bleu dense. Rappelons que la vitesse de la Seine est de **1 à 2 Km/h** en dehors des temps de crues, ce qui fait de **0,9 et 1,8 pieds/s** en ordre de grandeur (en considérant les pieds du texte de Pitot comme des pieds médiévaux anglais actuels).

Il semble qu'au Pont Royal, la profondeur soit trop grande pour que le ralentissement de l'eau avec la profondeur soit sensible (à la profondeur atteinte par la *machine*, **3 pieds**). Par contre, au Pont Neuf⁵, le ralentissement est sensible à mesure que l'on s'enfonce.

Toujours sur le [même graphe](#), nous avons dessiné une prolongation raisonnable du profil de vitesses à **300 toises** en amont du Pont Neuf (tirés verts), en imaginant que la profondeur de l'eau y était de **5 pieds**⁶. De même, nous avons dessiné deux profils logarithmiques pour les profondeurs **5 et 8 pieds** (en rouge) pour le Pont Neuf et pour **300 toises** en amont de ce pont (puisque que de tels profils sont souvent proposés pour les Couches Limites).

Ces courbes nous paraissent assez réalistes : les mesures réalisées par Pitot pourraient donc être les premières mesures (incomplètes) de la Couche Limite d'un fleuve.

À notre sens, Henri Pitot a d'ailleurs bien pressenti l'existence de cette Couche Limite puisqu'il écrit dans le même mémoire :

⁵ La toise correspond toujours à six pieds.

⁶ À Paris, la profondeur de la Seine est réputée varier entre **3,40 et 5,70 m**, soit entre **10 et 17 pieds** (source Wikipédia). Il faudrait prendre langue avec des mariners pour vérifier qu'il existe un seuil à **300 toises** en amont du Pont Neuf (soit 585 m)...

J'ai fait de semblables expériences au Pont au Change, au Pont Notre-Dame & dans plusieurs autres endroits de la Rivière, mais je n'entre pas ici dans un plus grand détail : je dirai seulement en général que j'ai presque toujours trouvé que la vitesse de l'eau alloit en diminuant vers le fond. Il y a même des endroits où l'eau est presque dormante vers le fond, sur-tout aux endroits où l'eau est fort rapide à la surface, & où il y a peu de profondeur.

Source : Gallica ⁷

Il faut noter que la dernière phrase signifie que même avec un fort courant, l'eau est « presque dormante vers le fond », ce qui implique que le freinage est *presque complet* sur le fond (en fait, on le sait à présent, il est complet).

Le même Pitot précise même ailleurs dans son texte :

« Puisque les eaux sont ralenties si considérablement par les frottements de leurs lits et des bords, il est naturel de penser que celles qui sont près du fond sont plus ralenties que celles qui sont à la surface. »

Un autre grand précurseur, Henry Philibert Gaspard DARCY améliorera sensiblement les qualités du Tube de Pitot ⁸ puis, en collaboration avec Henri BAZIN, mettra l'appareil en application, pour en tirer des distribution de vitesses dans les conduites ou canaux :

Fig. 6
Position de l'opérateur et de
son aide tenant le tube

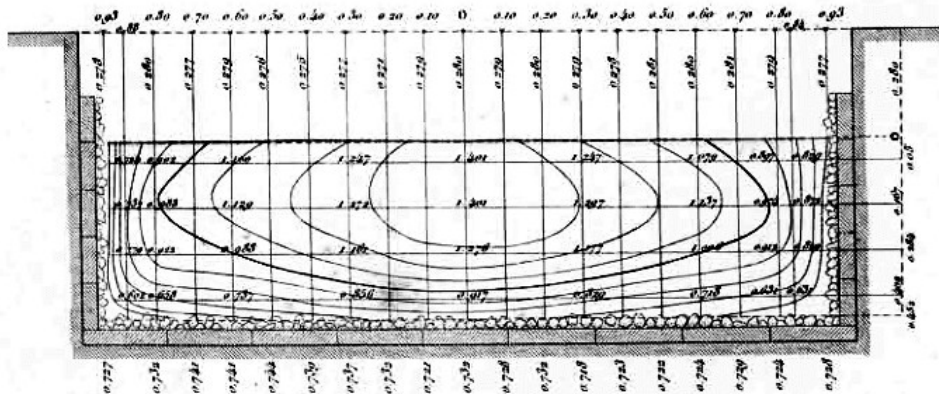


Source : Gallica <http://hydraulica.grenet.fr/files/original/edf854925e861f0ba101027781c36f.pdf>

⁷ « J'ai fait de semblables expériences au Pont au Change, au Pont Notre-Dame et dans plusieurs autres endroits de la Rivière, mais je n'entre pas ici dans un plus grand détail : je dirai seulement en général que j'ai presque toujours trouvé que la vitesse de l'eau allait en diminuant vers le fond. Il y a même des endroits où l'eau est presque dormante vers le fond, surtout aux endroits où l'eau est fort rapide à la surface et où il y a peu de profondeur. »

⁸ En particulier, il fera en sorte que les prises de Pressions Dynamique et Statique soient placées aux bons endroits de la partie immergée de l'appareil.

Fig. 3.
Canal rectangulaire revêtu de gros gravier (Voir Série N°5)
Série N°57 — Expérience N°1.



Source : Gallica <http://hydraulica.grenet.fr/files/original/eff0549d5e8fafc0ba101027f781cb6f.pdf>
soit : <http://hydraulica.grenet.fr/files/original/eff0549d5e8fafc0ba101027f781cb6f.pdf>
ou encore : <http://hydraulica.grenet.fr/book-reader/index/image-proxy/?image=0064&id=295&scale=1>

Darcy écrit d'ailleurs :

« Pitot fit, en 1782, à l'Académie des sciences, une communication qui parut intéresser cette assemblée; il lui présenta un appareil destiné à mesurer en un point donné la vitesse d'un des filets fluides dont un courant se compose. Cet « appareil lui permit d'entrevoir un fait qui s'explique facilement aujourd'hui, mais que l'on contestait alors sous l'inspiration d'une théorie inexacte, savoir : que la vitesse de l'eau décroissait en se rapprochant du fond ou des rives.

L'appareil de Pitot réduit à sa plus simple expression théorique pourrait être formé d'un seul tube en verre, horizontalement recourbé à son extrémité; l'eau qui pénètre par la partie horizontale exposée au courant se tient en équilibre dans le tube vertical à une hauteur au-dessus de la surface du courant égale à $h = V^2 / (2g)$, V étant la vitesse du filet fluide que l'on considère. Lorsque l'on est placé dans des circonstances qui permettent de mesurer exactement h , on déduit en effet V de cette hauteur avec une précision très suffisante. Mais, en général, le clapotement de l'eau contre la surface extérieure du tube et son armature ne permet point de comparer le niveau de l'eau dans le tube à celui de la surface du courant, troublée par la présence de l'appareil; les ondulations qui courent toujours à la surface suffiraient d'ailleurs pour rendre bien difficile la mesure précise du niveau de cette surface. C'est pour éviter cette difficulté, que Pitot avait sans doute appréciée dans les premières expériences qu'il fit pour juger de la valeur de son appareil, qu'il ajouta le second tube vertical dont l'extrémité inférieure trempait dans le courant. Pitot croyait que le niveau de l'eau dans le tube droit devait être égal à celui de la surface du courant, et qu'ainsi la différence de niveau ou h , hauteur due à la vitesse, pourrait être facilement obtenue. Il y avait là une première erreur. Lorsque l'on plonge un tube droit dans un courant, l'eau dans le tube se tient en contrebas de la superficie du courant d'une quantité en rapport constant avec le carré de la vitesse du filet fluide qui passe sous son orifice inférieur; ainsi, la différence h entre le niveau de l'eau dans les tubes représente une quantité supérieure à la hauteur due à la vitesse réelle du filet fluide considéré. Il y avait donc là une cause d'inexactitude que Pitot n'avait pas pressentie. En second lieu, les oscillations étaient très fortes dans des tubes ainsi disposés, d'autant plus fortes que les orifices avaient tout le diamètre des tubes, et que même on croyait nécessaire de disposer ces orifices en forme d'entonnoir. On voit donc aisément pourquoi le tube de Pitot ne pouvait rendre aucun service pratique; d'abord sa construction reposait sur une erreur de principe, ensuite les oscillations qui avaient lieu dans les tubes ne permettaient pas d'apprécier, principalement dans les vitesses faibles, les différences de niveau cherchées.

Les courbes, ainsi déterminées, donnent immédiatement une idée assez exacte de la répartition des vitesses. Leur figure reproduit en général la forme même du profil transversal du canal. La résistance que la paroi oppose au mouvement du fluide immédiatement en contact

avec elle est en effet la cause immédiate de l'inégale répartition des vitesses. Cette résistance retarde le mouvement de la couche voisine de la paroi; celle-ci, à son tour, retarde le mouvement de la couche suivante, et ainsi de suite. On doit donc s'attendre à retrouver dans les courbes d'égale vitesse la forme plus ou moins altérée du profil transversal. En jetant les yeux sur les planches XIX à XXIII, on voit qu'il en est ainsi. »

(voir aussi : Annales des ponts et chaussées. Mémoires et documents relatifs à l'art des constructions et au service de l'ingénieur, Éditeur : Carilian-Goeury (Paris), Date d'édition : 1858 :

<https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k408489d/f354.item>

...ou encore : <https://hdl.handle.net/2027/wu.89090522475?urlappend=%3Bseq=80>)

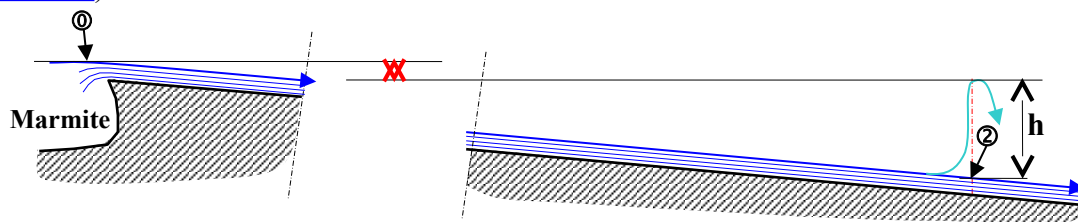
Mais revenons à notre chute d'eau nommée Tahiti, au Portugal :

Autres remarques :

→ Il aurait été possible de vérifier la vitesse de l'écoulement d'eau en y jetant des feuilles mortes ou des pétales de fleur et en filmant leur déplacement le long d'une règle graduée.

→ On aurait de même pu mesurer la vitesse de l'eau de surface par utilisation d'un tube de Pitot : on aurait alors pu voir que la hauteur de l'eau dans le tube de Pitot était la même que la hauteur d'eau jaillissant devant notre main.

→ Il est probable, malgré le freinage dû à la Couche Limite se formant sur le rocher, que la vitesse du courant trouvée (**1,66 m/s**) soit assez proche de celle qu'on calculerait en prenant comme origine du courant d'eau (avec une vitesse nulle) le point ① situé au déversoir de la marmite qui alimente le courant d'eau de notre expérience (ce point ① est représenté ci-dessous et on aperçoit la marmite sur la photo [précédemment montrée](#)) :



Il résulte de cette hypothèse que la différence d'altitude entre ce point ① et le point ② du schéma ci-dessus est un peu supérieure (de la cote rouge ci-dessus) à la hauteur **h** du jaillissement (c-à-d les **14 cm** utilisés dans notre application numérique ci-dessus) ⁹.

⁹ Le Théorème de Bernoulli ne prend pas en compte l'influence de la Couche Limite d'un écoulement sur un corps. Nous y revenons plus avant dans ce même texte.

II HAUTEUR ATTEINTE PAR UN JET D'EAU



Un exemple bien connu de jet d'eau est le jet d'eau de Genève. Celui-ci est alimenté par l'eau du lac Léman et surtout par l'électricité qui fait tourner deux puissantes pompes « d'une puissance totale de **1 000 kW** » (données Wikipédia).

La hauteur moyenne de ce jet est donnée pour **140 m** et sa vitesse à la sortie de la buse à **200 km/h**, soit **55,55 m/s**.

On peut appliquer à ce dispositif touristique l'équation de Bernoulli :

On écrit alors, en prenant, sur une même ligne de courant (l'axe du jet, par exemple), le point **0** à la sortie de la buse et le point **s** au sommet du jet :

$$P_0 + \frac{1}{2}\rho V_0^2 + \rho g z_0 = P_s + \frac{1}{2}\rho V_s^2 + \rho g z_s$$

À la sortie de la buse, comme au sommet du jet, la pression est égale à la Pression Atmosphérique (pourvu que l'on néglige la faible variation de celle-ci avec l'altitude).

Si l'on prend z_0 comme l'origine des hauteurs (z_s devenant **H**, la hauteur du jet) on obtient :

$$\frac{1}{2}\rho V_0^2 = \rho g H$$

...puisque V_s est nulle au sommet du jet.

Il en ressort :

$$V_0 = \sqrt{2gH}$$

...qui donne la relation entre la vitesse à la sortie de la buse et la hauteur du jet, du moins si l'on néglige l'action en traînée de l'air sur le jet.

Mais, quitte à négliger l'action de l'air sur le jet, il est beaucoup plus intuitif de calculer la relation *Hauteur du jet / Vitesse en sortie de buse* par les équations de la chute libre la vitesse acquise par un corps (une pierre, par exemple) tombant de la hauteur atteinte par le jet (c-à-d **140 m**¹⁰). Les équations du mouvement uniformément accéléré de ce corps en *chute libre* (équations posées par Galilée) donnent alors également comme vitesse : $V_0 = \sqrt{2gH}$. On en retire la vitesse acquise par le corps (qui est celle de l'eau à la sortie de la buse) : **52,41 m/s**, soit **188,7 km/h**.

¹⁰ En l'absence d'action de l'air, le mouvement de ce corps en descente sera symétrique au mouvement en montée ; et comme le calcul est plus simple à la redescente...

On note avec ce calcul simple que, lorsque la pression d'un fluide ne varie pas (comme par exemple à la surface libre d'un liquide), l'équation de Bernoulli se ramène à une simple application des lois de Galilée sur les mouvements gravitaires...

Il est d'ailleurs instructif de réaliser que dans les ondulations de la surface libre de l'eau (même importantes comme celles qu'occasionnent les vagues), les particules de fluides restent à pression constante ¹¹, ce qui signifie que les prescriptions de vitesse et de hauteur de l'équation de Bernoulli se ramènent à celle de Galilée pour les mouvements uniformément accélérés.

Pour en revenir au cas particulier du jet d'eau de Genève, on peut émettre l'hypothèse que la différence entre les **200 km/h** annoncés et cette vitesse calculée de **188,7 km/h** soit due à la friction de l'air sur les contours du jet (nous étudions ce phénomène dans le chapitre qui suit).

Une autre cause d'erreur dans nos calculs est que l'eau du jet est teintée en blanc du fait de la présence dans l'eau de « millions de minuscules bulles d'air » ; cet emport de bulles d'air diminue la Masse Volumique de l'eau du jet alors que cette diminution de la Masse Volumique n'est pas prise en compte par notre résultat $V_0 = \sqrt{2gH}$.

Par contre, la présence de ces bulles d'air peut donner à l'eau, à la sortie de la buse, un comportement pneumatique qui n'est peut-être pas décrit correctement par l'équation de Bernoulli...

Mais quelle est la pression existant dans la buse qui crée le jet d'eau ?

En reprenant l'équation de Bernoulli avant la buse et à la sortie de la buse, on écrit :

$$P_{av} + \frac{1}{2}\rho V_{av}^2 + \rho g z_{av} = P_{ap} + \frac{1}{2}\rho V_{ap}^2 + \rho g z_{ap}$$

...les indice **av** et **ap** caractérisant les points d'une ligne de courant (au centre du flux, par exemple) avant la buse et juste après la buse.

Si l'on admet que la convergent de la buse n'est pas trop haut, $g z_{av} \approx g z_{ap}$. On dégage alors :

$$P_{av} + \frac{1}{2}\rho V_{av}^2 = P_{ap} + \frac{1}{2}\rho V_{ap}^2$$

En admettant que la vitesse V_{av} avant la buse est très faible par rapport à V_{ap} , on trouve, puisque P_{ap} est nulle ¹², que la Pression Statique de l'eau avant la buse est $P_{av} = \frac{1}{2}\rho V_{ap}^2$, c'est-à-dire pour une vitesse annoncée à la sortie de la buse de **55,55 m/s** :

¹¹ Pour la plupart des vagues, on peut considérer que la Pression Atmosphérique est constante du sommet des vagues à leur pied...

¹² En fait cette pression en sortie de buse est la Pression Atmosphérique qui est assez forte sur notre planète. Mais on peut la négliger si on prend cette Pression Atmosphérique comme la valeur **0** des pressions (c'est ce que font les techniciens et les industriels ; même un enfant qui gonfle son vélo le fait par rapport à la Pression Atmosphérique : si il gonfle à **2 10⁵Pa**, c'est **2 10⁵Pa au-dessus de la Pression Atmosphérique** ; il gonfle donc à peu près à **3 10⁵Pa** de pression absolue (par rapport au vide de l'Espace).

$P_{av} = 15,43 \cdot 10^5 \text{Pa}$ soit à peu près **15,43 fois** la pression atmosphérique (le site <http://www.svgw.ch/index.php?id=290&L=1> donne **16 bar**)...

On peut affiner ce calcul en observant que la vitesse V_{av} est reliée à V_{ap} par la loi de conservation des débits. En considérant que le rapport des sections de la buse (donc le quotient de la section avant la buse par la section en sortie de buse) est c , on dégage assez facilement ¹³ que $P_{av} = \frac{1}{2}\rho V_{ap}^2 (1-1/c^2)$. Comme c est probablement de l'ordre de **30 à 100**, cette dernière pression P_{av} ne diffère de celle donnée par le résultat simplifié que de moins d'un millièème %.

D'autres jets d'eau tentent de rivaliser avec celui de Genève. Celui du roi Fahd est donné pour atteindre entre **260 et 312 m**, sa vitesse étant donnée pour **375 km/h** ¹⁴.

III

PARABOLE GRAVITAIRE

En promenade à la montagne, nous sommes tombé sur cette vision curieuse : une descente de gouttière qui laissait s'échapper un joli jet d'eau.



Une question nous vint à l'esprit : Et si ce jet d'eau dessinait précisément une parabole ?

¹³ ...en écrivant que $V_{av} = V_{ap}/c$...

¹⁴ Source Wikipédia.

Quelques années plus tard, nous découvrièmes d'autres jets, créés cette fois volontairement, dans une galerie marchande :



Certains de ces jets d'eau étaient (et sont encore) presque sans défaut, s'étirant avec très peu d'ondulations depuis la buse qui les fait naître jusqu'à leur rencontre avec l'eau du bassin.

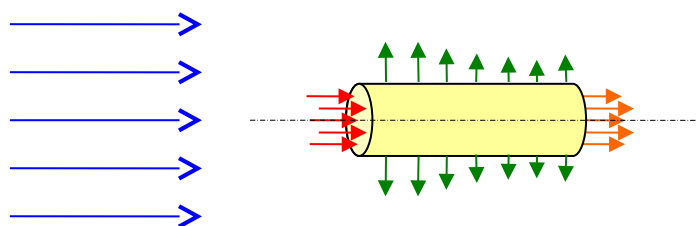
Puisqu'ils sont continus ou presque, que leur forme est presque parfaitement celle d'un cylindre à axe courbe, on peut deviner que la traînée de pression qu'ils suscitent est négligeable : la traînée de pression d'un corps est celle qui agit sur un corps en déplacement du fait des pressions existantes sur sa partie avant ou arrière. Ainsi, sur une sphère (une goutte d'eau, par exemple) la traînée de Pression est très faible sur l'hémisphère avant ¹⁵, et beaucoup plus forte sur l'hémisphère arrière ¹⁶.

Cependant, pour qu'une Traînée de Pression existe, il faut que la surface du corps soit correctement orientée. Par exemple, dans le cas d'un cylindre exposé frontalement à un vent (vent représenté par les flèches bleues ci-dessous), il y a bien une Traînée de Pression sur la face avant : nous avons symbolisé ci-dessous par des vecteurs rouges certaines des surpressions agissant sur la face avant d'un cylindre ¹⁷ :

¹⁵ Ce qui est très contre intuitif puisque l'on assigne souvent à la face avant d'un corps le rôle de « fendre l'air ». Dans les faits, le C_x de la face avant des corps profilés est souvent très faible.

¹⁶ ...à cause de la forte dépression régnant sur cet hémisphère arrière.

¹⁷ Ces surpressions sont les surpressions aérodynamiques dues au vent relatif baignant le cylindre.



Des sous-pressions existent de même sur la face arrière du même cylindre (représentées ci-dessus en orange) : c'est ce qu'on appelle la dépression de culot.

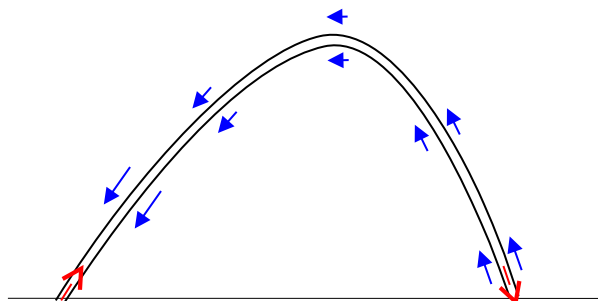
Mais il existe aussi des sous- ou surpressions agissant sur la partie proprement cylindrique du cylindre. Nous avons représentées en vert ci-dessus certaines pressions agissant dans le plan vertical médian du cylindre.

La caractéristique essentielle de ces dernières forces est qu'elles s'annulent deux à deux ! Du moins évidemment lorsque le corps est sans incidence.

Résultat : les forces de pression agissant sur la surface proprement cylindrique (hormis les faces avant et arrière) ne peuvent créer de résultante.

Au bilan des forces de pression d'un cylindre n'apparaissent donc que les forces de pression sur les faces avant et arrière de ce cylindre.

Or chacun des jets d'eau dont nous parlons peut être considéré comme un cylindre à axe courbe, mais sans face avant ni arrière : Nous avons représenté ci-dessous ce cylindre courbe avec, ici et là, le vent apparent subit par certains tronçons de ce cylindre courbe :



On peut donc conclure que ces jets d'eau ne souffrent d'aucune Traînée de pression (ou presque).

Par contre ils souffrent d'une Traînée de friction.

Cette Traînée de friction agit sur la peau du jet parce que cette peau est animée d'une certaine vitesse dans l'air (elle ressent donc un certain vent relatif, variable selon les points).

Calculer cette Traînée de friction dépasse nos compétences. Nous savons juste qu'elle est assez faible.

C'est cette dernière conviction que nous avons mis à l'épreuve en plaçant la photo de l'un des jet comme surface de traçage de notre tableur et en lui faisant dessiner

la parabole qui présente la même tangente à l'origine. Prenons par exemple le jet dont la naissance est représentée ci-dessous :



(les jets de cette fontaine naissent tous, en effet, de buses cachées au fond de cylindres noirs qui dépassent de la surface libre du bassin)

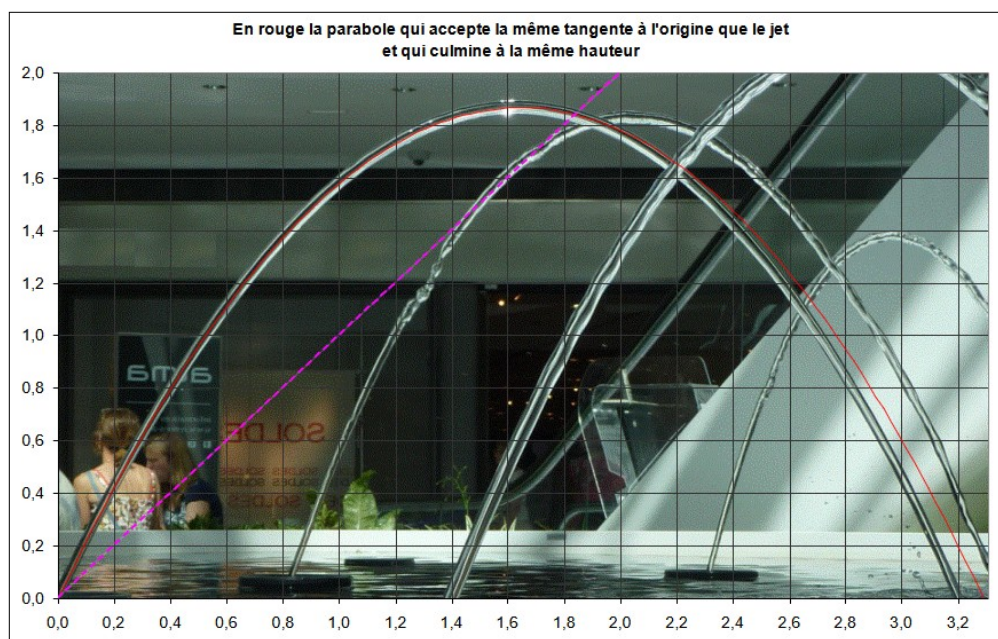
Retournons cette image pour que le jet dessine une courbe qui aille vers la droite (c'est ainsi que l'on dessine souvent les courbes) :



Comme on peut l'apprécier, nous avons placé le tout début (visible) du jet dans le coin en bas et à gauche de notre photo.

On peut également observer que nous avons dessiné sur cette image un trait à 45° blanc (à partir du même coin) : il nous servira à faire en sorte que notre image retrouve ses proportions naturelles dans le graphe de notre tableur.

Plaçons à présent cette photo comme fond de zone de traçage d'un graphe. Réglons les échelles de ce graphe pour que la droite à 45° blanche de la photo soit recouverte par une droite $y = x$ de notre graphe (c'est, ci-dessous la droite à 45° fuchsia en tiretés) :



La courbe rouge est notre parabole de même pente initiale que le jet et de même hauteur de culmination.

Ainsi qu'on le voit, le jet épouse cette parabole mathématique jusqu'à sa culmination, puis se montre freiné par la friction aérodynamique.

À notre sens, le fait que le jet et la parabole ne diverge qu'à la culmination est un hasard (les effets de la friction de l'air se font sentir depuis l'origine du graphe (le début du jet) origine où d'ailleurs ils sont les plus forts (puisque les vitesses sont plus fortes).

La raison pour laquelle le jet d'eau quitte la parabole à son apogée est probablement que nous avons réglé la courbe en observant préférentiellement la zone où jet et courbe culminent.

Expliquons quand-même comment nous avons dessiné [cette courbe rouge](#) :

Nous considérons cette courbe comme la trace laissée dans le plan du graphe par la trajectoire d'un projectile lancé avec une vitesse initiale V_0 et un angle initial α par rapport à l'horizontale (ou l'axe des x) dans un espace sans atmosphère (sans traînée aérodynamique, donc) mais soumis à une accélération de la pesanteur $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

Puis nous avons installé un curseur réglant la pente de la courbe à l'origine et un autre réglant la vitesse initiale du projectile.

Nous avons posé une première variable générale qui est le temps t .

L'abscisse du projectile est alors :

$$x = V_0 \cos(\alpha) t$$

(on note que la projection sur l'horizontale de la vitesse initiale se conserve intégralement : ceci est dû à l'absence d'atmosphère)

L'ordonnée du projectile est alors :

$$y = V_0 \sin(\alpha) t - \frac{1}{2} g t^2$$

De ces deux équations on peut facilement tirer :

$$y = x \tan(\alpha) - \frac{1}{2} \frac{g}{V_0^2} [1 + \tan^2(\alpha)] x^2$$

...qui est évidemment le libellé d'une parabole $y = ax + bx^2$

Sur [notre graphe](#), la pente initiale est de **66,21°** par rapport à l'horizontale (c'est la valeur donnée à α par notre curseur).

Quand à la valeur donnée à la vitesse initiale par le deuxième curseur, il s'avère qu'elle est sans signification ici puisque nous ne connaissons pas l'échelle précise du jet d'eau (ces jets s'élèvent à un mètre de haut à peu près et ont une portée d'à peu près deux mètres).

À la réflexion, nous aurions pu effectuer le même travail et dessiner la même parabole sur un jet d'eau s'élevant à **10** mètres de haut...

On peut d'ailleurs retrouver par le calcul l'abscisse et l'ordonnée du point de culmination de la parabole (en annulant la dérivée de l'équation de cette parabole).

L'altitude de culmination est alors :

$$y_c = \frac{\sin^2(\alpha) V_0^2}{2g}$$

Dans notre cas abscisse et ordonnées de la culmination sont :

$$x_c = 1,645 ; y_c = 1,866$$

Ces valeurs nous apparaissent cependant comme sans signification : elles sont liées au choix des échelles [du graphe](#) au moment de la mise à **45°** de la droite fuchsia tirée (si l'on avait connu l'échelle de la photo, en particulier la hauteur de culmination du jet, on aurait pu choisir des échelles plus conformes à la réalité).

Le grand bénéfice d'une mise à l'échelle conforme du graphe aurait été que notre variable générale t aurait pu représenter réellement le temps (on aurait pu confronter le temps trouvé par le calcul au temps réel mis par une perturbation du jet à parcourir sa trajectoire).

Cette mise à une échelle conforme pourrait être faite par présentation d'une règle graduée à l'appareil photo (règle placée dans le plan vertical du jet considéré).

Peut-on effectuer le même calcul en utilisant le seul théorème de Bernoulli ? :

S'il n'y a pas la Friction de l'air, chacune des lignes de courant du jet est justiciable de la loi de Bernoulli.

Sur la ligne de courant centrale du jet, en particulier, on peut écrire :

$$\frac{1}{2}\rho V^2 + P + \rho gy = Cste$$

On peut facilement admettre que la Pression **P** est nulle au long de toute cette ligne de courant centrale (et même dans tout le jet) (si l'on prend la Pression Atmosphérique comme le point zéro de l'échelle des pressions¹⁸).

On a donc :

$$\frac{1}{2}\rho V^2 + \rho gy = Cste'$$

À l'origine du jet (ou plutôt le coin en bas à gauche de notre captation photographique, où **y** est nul) :

$$\frac{1}{2}\rho V_0^2 = Cste'$$

... **V₀** étant la vitesse du jet à l'origine.

Donc on est en droit d'écrire :

$$\frac{1}{2}\rho V^2 + \rho gy = \frac{1}{2}\rho V_0^2$$

...qui est l'équation de Bernoulli appliquée à notre jet, équation où **V** est la vitesse à un point quelconque d'ordonnée **y** et **V₀** la vitesse du jet à l'origine.

À la culmination on peut bien-sûr appliquer cette équation générale ; donc :

$$\frac{1}{2}\rho V_c^2 + \rho gy_c = \frac{1}{2}\rho V_0^2$$

$$+ gy_c = \frac{1}{2}V_0^2 - \frac{1}{2}V_c^2$$

...soit encore :

$$y_c = \frac{1}{2g} (V_0^2 - V_c^2)$$

C'est tout ce que l'on peut déduire de la loi de Bernoulli !

Il est en effet impossible, à partir de la seule équation de Bernoulli, de déterminer la forme d'une ligne de courant : l'équation de Bernoulli est simplement vérifiée (dans le cas de fluides parfaits) sur une ligne de courant constatée !

¹⁸ Sinon la Pression Atmosphérique (constante dans tout le phénomène) peut être placée au côté de la constante pour donner **Cste'**, ce qui revient au même.

De fait, l'équation générale trouvée ci-dessus :

$$\frac{1}{2}\rho V^2 + \rho g y = \frac{1}{2}\rho V_0^2$$

...comporte deux inconnues (V et y) qui sont donc les deux caractéristiques d'un point quelconque de la ligne de courant considérée dans ce cas simplifié du et d'eau).

Le point de culmination de ce jet n'est qu'un cas particulier du cas général (avec comme caractéristique V_c et y_c).

Donc, nous ne pouvons, à partir seulement de la [dernière équation ci-dessus](#), connaître la valeur de y_c (puisque la V_c , la vitesse du jet à sa culmination nous est inconnue).

Pour aller plus loin, il faut donc introduire dans le calcul une autre caractéristique de ce point de culmination (comme, par exemple, on pourrait apporter la caractéristique d'une vitesse nulle à culmination dans le cas d'un jet parfaitement vertical).

Dès lors que l'on considère comme nulle l'action de l'atmosphère, on peut faire appel à la conservation, par toutes les particules d'eau formant le jet, de leur vitesse horizontale (donnée à l'origine par $V_0 \sin(\alpha)$).

Puisque cette vitesse est conservée, au passage à la culmination toutes les particules montrent la même vitesse de $V_0 \sin(\alpha)$. Cette vitesse est donc V_c dans notre résultat [ci-dessus](#) trouvé avec la seule équation de Bernoulli.

Il en résulte que :

$$y_c = \frac{\sin^2(\alpha) V_0^2}{2g}$$

Ce que nous avons déjà établi [plus haut](#) en nous basant aux seuls enseignement de Galilée et de Newton.

Le problème des distorsions photographiques :

La photo qui sert de fond au graphe et à la courbe mathématique rouge a été réalisée avec l'appareil photo face au jet (dans un plan vertical *médian* perpendiculaire au plan du jet et passant par le point de culmination).

À notre sens, si la photo avait été prise en dehors du plan vertical *médian* défini à l'instant, la parabole quasi-gravitaire du jet aurait été photographiée avec un cosinus supplémentaire (ou une compression des dimensions horizontales du jet), donc un simple changement d'échelle des abscisses. Or une parabole dont on comprime les abscisses reste une parabole (si l'on pose $x = nX$ dans l'équation $y = ax + bx^2 + c$, on obtient encore une parabole en X).

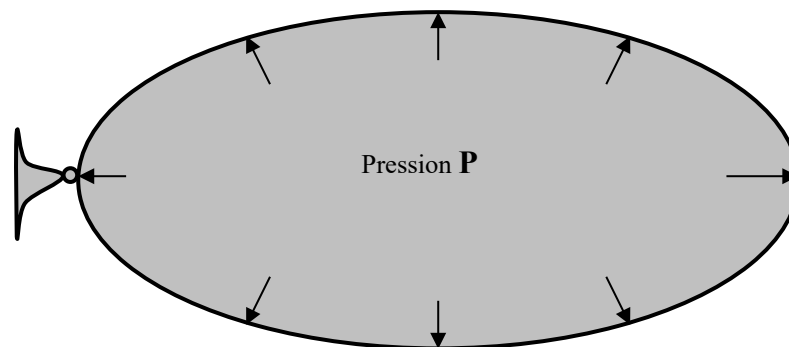
IV VITESSE D'ÉJECTION ET PRESSION INTERNE D'UNE FUSÉE À EAU

(nous reprenons ci-dessous le texte de notre déjà ancienne publication : [LA PARTIE CACHÉE DE LA FORCE](#))

$$V = \sqrt{\frac{2P}{\rho}}$$

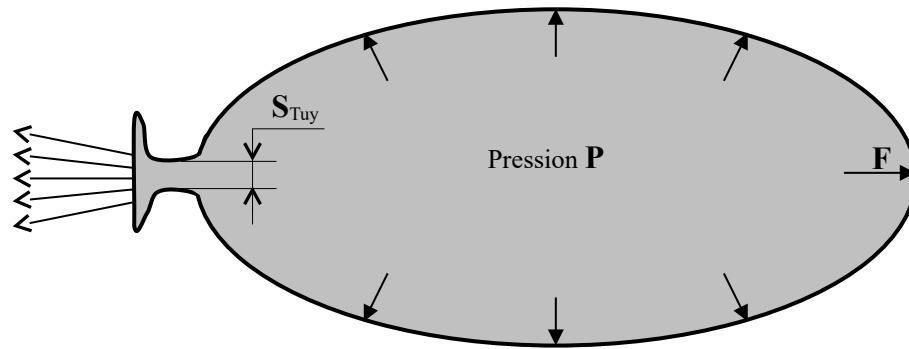
$$V_{\text{éject}} = \sqrt{\frac{2P}{\rho \left[1 - \frac{D_{\text{Tuy}}^4}{D_{\text{Bouteille}}^4} \right]}}$$

Lorsque l'on explique le principe de Réaction qui propulse nos fusées depuis le sol jusqu'à l'Espace, on fait souvent appel au dessin qui montre les forces de pression s'exerçant à l'intérieur de l'enveloppe d'un ballon de baudruche gonflé et noué :



On fait alors remarquer que l'ensemble de ces forces de pressions s'annule, deux à deux ou quatre à quatre. C'est ce qui explique qu'un ballon gonflé et noué peut être posé sur une table sans manifester aucune tendance à se déplacer.

Puis on dénoue par la pensée le ballon de baudruche : son embouchure s'en trouve ouverte, ce qui constitue une tuyère, par laquelle l'air tend à être expulsé :



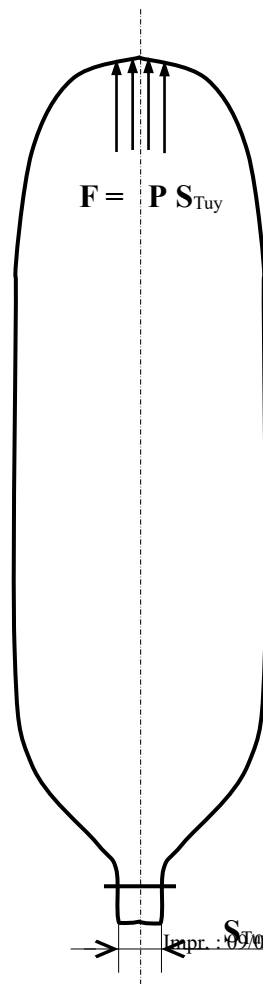
La force de pression F , s'exerçant du côté opposé à la tuyère, n'est plus équilibrée par la force qui s'exerçait sur l'aire de l'embouchure lorsque celle-ci était nouée.

La force (à un moment donné) qui naît de ce déséquilibre est facilement calculable : c'est $P S_{Tuy}$, du moins si l'on nomme P la Pression Interne (au même moment) du ballon et S_{Tuy} la section de la tuyère.

On en tire la conclusion que le ballon est propulsé par la force de Réaction :

$$F = P S_{Tuy}$$

Ainsi explique-t-on souvent le principe de la Réaction, par ce raisonnement qu'on pourrait nommer *du déséquilibre des forces internes*. Nous verrons plus loin que ce faisant on commet une erreur d'un facteur 2.



Mesurée à cette aune, la force de Réaction qui propulse une fusée à eau est également :

$$F = P S_{Tuy}$$

(si P est la Pression Interne du ballon (à un certain moment) et S_{Tuy} la section de la tuyère au même moment)

De fait, lorsque l'on lance une fusée à eau *sèche* (c-à-d sans emport d'eau, la *Masse d'Appui* de la fusée se résumant à l'air comprimé qu'elle emporte), on peut très bien assimiler la fusée à air au ballon de baudruche.

Et lorsque l'on charge la même fusée d'une certaine masse d'eau, dans la mesure où l'on peut dire qu'il n'existe pas à l'endroit du goulot de surface matérielle où puisse s'appliquer la pression interne de la

fusée, on peut également penser qu'existe le même déséquilibre entre les forces internes et que la force de Réaction qui en résulte vaut :

$$\mathbf{F} = \mathbf{P} \mathbf{S}_{\text{Tuy}} .$$

Or, lorsque l'on étudie la Réaction par une autre voie, une voie *externe* cette fois-ci, celle de la conservation des Quantités de Mouvements, on trouve pour la force de Réaction de la même fusée à eau (ou à air) :

$$\mathbf{F} = \mathbf{q} \mathbf{V}_{\text{éject}}$$

avec :

\mathbf{q} le débit massique (en **Kg/s**) de la Masse d'Appui, c-à-d l'eau ou l'air,
et $\mathbf{V}_{\text{éject}}$ la vitesse d'éjection (en **m/s**) de cette Masse d'Appui.

Cette formule est extrêmement simple, mais pourtant ne nous méprenons pas : c'est bien celle qu'utilisent les ingénieurs, qu'ils conçoivent des moteurs de vaisseaux spatiaux thermochimiques (à poudre ou à ergols liquides) ou à *plasma* ¹⁹ ! ²⁰

À titre d'exemple, si l'on applique cette formule au premier étage de la fusée lunaire Saturne V qui consommait **2085 tonnes** d'ergols en **150 secondes** (soit un débit moyen de **13,9 t/s**), l'éjection de toute cette masse se faisant à **2700 m/s**, on trouve une poussée de :

$$13900 \text{ Kg/s} \times 2700 \text{ m/s} = 37,53 \cdot 10^6 \text{ N}$$

...chiffre qui doit être comparé avec la poussée annoncée de **3402 Tonnes-force**, soit **33,37 10^6 N** : on est bien dans le même ordre de grandeur. La différence étant sans doute imputable à l'imprécision de nos données.

Mais revenons à nos fusées à eau...

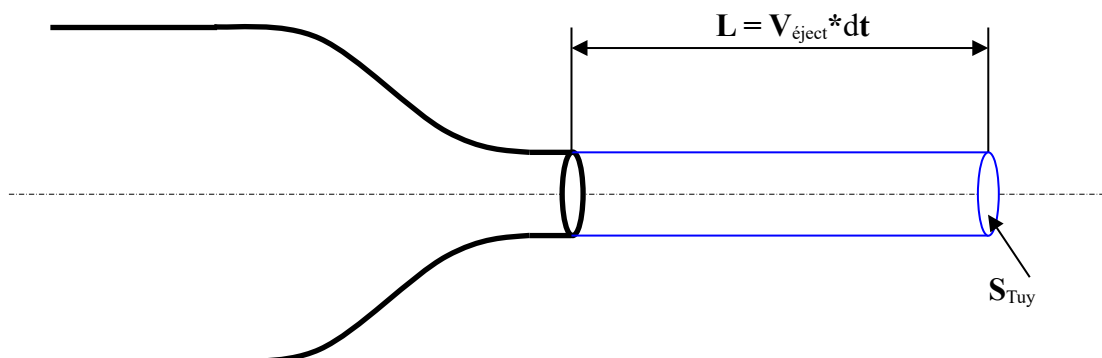
À ces engins à *réaction froide*, la formule $\mathbf{F} = \mathbf{q} \mathbf{V}_{\text{éject}}$ est également applicable ²¹. Mais que vaut alors le débit massique \mathbf{q} qui y figure ?

¹⁹ ... ces derniers moteurs étant encore appelés *ioniques*.

²⁰ Les ingénieurs complètent juste cette formule d'un terme additif lorsque les gaz propulsifs, à leur sortie de la tuyère, possèdent encore de la pression relativement au milieu ambiant (l'atmosphère ou le vide de l'espace) ; ce terme est : $+(\mathbf{P}_{\text{sortie}} - \mathbf{P}_{\text{ambiante}}) \mathbf{S}_{\text{Tuy}}$, si l'on appelle $\mathbf{P}_{\text{sortie}}$ la pression des gaz à la sortie de la tuyère et $\mathbf{P}_{\text{ambiante}}$ la Pression régnant autour de la fusée.

²¹ ...et là sans aucun additif puisque la pression de la matière éjectée est celle du milieu ambiant...

Reprenons, pour appuyer notre réflexion, le schéma de notre pdf [La Propulsion de la Fusée à Eau](#) :



Et livrons-nous au travail consistant à isoler, par la pensée, l'eau éjectée par la tuyère durant un temps élémentaire de dt seconde.

Cette eau se présente sous la forme d'un gros spaghetti liquide, un cylindre d'eau *extrudé* ²² par la tuyère ²³ :

Si $V_{\text{éject}}$ est la vitesse d'éjection de l'eau, la longueur du spaghetti éjecté pendant cette durée dt est :

$$L = V_{\text{éject}} * dt.$$

Et son volume est $L * S_{\text{Tuy}}$, soit $V_{\text{éject}} * dt * S_{\text{Tuy}}$.

La masse éjectée, quant à elle, est, bien-sûr : $\rho V_{\text{éject}} * dt * S_{\text{Tuy}} \dots$

Pour connaître le Débit Massique q en **Kg/s**, il faut diviser cette masse par le temps dt pendant lequel elle a été éjectée. Ce Débit Massique est donc :

$$q = \rho V_{\text{éject}} S_{\text{Tuy}}$$

L'utilisation de cette valeur du Débit Massique dans la formulation de la Force de Propulsion, à savoir : $\mathbf{F} = q \mathbf{V}_{\text{éject}}$, donne alors :

$$\mathbf{F} = \rho V_{\text{éject}}^2 S_{\text{Tuy}}$$

²² *Extrudé* est bien le terme technique. Les spaghettis sont bien formés par *extrusion*, comme les profilés d'aluminium...

²³ Que l'eau éjectée se présente sous une autre forme (en particulier une forme moins *mathématique*) ne change en rien son volume...

(nous encadrons cette expression parce qu'elle est fondamentale dans la science des fusées)

D'un autre côté, la loi de la Conservation de l'Énergie des particules d'un fluide incompressible (ici l'eau) ²⁴ conduit à la valeur de sa vitesse d'éjection en fonction de la pression à laquelle il est soumis.

Si l'on admet, comme nous l'avons posé, que la fusée est fixe ²⁵, on donne souvent pour simplifier à cette vitesse d'éjection la valeur :

$$V_{\text{éject}}^2 = \sqrt{\frac{2P}{\rho}}$$

... **P** étant la pression de ce fluide à sa surface libre (c-à-d la pression de l'air dans la bouteille).

Mais la vraie valeur de cette vitesse d'éjection, si l'on ne prend pas en compte l'effet de la gravité et de l'accélération sur les particules d'eau, est :

$$V_{\text{éject}} = \sqrt{\frac{2P}{\rho \left[1 - \frac{D_{\text{Tuy}}^4}{D_{\text{Bouteille}}^4} \right]}}$$

...ceci du fait que la surface libre de l'eau n'est pas fixe mais qu'elle est également dotée d'une vitesse vers le bas (voir à ce sujet le [texte](#) d'Alain Juge cité dans nos liens bibliographiques)

Dans l'équation ci-dessus **D_{Tuy}** représente l'aire de la tuyère et **D_{Bouteille}** l'aire de la surface libre de l'eau à l'instant considéré ; cette aire n'est constante que lorsque la surface libre de l'eau se situe dans une portion cylindrique de la bouteille ; pour certaines fusées, ceci est vrai une bonne partie du temps, mais pour des fusées à la silhouette tintinoïde, ce n'est plus vrai. ²⁶

Pour cette raison, nous allons donc **limiter la présente étude à la propulsion des fusées durant la phase où la surface libre de l'eau se situe encore dans la portion cylindrique de leur réservoir** (cela veut dire que cette étude ne traitera pas de la phase pendant laquelle la surface libre de l'eau est dans la partie de forme globalement conique qui précède le goulot).

Sur une fusée ordinaire de **1,5 L**, le diamètre de la tuyère par rapport à celui de la bouteille fait que la différence entre les deux expressions précédentes de **V_{éject}** est de

²⁴ loi dégagée par Daniel Bernoulli ; cette loi impose la conservation de l'énergie totale du fluide, à savoir **P + ½ρV²** .

²⁵ ...c-à-d que l'eau présente au-dessus de la tuyère n'est l'objet d'aucune pression additionnelle du fait de l'accélération de la fusée, cette accélération créant en réalité un surcroît de pression de l'ordre de **15 %**, voir à ce propos notre texte déjà évoqué.

²⁶ Notons d'ailleurs que cette formulation de la Vitesse d'Éjection n'est pas admissible lorsque le diamètre de la surface libre s'approche trop de celui de la tuyère : il faut alors passer à un calcul de la Poussée en *Instationnaire*. Voir à ce sujet notre texte MONTÉE EN VITESSE D'ÉJECTION D'UNE FUSÉE À EAU...

l'ordre de **5 millièmes**²⁷. C'est peu, mais il ne coûte pas grand-chose de prendre la bonne expression.

Nous avons affirmé à l'instant ne pas prendre en compte l'effet que pouvait produire l'accélération de la pesanteur sur ce qu'il est convenu d'appeler *la hauteur de la colonne d'eau* au dessus de la tuyère.

Paradoxalement, puisqu'une fusée en vol est abandonnée à la gravité, cette gravité est sans effet sur le mouvement de ses fluides internes²⁸ ; donc la gravité n'a pas d'action sur sa *colonne d'eau*.

Par contre, une autre accélération, celle de la fusée (et l'on sait que les fusées accélèrent énormément) agit de façon significative sur la colonne d'eau au-dessus de la tuyère.

C'est pourquoi **nous limiterons également cette étude à l'étude des forces internes et externes sur une fusée à eau maintenue au banc d'essais fixe dans une région du monde non soumise à la gravité.**²⁹

Ces limites fixées, nous pouvons revenir vers notre fusée à eau. Le carré de sa Vitesse d'Éjection est :

$$V_{\text{éject}}^2 = \sqrt{\frac{2P}{\rho}}$$

Le simple report de cette vitesse dans notre formulation de la Force de Propulsion $F = \rho V_{\text{éject}}^2 S_{\text{Tuy}}$ conduit à :

$$F = 2 P S_{\text{Tuy}} \frac{1}{\left[1 - \frac{D_{\text{Tuy}}^4}{D_{\text{Bouteille}}^4}\right]}$$

...qui est la force de Réaction propulsant une fusée à eau,
P étant la pression de l'air comprimé
 et **S_{Tuy}** l'aire de la tuyère d'éjection

Si l'on considère que le terme fractionnaire n'introduit qu'une correction de l'ordre de **5 millièmes** dans les cas usuels de fusées de **1,5 L**, on peut donc mémoriser, pour la Force de Poussée des fusées à eau, la valeur :

²⁷ Dans notre texte pdf nous écrivions **2,5 millièmes**. C'est donc le double...

²⁸ De fait, lorsque les moteurs du premier étage d'une fusée s'éteignent, les ergols du deuxième étage se trouvent dans un état proche de l'apesanteur et manifestent une dangereuse tendance à se regrouper en boule au milieu de leurs réservoirs, échappant ainsi à l'action des pompes censées les mettre en présence dans la chambre de combustion...

²⁹ Ainsi que nous l'avons dit, la pesanteur n'agit pas lorsque la fusée est en vol. Mais elle agit sur une fusée au banc d'essais. C'est pourquoi nous devons nous transporter de la sorte dans une région de l'Univers suffisamment à l'écart de tout champ gravitationnel.

$$F = 2 P S_{Tuy}$$

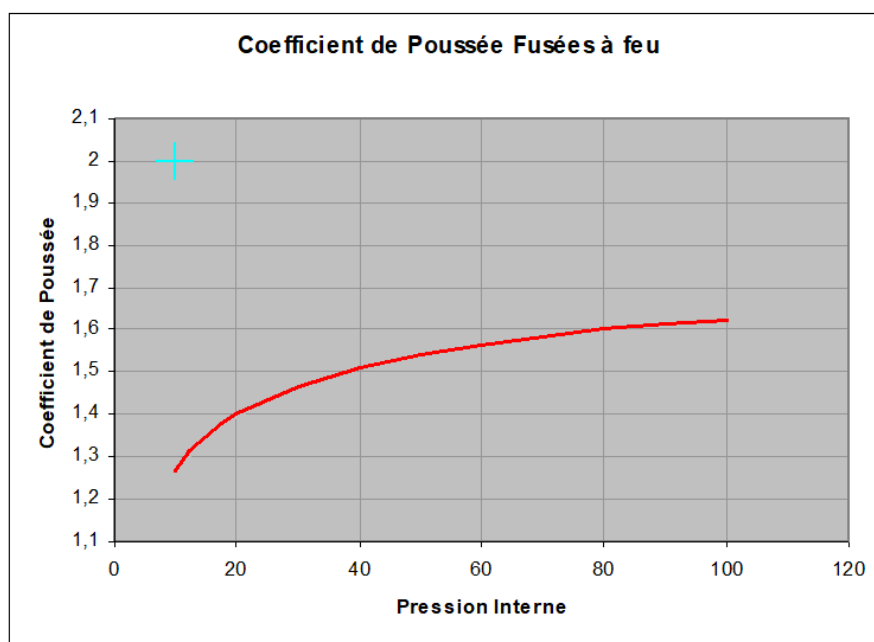
qui est la valeur simplifiée de la force de Réaction propulsant une fusée à eau,
P étant la pression de l'air comprimé
 et **S_{Tuy}** l'aire de la tuyère d'éjection

Nous constatons donc un doublement de la force de propulsion par rapport à la [formulation dégagée par le raisonnement du déséquilibre des forces internes](#) de pression !

Il n'y a d'ailleurs pas que pour la fusée à eau que la force de propulsion est ainsi supérieure au simple produit de la pression interne par la section de la tuyère. Les constructeurs de moteurs de fusées thermochimiques utilisent ainsi un coefficient qu'ils appellent *Coefficient de Poussée* ; ce coefficient pondère le produit **P S_{Tuy}** pour donner la poussée des moteurs (**P** étant la pression régnant dans la chambre de combustion du moteur).

L'existence de ce vocable de *Coefficient de Poussée* nous met à l'aise : nous allons en faire usage également pour nos fusées à eau : nous le symboliserons par **C_f**. Dans ce cas des fusées à eau, nous l'avons vu, la valeur théorique de ce **C_f** est très proche de **2**.

Dans le cas des fusées à feu (thermochimique) ce Coefficient de Poussée est plus faible. Il évolue en fonction de la pression interne du moteur, selon la loi théorique suivante (courbe rouge) :



Ceci pour la théorie ; dans la pratique, le Coefficient de Poussée est un peu plus faible de quelque **5 %** pour les fusées professionnelles.

Nous nous sommes permis de porter sur ce graphe le Coefficient de Poussée des fusées à eau, sans le pondérer non plus d'un quelconque rendement³⁰ : c'est la croix bleu clair dans le cercle rouge. Nous prenons ici ce Coefficient de Poussée comme égal à **2** (à une pression raisonnable de **10 bars**), bien que nous avons démontré ci-dessus deux valeurs pour ce Coefficient de Poussée des fusées à eau : **2** et **1** ...

Ce genre de situation (une dissonance entre les conclusions de deux raisonnements) n'est pas acceptable en science physique. On doit donc admettre que, s'agissant des fusées à eau, l'un des deux raisonnements que nous avons mis en œuvre est erroné...

J'ai cherché longtemps ce qu'il pouvait y avoir de faux dans le *raisonnement du déséquilibre des forces de pression internes*. Sans rien trouver...

Jusqu'au moment où m'est venue une idée : ce raisonnement est exact, mais il ne rend pas compte de toute la réalité des choses !

En effet, le raisonnement du *déséquilibre des forces internes* tel qu'il est pratiqué généralement laisse de côté un autre déséquilibre des pressions sur les parois du réservoir :

Dans le cas des fusées à eau, lorsque les particules de liquide s'écoulent vers la tuyère, elles acquièrent de la vitesse. Et cette vitesse, en application de la loi de Bernoulli, diminue leur pression ; ceci jusqu'à ce que cette pression soit égale, à la tuyère, à la Pression Atmosphérique (c'est-à-dire que leur Pression relative sera divisée par **5** ou par **10** !)...

Nous venons d'écrire que la pression de l'eau diminue continuellement sur son trajet menant à la tuyère, pour atteindre la pression Atmosphérique à cette tuyère.

Dire ceci n'est pas rien, car cette diminution de pression de l'eau va sérieusement modifier l'équilibre des forces interne du réservoir :

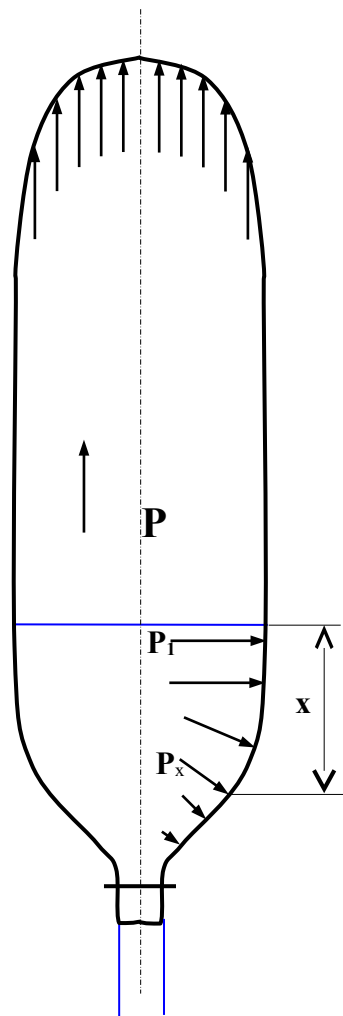
→ d'un côté du réservoir (côté *surface libre de l'eau*) la pression est celle de l'air comprimé ;

→ alors que de l'autre côté, sur la partie du réservoir qui converge vers la tuyère (prenons l'habitude d'appeler cette partie le *convergent*) la pression diminue graduellement pour arriver à la pression ambiante...

Observons plus précisément ce phénomène sur une fusée fixée sur son banc d'essais (elle n'est donc sujette à aucune accélération).

Nous ne nous intéresserons qu'à la partie de la phase propulsive pendant laquelle la surface libre de l'eau demeure dans la partie cylindrique du réservoir et considérerons l'écoulement comme *Stationnaire* :

³⁰ On doit en effet penser que la poussée réelle est plus faible que cette poussée théorique, du fait des frottements visqueux du fluide sur les parois du réservoir et spécialement la tuyère...



À peu de distance sous la surface libre de l'eau, la pression de ce fluide équivaut à la pression P de l'air comprimé.

Mais à mesure que les particules d'eau s'approchent de la tuyère, elles doivent accélérer puisque la section du réservoir leur offre de moins en moins de passage.

Considérons ainsi la pression de deux particules d'eau :

→ la première se situant à la surface libre de l'eau ; cette particule est à la pression $P_1 = P$, et elle est dotée d'une certaine vitesse V_{SL} (SL pour *Surface Libre*)

→ et la deuxième à une certaine profondeur x sous cette même surface libre (elle est à la pression P_x et à la vitesse V_x , puisque elle a déjà accéléré du fait d'une certaine restriction de section).

Nous savons depuis Jacob Bernoulli qu'il y a conservation de l'énergie totale du liquide ; ce qui nous permet d'écrire :

$$P + \frac{1}{2} \rho V_{SL}^2 = P_x + \frac{1}{2} \rho V_x^2$$

Il en résulte que la Pression P_x de l'eau à la profondeur x est :

$$P_x = P - \frac{1}{2} \rho (V_x^2 - V_{SL}^2)$$

Comme la vitesse de la Surface Libre V_{SL} est plus faible que la vitesse à la profondeur x , il y a donc bien diminution de la pression sur le *convergent*) : cette diminution de la pression est due au fait que l'eau accélère depuis la Surface Libre jusqu'à la tuyère...

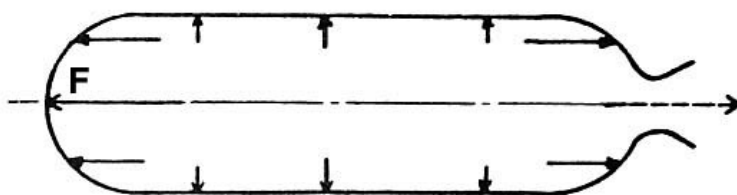
Nous avons donc l'espoir de démontrer que c'est dans cette diminution de la pression des particules d'eau sur le convergent que réside la différence entre les forces de propulsion dégagées par les deux raisonnements (*externe et interne*), à savoir $F = 2 P S_{Tuy}$ et $F = P S_{Tuy}$ (si l'on adopte l'expression simplifiée de ces deux paramètres)

Autrement dit, nous espérons prouver que la dépression de Bernoulli produit une Poussée propulsive très importante, de valeur proche de $P S_{Tuy}$.

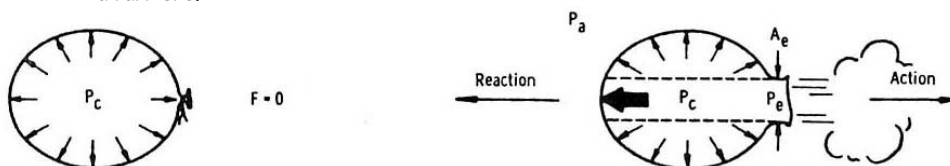
Mais auparavant, refaisons une petite excursion chez les pyro-fuséistes.

Citons des exemples de l'oubli fréquent de cette diminution de pression sur le convergent (ceci sans méchanceté, mais plutôt pour montrer que même les meilleurs se trompent).

Honneur à nos amis Belges du G.E.A. (Groupe d'Études Aérospatiales) : L'arsenal juridique de leur pays ne les prive pas de la possibilité de construire leurs propres moteurs. C'est dire s'ils s'intéressent à la théorie de la tuyère... Dans leur excellent [site](#), on trouve à la page expliquant le principe de la réaction :



La force de propulsion d'une fusée est une force de pression appliquée sur l'avant du propulseur, non équilibrée en raison de l'orifice pratiqué à l'arrière.



http://users.skynet.be/bk263249/fr/moteurs/index_motor.html

Ici, sur le ballon de baudruche dénoué, on évoque en bas à droite le déséquilibre des pressions dans le cylindre théorique prolongeant la tuyère vers l'intérieur (cylindre représenté ci-dessus en pointillés), ce déséquilibre résultant en la force PS_{Tuy} . Et ce faisant on passe sous silence le déséquilibre des pressions tout autour de ce cylindre théorique.

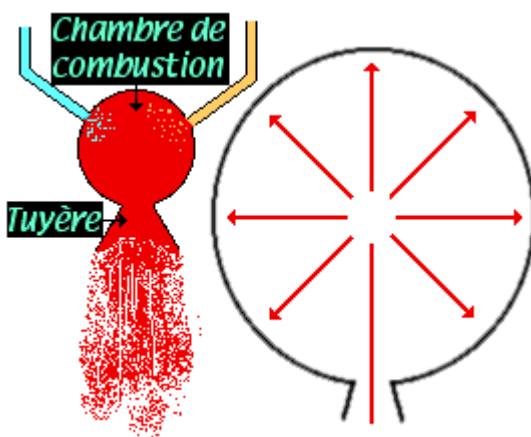
Voici d'autres exemples :

Sur le site également excellent [Ariane5tpe](http://ariane5tpe.free.fr) :



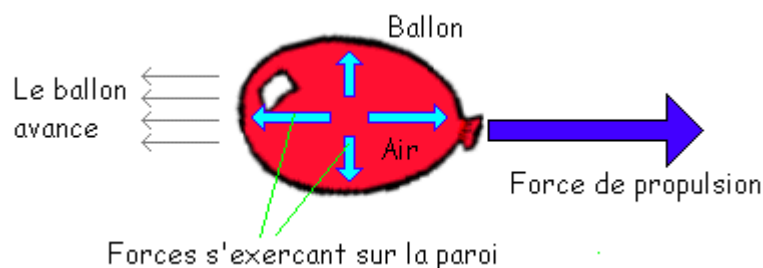
<http://ariane5tpe.free.fr/partie1.htm>

Sur le site : http://ilsera.com/Espace/f.prop_fusees2.php

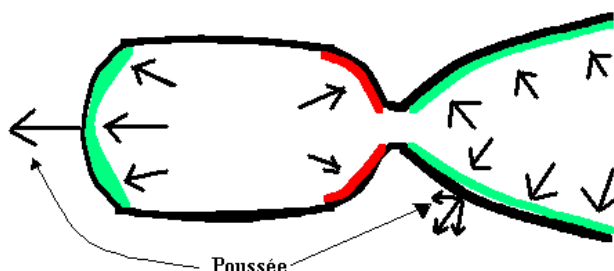


Le texte indique : « Les forces qui s'exercent en face de cette ouverture étant les seules à ne pas avoir de forces opposées... Il est facile de comprendre pourquoi la fusée avance. »

Et sur le site <http://dispourquoipapa.free.fr/sciences/sc0016.htm> :



Sur le formidable site [Accrodavion](http://accrodavion.jexiste.be), par contre, l'auteur introduit la notion de *convergent* en indiquant, à juste titre, que l'intuition le fait ressentir comme contre-productif, puisque sa surface génère des forces de pression vers l'arrière et donc dans le sens du freinage du mobile (forces s'appliquant sur la partie en rouge) :



<http://accrodavion.jexiste.be/Accrodavions/lapropulsion9.html>

Il précise alors que cet effet contre-productif est compensé par les forces de pression s'appliquant au *divergent* qui le suit (en vert, à la droite du schéma), ce qui est vrai...

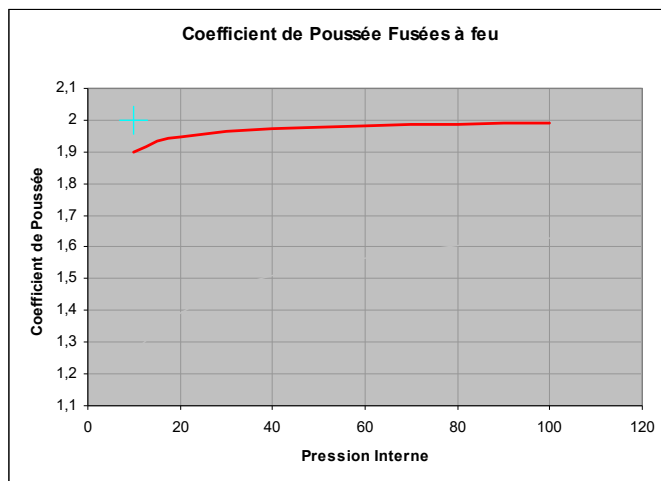
De ce rapide tour d'horizon du Web on peut retirer deux constats :

→ il existe en chacun de nous une réticence à considérer les forces naissant de *dépressions* comme des forces à part entière : sur le schéma ci-dessus, on est prêt à admettre que les forces de pression rouges freinent la fusée, mais on est tout aussi prêt à négliger l'effet de la diminution de ces mêmes forces.

→ il y a fréquemment sous-évaluation de la dépression créée par la prise de vitesse des particules de fluide éjectées (en vertu du principe de Bernoulli).

Or, pour ce qui est des fusées à eau (et probablement des fusées baudruches elles-mêmes), le bilan des dépressions sur les parois du convergent est extrêmement fort puisqu'il double pratiquement la force propulsive.

L'attribution, dans le calcul produisant le graphique déjà montré page 30, d'une très forte valeur à l'exposant isentropique γ ³¹ (ce qui place le fluide considéré dans la situation d'incompressibilité) nous donne d'ailleurs matière à réflexion : le Coefficient de Poussée de fusées à feu rejoignent leur homologue des fusées à eau :



Il conviendrait donc de dérouler le calcul général concernant les fluides compressibles afin de comprendre pourquoi les deux modes de propulsion se rejoignent lorsque le choix de l'exposant isentropique d'un fluide rend celui-ci incompressible...

Ceci dit, il n'est pas acquis qu'un moteur fusé puisse fonctionner avec un fluide incompressible...

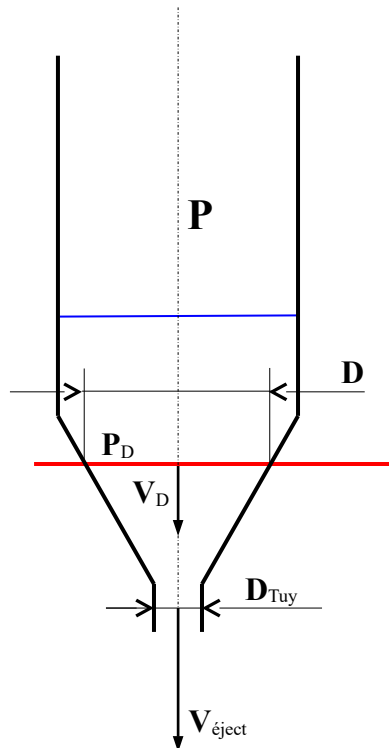
De même, il conviendrait de refaire le calcul de la propulsion du moteur-baudruche sur les bases de la *Théorie de la tuyère*, ceci en admettant pour l'écoulement au col une vitesse quelconque. D'ailleurs, des mesures de pression sur le convergent des ballons (ou, plus facilement, sur une prothèse rigide de convergent) serait du domaine du possible dans les lycées...

³¹ Cet exposant isentropique (ou adiabatique) varie généralement de **1,4** pour l'air à **1,22** pour les gaz éjectés par les fusées à feu d'amateurs...

La Partie Cachée de la Force

Recentrons à présent nos réflexions sur la propulsion hydropneumatique.

Considérons la fusée à eau fixée au banc d'essais/ Nous la caractériserons par le dessin et les paramètres suivant :



Étudions l'écoulement dans la section du tube de courant de diamètre D (en rouge sur le schéma), section située à la profondeur x sous la surface libre du liquide. Nous avons déjà écrit que la pression régnant dans cette section est :

$$P_x = P - \frac{1}{2} \rho (V_x^2 - V_{SL}^2)$$

Pour les besoins de notre calcul, abandonnons les indices x pour les remplacer par des indices D ; la section de diamètre D est donc le siège d'une pression P_D valant :

$$P_D = P - \frac{1}{2} \rho (V_D^2 - V_{SL}^2)$$

(comme il est souvent pratiqué, nous considérons donc ici que la pression dans toute cette section est égale, ce qui revient à négliger la vitesse radiale des particules d'eau, en particulier près de la paroi du convergent ; nous reviendrons plus loin sur cette simplification)

Or la loi de conservation du débit massique impose :

$$V_D \frac{\pi D^2}{4} = \text{Constante} = V_{\text{Tuy}} \frac{\pi D_{\text{Tuy}}^2}{4}$$

D'où l'on tire la vitesse à la section de diamètre D qui nous intéresse :

$$V_D = V_{\text{éject}} \frac{D_{\text{Tuy}}^2}{D^2}$$

(qui est plus faible que V_{Tuy})

... et celle de la Surface Libre :

$$V_{\text{SL}} = V_{\text{éject}} \frac{D_{\text{Tuy}}^2}{D_{\text{Bouteille}}^2}$$

(qui est assez faible)

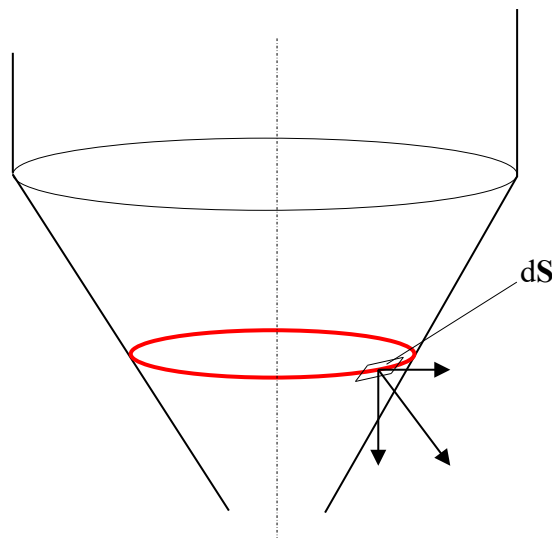
La pression sur les particules de la section de diamètre D , que nous avons établie à :

$$P_D = P - \frac{1}{2} \rho (V_D^2 - V_{\text{SL}}^2)$$

en devient :

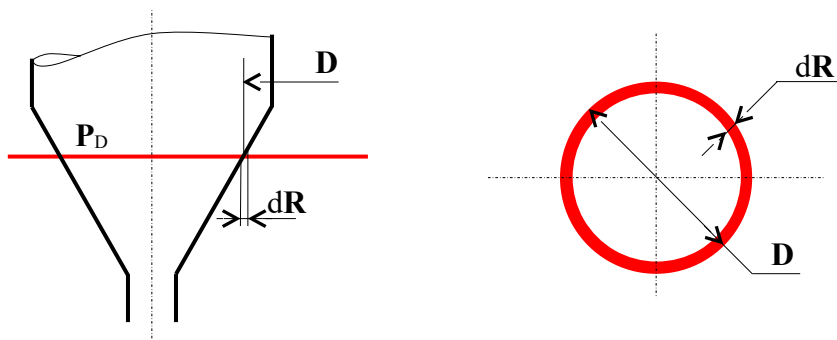
$$P_D = P - \frac{1}{2} \rho V_{\text{éject}}^2 \left(\frac{D_{\text{Tuy}}^4}{D^4} - \frac{D_{\text{Tuy}}^4}{D_{\text{Bouteille}}^4} \right)$$

Cette pression locale crée sur chaque élément de surface dS à la périphérie de la section considérée une force qui peut être décomposée en une composante horizontale et une composante verticale :



L'ensemble des composantes horizontales s'annulent deux à deux.

Tout se passe donc comme si P_D , la pression locale au diamètre D , s'appliquait, pour ce qui est de ses conséquences propulsives, sur une couronne de diamètre moyen D et de largeur dR (couronne rouge à droite)³² :



L'aire *efficace* de cette couronne est donc $-\pi D$ (nous faisons précéder cette valeur d'un signe moins puisque dD est négatif lorsque l'on s'approche de la tuyère et que nous allons intégrer le problème en descendant vers cette tuyère).

La pression P_D s'appliquant sur cette aire efficace étant, ainsi que nous l'avons déjà écrit :

$$P_D = P - \frac{1}{2} \rho V_{\text{éject}}^2 \left(\frac{D_{\text{Tuy}}^4}{D^4} - \frac{D_{\text{Tuy}}^4}{D_{\text{Bouteille}}^4} \right)$$

...la force axiale appliquée par le fluide sur cette partie du convergent est donc :

$$dF = -P \pi D \frac{dD}{2} + \frac{1}{2} \rho V_{\text{éject}}^2 \pi D \frac{dD}{2} D_{\text{Tuy}}^4 \left(\frac{1}{D^4} - \frac{1}{D_{\text{Bouteille}}^4} \right)$$

L'intégration sur toute la longueur du convergent à savoir :

$$F_{\text{Conv}} = \int_{D_{\text{Bouteille}}}^{D_{\text{Tuy}}} dF$$

...donnera donc la force sur ce convergent :

$$F_{\text{Conv}} = -\frac{1}{2} P \pi \int_{D_{\text{Bouteille}}}^{D_{\text{Tuy}}} D dD + \frac{1}{4} \rho V_{\text{éject}}^2 \pi D_{\text{Tuy}}^4 \left[\int_{D_{\text{Bouteille}}}^{D_{\text{Tuy}}} \frac{dD}{D^3} + \int_{D_{\text{Bouteille}}}^{D_{\text{Tuy}}} \frac{D dD}{D_{\text{Bouteille}}^4} \right]$$

³² Ainsi la force créée par une pression sur un piston ne dépend-elle pas de la forme de la tête de ce piston (qui peut fort bien être bombée)...

La primitivation est évidente et donne :

$$F_{\text{Conv}} = -\frac{1}{4} P \pi [D^2] + \frac{1}{4} \rho V_{\text{éject}}^2 \pi D_{\text{Tuy}}^4 \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{D^2} + \frac{1}{2} \frac{D^2}{D_{\text{Bouteille}}^4} \right]$$

Cette primitivation est à prendre entre les bornes susdites, ce qui donne :

$$F_{\text{Conv}} = P \frac{\pi}{4} [D_{\text{Bouteille}}^2 - D_{\text{Tuy}}^2] + \dots$$

$$\dots + \rho V_{\text{éject}}^2 \frac{\pi}{8} D_{\text{Tuy}}^4 \left[- \left[\frac{1}{D_{\text{Tuy}}^2} - \frac{1}{D_{\text{Bouteille}}^2} \right] + \frac{1}{D_{\text{Bouteille}}^4} [D_{\text{Tuy}}^2 - D_{\text{Bouteille}}^2] \right]$$

...ou, après simplifications :

$$F_{\text{Conv}} = P \frac{\pi}{4} [D_{\text{Bouteille}}^2 - D_{\text{Tuy}}^2] + \rho V_{\text{éject}}^2 \frac{\pi}{8} D_{\text{Tuy}}^4 \left[\frac{-1}{D_{\text{Tuy}}^2} + \frac{D_{\text{Tuy}}^2}{D_{\text{Bouteille}}^4} \right]$$

...ou encore :

$$F_{\text{Conv}} = P \frac{\pi}{4} [D_{\text{Bouteille}}^2 - D_{\text{Tuy}}^2] - \rho V_{\text{éject}}^2 \frac{\pi}{8} D_{\text{Tuy}}^2 \left[1 - \frac{D_{\text{Tuy}}^4}{D_{\text{Bouteille}}^4} \right]$$

Il est facile de reconnaître dans le premier terme le produit de **P** par l'aire de la projection frontale du convergent. C'est normal : c'est la partie *inchangée par la loi de Bernoulli* de la force de pression sur le convergent **P S_{Conv}**.

D'ailleurs, dans le cas limite où la vitesse d'éjection serait nulle (et donc où la bouteille resterait fermée), seul ce terme **P S_{Conv}** subsisterait...

Le dernier terme (ou le vert a été utilisé) est un soustractif (on retranche une quantité positive).

Dans ce dernier terme, que vaut $V_{\text{éject}}$? Ainsi que nous l'avons écrit page 28, et si la fusée est maintenue fixe, $V_{\text{éject}}$ vaut :

$$V_{\text{éject}} = \sqrt{\frac{2P}{\rho \left[1 - \frac{D_{\text{Tuy}}^4}{D_{\text{Bouteille}}^4} \right]}}$$

Son carré vaut donc :

$$V_{\text{éject}}^2 = \frac{2P}{\rho \left[1 - \frac{D_{\text{Tuy}}^4}{D_{\text{Bouteille}}^4} \right]}$$

Si l'on reporte ce libellé dans le résultat de notre intégration, on obtient :

$$F_{\text{Conv}} = P S_{\text{Conv}} - P \frac{\pi}{4} D_{\text{Tuy}}^2$$

Comme on reconnaît, dans le dernier terme, P fois la section de la tuyère, on peut écrire que F_{Conv} , la somme des forces de pression sur le convergent est :

$$F_{\text{Conv}} = P S_{\text{Conv}} - P S_{\text{Tuy}}$$

Ce qui fait que le bilan de toutes les forces s'exerçant sur les parois du moteur, soustraction des forces agissant sur le fond et des forces agissant sur le convergent, est :

$$F = P S_{\text{Fond}} - (P S_{\text{Conv}} - P S_{\text{Tuy}})$$

Comme $P S_{\text{Fond}} - P S_{\text{Conv}}$ est égal à $P S_{\text{Tuy}}$, on peut écrire enfin que :

Le bilan de toutes les forces s'exerçant sur les parois internes du réservoir d'une fusée à eau est $F = 2P S_{\text{Tuy}}$
Et ce bilan *interne* est bien égal à la force propulsive calculée par la *voie externe*.

...ce que nous cherchions à démontrer.

Pourquoi trouvons-nous exactement la même valeur de la Poussée ?

Il y a ici matière à réflexion.

En premier lieu, il faut revenir sur la façon dont nous avons réalisé notre calcul exposé ci-dessus ; et surtout revenir sur ses limitations et simplifications implicites et explicites :

En application du Principe de Bernoulli, nous avons calculé le bilan des pressions sur le convergent d'une fusée maintenue au banc (la fusée étant maintenue fixe, donc), ce banc étant situé dans une région non soumise à aucun champ de gravité).

Dans une étape suivante il serait possible d'ajouter l'accélération de la fusée puis de faire rentrer en jeu la gravité, mais nous n'en sommes pas là, ces deux phénomènes modifiant assez peu la valeur de la Poussée ³³.

³³ D'ailleurs, paradoxalement, la gravité n'a aucune action sur la Poussée...

Il est d'ailleurs important de noter que nous avons appliqué une fois le Principe de Bernoulli dans notre raisonnement interne (afin de donner une valeur à la pression variable sur le convergent).

Or le raisonnement externe utilise également le Principe de Bernoulli pour donner une valeur à la Vitesse d'Éjection dans la formule de la poussée $\mathbf{F} = \mathbf{q}\mathbf{V}_{\text{éject}}$.

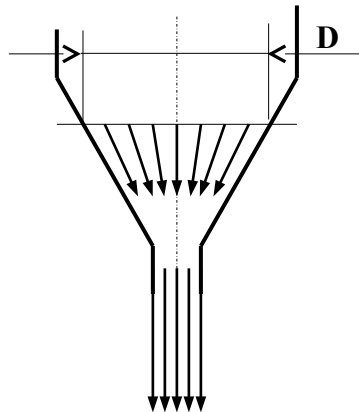
L'application du Principe de Bernoulli est donc égalitaire et symétrique : on ne pourrait pas songer à l'utiliser dans l'un des raisonnement et pas dans l'autre !

LIMITATIONS DE NOTRE CALCUL :

1° Convergent de forme non conique : Lors de notre développement, nous avons implicitement calculé l'effet de la pression des particules d'eau sur un convergent conique. Or l'effet de cette pression n'est lié en rien à l'angle de conicité de notre convergent. Une intégration sur un convergent de révolution de génératrice quelconque donnerait donc le même résultat. Ceci est une constatation intéressante...

2° Non prise en compte de l'angle des vecteurs vitesses : Lors de notre application du principe de Bernoulli, nous avons quand-même effectué une supposition de taille : celle que les particules glissant le long du convergent possédaient la vitesse de la section considérée du tube de courant...

Dessignons l'écoulement de l'eau sur le convergent, ou, plus précisément, à travers la section de diamètre \mathbf{D} du tube de courant :



Pour que l'eau puisse circuler, il faut bien que les vecteurs vitesse s'inclinent à mesure qu'ils s'éloignent de l'axe du convergent (il n'y a guère que dans la partie rectiligne du goulot que les vecteurs vitesse retrouvent leur parallélisme).

Le long de ce convergent, le vecteur vitesse possède donc deux composantes : une composante axiale (constante sur toute la section) et une composante radiale (de plus en plus forte à mesure qu'on s'approche du convergent). Mais surtout, le module du vecteur vitesse le long du convergent est plus important. La dépression de Bernoulli ($\frac{1}{2} \rho \mathbf{V}^2$) est donc plus importante que nous l'avons considéré dans notre calcul.

Le long du convergent, la vitesse de l'eau est multipliée par un facteur constant qui est :

$$\frac{1}{\cos(\alpha/2)} \quad \dots \alpha/2 \text{ étant le demi angle au sommet du convergent.}$$

Ce demi angle ne variant pas dans notre intégration du phénomène, c'est donc tout notre bilan de la dépression de Bernoulli qui est menacé d'être pondéré (augmenté) par le carré de ce coefficient. Cela fait beaucoup...

Ce qui est embêtant, de plus, c'est que cette pondération dépend de l'angle du convergent qui n'est absolument pas pris en compte par le raisonnement externe : la dissonance entre les deux raisonnements variera donc selon cet angle, ce qui n'est guère satisfaisant...

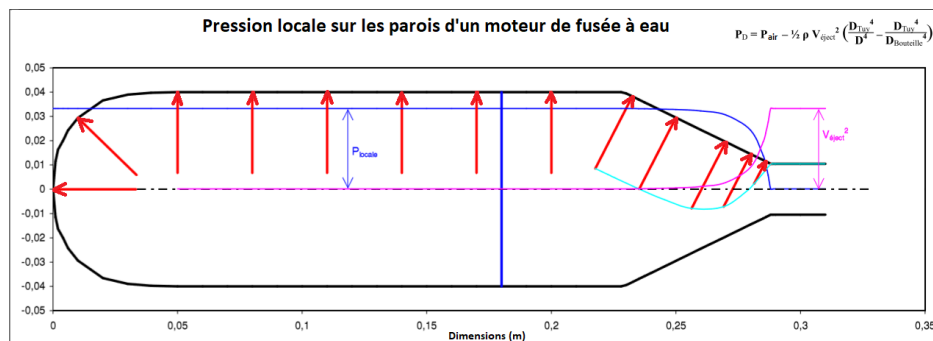
Il y a donc là un problème difficile sur lequel nous achoppons...

On pourra cependant considérer que la façon monodimensionnelle de raisonner que nous avons utilisée ci-dessus est extrêmement courante dans la théorie de la tuyère...

3° Existence d'une force interne : À y bien réfléchir, il existe également un phénomène qui n'est pris en compte dans notre raisonnement *interne* (mais il semble ne pas être non plus pris en compte dans le raisonnement *externe*) : le déplacement du Centre des Masses de l'eau avant son éjection. Expliquons-nous :

Sur ce sujet, nous renvoyons nos lecteurs vers le texte dont sont tirées les lignes précédentes : [LA PARTIE CACHÉE DE LA FORCE](#).

Ajoutons cependant un dernier graphe à ce texte : Celui de la distribution interne des forces de pression à l'intérieur de l'enveloppe de la fusée à eau :



Nous avons publié ce graphe dans les Wikipédia Commons, au lien :

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Pressions_locales_dans_une_fus%C3%A9e_%C3%A0_eau.png

Ceux qui le consulteront à ce lien le trouveront largement enrichi de notes à effleurer...

Ce qui saute aux yeux, à l'observation de ce graphe, c'est que la Pression Statique de l'eau ne décroît sensiblement qu'à l'extrême proximité de la tuyère (contrairement à la représentation que nous en avons faite sur nos schémas précédents).

À la réflexion, cette décroissance *in extremis* de la pression s'explique par le fait que cette pression agit sur une couronne d'aire frontale assez forte (l'intégration de cette décroissance des forces de pression près de la tuyère ne devant résulter, nous l'avons vu plus haut, qu'en un total valant $P S_{Tuy}$).

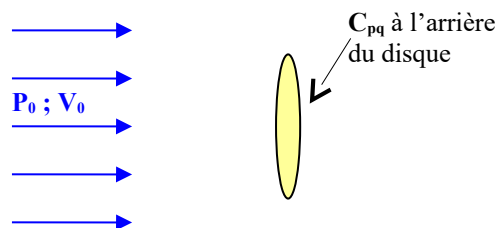
Nous mettons ici un terme à cette réflexion sur l'égalité des calculs de la poussée d'un moteur de fusée à eau par la méthode interne et la méthode externe.

V

COMPOSITION DE DEUX ÉCOULEMENTS

Livrons nous à une expérience de pensée :

Un expérimentateur, profitant d'un vent favorable de vitesse V_0 (à la pression statique locale P_0 ³⁴), décide de mesurer le Coefficient de Pression C_{pq} existant à l'aval d'un disque exposé frontalement à un écoulement :



Nous savons par ailleurs que le Coefficient de Pression C_{pq} à l'aval du disque circulaire est $C_{pq} = -0,4$. C'est d'ailleurs bien ce que notre expérimentateur mesure.

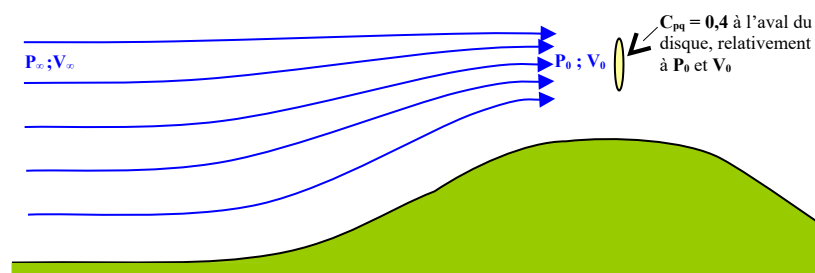
Notons au passage qu'en application de la variante adimensionnelle de l'équation de Bernoulli (nous y reviendrons [plus bas](#)) :

$$C_{pq} = 1 - C_{vq}^2$$

...le Coefficient de Vitesse C_{vq} , en ce même aval du disque, vaut :

$$C_{vq} = \sqrt{1 - C_{pq}} = \sqrt{1 + 0,4} = 1,18$$

Cependant, après avoir réalisé cette mesure, notre homme s'avise que le lieu où il l'a réalisée est le sommet d'une colline et que le vent dont il a profité pour sa mesure est accéléré (par effet venturi) par rapport au vent existant à la même altitude dans la plaine environnante :



³⁴ Cette pression locale P_0 est la Pression Atmosphérique sur les lieux de l'expérience, qui peut être mesurée sur un baromètre.

Notre expérimentateur songe alors que le vent ($\mathbf{P}_0; \mathbf{V}_0$) qu'il a utilisé pour sa mesure n'est pas le vent ($\mathbf{P}_\infty; \mathbf{V}_\infty$) régnant dans la plaine à l'écart de sa colline.

Il se souvient que pour établir son Coefficient de Pression au dos du disque, il a utilisé des caractéristiques locales de l'écoulement, à savoir \mathbf{P}_0 et \mathbf{V}_0 .

En effet, pour trouver la valeur du C_{pq} , il a écrit :

$$C_{pq} = \frac{\mathbf{P}_q - \mathbf{P}_0}{\frac{1}{2} \rho \mathbf{V}_0^2}$$

...libellé classique où \mathbf{P}_q est la pression qu'il a mesuré au dos du disque avec un manomètre de précision.

Il se demande alors combien vaudrait le même C_{pq} (qu'il a établi à **0,4**) s'il le mesurait en référence au vent existant dans la plaine (à la même altitude), à savoir le vent ($\mathbf{P}_\infty; \mathbf{V}_\infty$) tel que symbolisé à gauche, en bleu, sur le schéma ci-dessus.

Après réflexion, il décide de considérer sa colline comme un profil aérodynamique exposé au vent ($\mathbf{P}_\infty; \mathbf{V}_\infty$) de la plaine, profil sur lequel, en l'absence du disque, il mesurerait les Coefficients de Pression et de Vitesse (en référence à \mathbf{P}_∞ et \mathbf{V}_∞).

Supposons une fois pour toute que la vitesse \mathbf{V}_0 du vent au sommet de la colline est multipliée par un facteur \mathbf{n} supérieur à **1** du fait de l'effet venturi (par rapport à la vitesse \mathbf{V}_∞ du vent dans la plaine) ; on a donc :

$$\mathbf{V}_0 = \mathbf{n} \mathbf{V}_\infty$$

Le sommet de la colline ressentant une vitesse de $\mathbf{n} \mathbf{V}_\infty$, son coefficient de vitesse (relativement au condition $\mathbf{P}_\infty; \mathbf{V}_\infty$ de la plaine) est (de par la définition du Coefficient de Vitesse) :

$$C_{vc} = \frac{\mathbf{V}_0}{\mathbf{V}_\infty} = \frac{\mathbf{n} \mathbf{V}_\infty}{\mathbf{V}_\infty} = \mathbf{n}$$

(nous utiliserons à partir de maintenant l'indice \mathbf{c} pour décrire les caractéristiques de la colline prise comme un corps soumis au vent de la plaine)

En application de la variante adimensionnelle de l'équation de Bernoulli, le Coefficient de Pression C_{pc} existant au sommet de la colline en l'absence de disque (toujours relativement aux conditions $\mathbf{P}_\infty; \mathbf{V}_\infty$ de la plaine) est :

$$C_{pc} = 1 - C_{vc}^2 = 1 - \mathbf{n}^2$$

...qui est bien sûr plus faible que **1** puisque \mathbf{n} est supérieur à **1**.

Notre homme se demande alors si le C_{pq} qu'il a mesuré à l'aval du disque dans son expérience (donc en référence à \mathbf{P}_0 et \mathbf{V}_0) peut être exprimé par rapport au vent de la plaine ($\mathbf{P}_\infty; \mathbf{V}_\infty$)

Il constate que l'écoulement de la plaine est d'abord accéléré par l'effet venturi de la colline puis qu'il est encore accéléré au contournement du disque. Ce qui se traduit par une première diminution du C_p local puis par une autre diminution du C_p au dos du disque.

Suivant cette intuition, il émet une première intention qui est donc de sommer le Coefficient de Pression C_{pc} de la colline (calculé à l'instant) et le Coefficient de Pression C_{pq} du disque (trouvé localement par son expérience).

Cette sommation simple conduirait, pour le $C_{pq\infty}$ de culot du disque, à :

$$C_{pq\infty} = C_{pq} + (1 - n^2) \quad (\text{c'est la première intention, pour } C_{pq\infty}, \text{ née de la sommation des } C_p)$$

...solution qui devient, en utilisant la valeur numérique $-0,4$ de C_{pq} déjà établie :

$$C_{pq\infty} = (1 - n^2) - 0,4$$

Par application de la [réciproque de la variante adimensionnelle de l'équation de Bernoulli](#), on trouve, en gardant la valeur littérale de C_{pq} :

$$C_{vq\infty} = \sqrt{n^2 - C_{pq}} \quad (\text{c'est la première intention, pour } C_{vq\infty}, \text{ née de la sommation des } C_p)$$

Le même homme constate avec intérêt que pour un facteur d'accélération n unitaire (cas où il n'existe pas de colline, donc pas d'accélération du vent de la plaine par effet venturi) ce C_{pq} vaudrait C_{pq} , soit les $0,4$ qu'il a précédemment trouvé.

Mais il se dit également que pour trouver le C_{pq} de l'aval du disque, il pourrait chercher à connaître le Coefficient de Vitesse au culot de ce disque en sommant les Coefficients de Vitesse (de la colline et du disque). Il se souvient que :

→ Le Coefficient de Vitesse de la colline (en tant que profil soumis au vent de la plaine) est $C_{vc} = n$ (nous l'avons déjà dit).

→ Le Coefficient de Vitesse au dos du disque est connu par application de la variante adimensionnelle de l'équation de Bernoulli ; c'est $C_{vq} = \sqrt{1 - C_{pq}}$

La sommation de ces Coefficients de Vitesse donne donc une autre valeur du $C_{vq\infty}$; c'est :

$$C_{vq\infty} = n + \sqrt{1 - C_{pq}}$$

D'où on tire, par application de la variante adimensionnelle de l'équation de Bernoulli :

$$C_{pq\infty} = C_{pq} - n^2 - 2n \sqrt{1 - C_{pq}} \quad (\text{deuxième intention, pour } C_{pq\infty}, \text{ née de la sommation des } C_v)$$

Le problème posé par cette deuxième intention est que, pour la valeur unitaire de n (cas où il n'existe pas de colline, donc en l'absence d'effet venturi), ce $C_{pq\infty}$ vaut – 3,77, ce qui :

- d'une part, est très loin de la valeur –0,4 trouvée par la première expérience,
- et d'autre part est supérieur à 1³⁵.

Cette deuxième intention n'est donc pas à mettre en pratique.

Ce n'est donc pas la somme des Coefficients de Vitesse (de la colline et du disque) qui peut apporter le $C_{pq\infty}$ recherché.

D'ailleurs, si l'on avait sommé les Coefficients de Vitesse de la colline et du disque en se plaçant d'entrée dans le cas où $n = 1$ (cas où le C_{vc} de la colline serait égal à 1), on aurait obtenu $C_{vq\infty} = 1 + \sqrt{1 - C_{pq}}$, ce qui est par trop différent de la valeur $C_{vq\infty} = \sqrt{1 - C_{pq}}$ découlant de l'application de la variante adimensionnelle de l'équation de Bernoulli à partir du C_{pq} trouvé par l'expérimentation locale du début de ce texte...

Notre homme pense alors à sommer, non plus les Coefficients de Vitesses, mais les survitesses relevées aux points caractéristiques (sommet de la colline et culot du disque) :

- La survitesse au sommet de la colline vaut $V_0 - V_\infty = (n - 1)V_\infty$.
- La survitesse à l'aval du disque est $C_{vq0}V_0 - V_0 = [\sqrt{1 - C_{pq}} - 1]V_0$

On note d'ailleurs que ces survitesses équivalent aux produits de chaque Coefficient de Vitesse diminué de 1 par la vitesse sur laquelle ils sont basés.

La sommation de ces deux survitesses est donc :

$$(n - 1)V_\infty + [\sqrt{1 - C_{pq}} - 1]V_0.$$

Puisque $V_0 = nV_\infty$, cette sommation devient :

$$(n - 1)V_\infty + [\sqrt{1 - C_{pq}} - 1]nV_\infty = [n\sqrt{1 - C_{pq}} - 1]V_\infty$$

Mais cette sommation des survitesses résulte en une survitesse. La vitesse proprement dite est la somme de V_∞ et de cette sommation des survitesses³⁶, soit :

$$[n\sqrt{1 - C_{pq}} - 1]V_\infty + V_\infty = [n\sqrt{1 - C_{pq}}]V_\infty$$

³⁵ D'une façon générale, le C_p maximal sur un corps est celui existant au point d'arrêt (où toute l'énergie cinétique du flux est convertie en pression).

³⁶ Cela devient évident si l'on considère que les deux survitesses s'acquièrent successivement, c-à-d à l'approche du sommet de la colline et par contournement du disque. Mais cette façon de faire devient immotivée si l'on étudie des écoulements qui ne sont pas successifs mais simultanés...

En référence à la vitesse V_∞ du vent en plaine, cette dernière vitesse nous donne donc un Coefficient de Vitesse de :

$$C_{vq\infty} = [n \sqrt{1 - C_{pq}}] \quad (\text{troisième intention, pour } C_{vq\infty}, \text{ née de la sommation des survitesses})$$

D'où l'on tirerait, par application de la variante adimensionnelle de l'équation de Bernoulli :

$$C_{pq\infty} = 1 - n^2(1 - C_{pq})$$

...ou encore :

$$C_{pq\infty} = n^2 C_{pq} + (1 - n^2) \quad (\text{troisième intention, pour } C_{pq\infty}, \text{ née de la sommation des survitesses})$$

L'application numérique de ce résultat avec $n = 1$ donne $C_{pq\infty} = C_{pq}$, ce qui est encourageant...

Cette troisième intention (sommation des survitesses) semble donc bien une méthode pour trouver le Coefficient de vitesse à l'aval du disque et le Coefficient de Vitesse au même endroit, en référence au vent V_∞ de la plaine.

C'est du moins ce que nous allons vérifier :

Calcul exact du C_p de culot du disque en référence au vent de la plaine :

Nous allons à présent calculer la valeur exacte de $C_{vq\infty}$, à savoir le Coefficient de Vitesse existant au dos du disque en référence au vent ($P_\infty ; V_\infty$) de la plaine.

En effet, nous avons établi plus haut que si l'effet venturi au-dessus de la colline accélère n fois la vitesse V_∞ (en créant une vitesse $V_0 = n V_\infty$) on peut considérer la colline comme un corps soumis au vent de la plaine où le Coefficient de Vitesse sera $C_{vc} = n$ (nous utilisons l'indice c pour décrire les caractéristiques de la colline prise comme un corps soumis au vent de la plaine).

Ce Coefficient de Vitesse est basé, bien sûr, sur la vitesse V_∞ du vent en plaine.

Par application de la variante adimensionnelle de l'équation de Bernoulli on peut de même attribuer facilement un Coefficient de Vitesse au sommet de la colline. C'est :

$$C_{pc} = 1 - C_{vc}^2 = 1 - n^2$$

(ceci toujours relativement aux conditions $P_\infty ; V_\infty$ de la plaine) :

Donc nous connaissons la Pression et la Vitesse du vent sur le lieu où notre opérateur a mesuré à **0,4** le C_{pq} à l'aval du disque.

Explicitons d'ailleurs cette valeur du C_{pq} :

$$C_{pq} = \frac{P_q - P_0}{\frac{1}{2} \rho V_0^2}$$

Dans cet encadré P_q est la pression statique mesurée à l'aval du disque, P_0 est la Pression statique (ou ambiante) régnant sur les lieux de la mesure (au sommet de la colline) et V_0 est la vitesse du vent sur les mêmes lieux de mesure (mais bien-sûr suffisamment loin du disque -ou en son absence-).

En effet, pour constituer le C_{pq} , la Pression Statique au dos du disque doit être comparée (par soustraction) à la Pression Statique (ou Ambiante) locale P_0 ³⁷ et adimensionnalisée par la Vitesse locale V_0 .

Or nous avons déjà dit que nous connaissons la Pression P_0 et la Vitesse V_0 du vent sur le lieu où notre opérateur a mesuré à **0,4** le C_{pq} à l'aval du disque. En tous cas nous avons déterminé les Coefficients de Vitesse et de Pression existant en ce lieu (mais en référence aux conditions ($P_\infty; V_\infty$) de la plaine) :

$$C_{vc} = n \text{ et } C_{pc} = 1 - C_{vc}^2 = 1 - n^2$$

Expliciter ces deux coefficients revient à écrire :

$$C_{vc} = n = \frac{V_0}{V_\infty} \quad (1)$$

...et :

$$C_{pc} = \frac{P_0 - P_\infty}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2} = 1 - n^2 \quad (2)$$

De l'équation (1) on peut tirer $V_0 = nV_\infty$

De l'équation (2) on tire également :

$$P_0 = (1 - n^2) \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 + P_\infty$$

Si nous remplaçons, dans l'[encadré précédent](#), à savoir :

$$C_{pq} = \frac{P_q - P_0}{\frac{1}{2} \rho V_0^2}$$

... P_0 et V_0 par leur valeur, nous dégageons :

$$C_{pq} = \frac{P_q - (1 - n^2) \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 - P_\infty}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 n^2}$$

...soit :

³⁷ En aérodynamique, seule les variations de pression (relativement à la Pression Ambiante) sont intéressantes...

$$C_{pq} = \frac{P_q - P_\infty}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 n^2} - \frac{(1 - n^2)}{n^2}$$

...soit encore :

$$C_{pq} = \frac{C_{pq\infty}}{n^2} - \frac{(1 - n^2)}{n^2}$$

...qui est le résultat exact que nous recherchions, c-à-d une relation entre le $C_{pq\infty}$ et le C_{pq} déterminé localement au dos du disque.

On gagne cependant à exprimer cette relation dans l'autre sens :

$C_{pq\infty} = n^2 C_{pq} + (1 - n^2)$	qui est notre solution exacte pour ce $C_{pq\infty}$
---	--

Observons que dès lors que l'on donne à n la valeur unitaire (cas où il n'existe pas de colline), on retrouve bien $C_{pq\infty} = C_{pq}$.

Par application de la [variante adimensionnelle de l'équation de Bernoulli](#), on trouve alors pour le $C_{vq\infty}$:

$C_{vq\infty} = n\sqrt{1 - C_{pq}}$	qui est notre solution exacte pour ce $C_{vq\infty}$
-------------------------------------	--

Confrontation de ce résultat avec celui des précédentes intentions :

Reste à comparer cet encadré exact avec, par exemple, celui obtenu [plus haut](#) avec la sommation des survitesses, à savoir :

$C_{pq\infty} = n^2 C_{pq} + (1 - n^2)$	(troisième intention, née de la sommation des survitesses)
---	--

Ces deux résultats sont bien les mêmes...

Mais il reste à comparer également notre solution exacte pour le $C_{pq\infty}$, à savoir :

$C_{pq\infty} = n^2 C_{pq} + (1 - n^2)$	notre solution exacte pour le $C_{pq\infty}$
---	--

...avec notre [première intention](#) (née de la simple sommation des C_p), à savoir :

$$C_{pq\infty} = C_{pq} + (1 - n^2) \text{ (c'est notre première intention, pour ce } C_{pq\infty}, \text{ née de la sommation des } C_p)$$

On observe alors que le facteur n^2 qui précède C_{pq} dans la solution exacte n'est pas présent dans notre première intention : Cette différence importante disparaît cependant pour la valeur unitaire de n , ce qui explique que la même première intention a pu nous paraître crédible pour cette valeur unitaire de n .

Notons également qu'on peut exprimer cette première intention sous la forme :

$$C_{pq\infty} = C_{pq} + C_{pc}$$

$$\dots \text{ puisque } C_{pc} = (1 - n^2)$$

On démontre de cette façon que pour trouver le $C_{pq\infty}$, il ne faut pas sommer le C_{pq} et le C_{pc} (selon cette première intention), mais $n^2 C_{pq}$ et C_{pc} .

On gagne alors à mémoriser la solution exacte sous cette forme :

$$C_{pq\infty} = n^2 C_{pq} + C_{pc} \quad \text{qui est notre solution exacte pour le } C_{pq\infty}$$

La valeur exacte du C_p au dos du disque en référence au vent de la plaine ($P_\infty; V_\infty$) est donc la sommation de n^2 fois le C_p mesuré localement au dos du disque en référence ($P_0; V_0$) avec le C_p de la colline (en référence $P_\infty; V_\infty$).

Autre démonstration de cette valeur exacte :

Nous avons trouvé une autre démonstration du résultat exact ci-dessus, même si cette autre démonstration est moins intuitive (elle découle de simples manipulations mathématiques) :

Nous cherchons :

$$C_{pq\infty} = \frac{P_q - P_\infty}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2}$$

Faisons apparaître P_0 au numérateur de ce quotient :

$$C_{pq\infty} = \frac{P_q - P_0 + P_0 - P_\infty}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2}$$

Ceci peut s'écrire :

$$C_{pq\infty} = \frac{P_q - P_0}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2} + \frac{P_0 - P_\infty}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2}$$

On reconnaît dans le deuxième terme C_{pc} (le Coefficient de Pression au sommet de la colline en référence $P_\infty; V_\infty$) et, si l'on se souvient que $V_\infty = V_0/n$, on obtient bien :

$$C_{pq\infty} = n^2 C_{pq} + C_{pc}$$

Notons d'ailleurs que l'on peut faire le même calcul pour un point quelconque à la surface de l'objet placé dans le deuxième écoulement, ce qui transforme l'équation ci-dessus en l'équation plus générale :

$$C_{p\infty} = n^2 C_p + C_{pc}$$

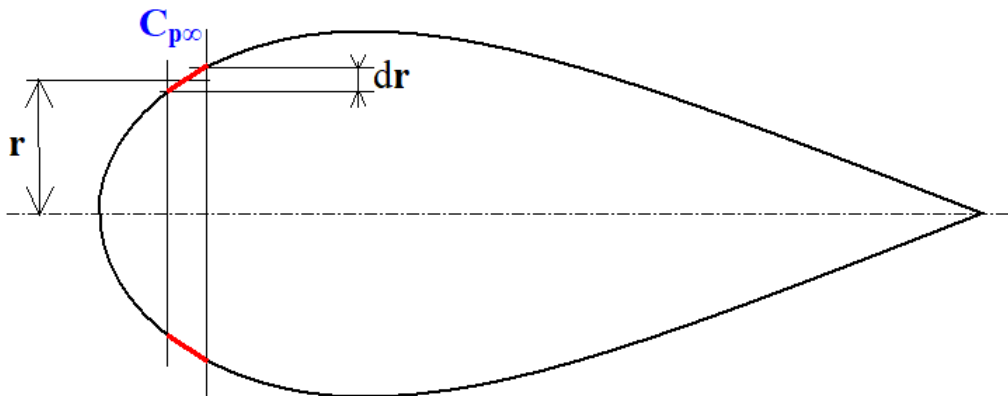
... $C_{p\infty}$ étant le Coefficient de Pression en référence ($\mathbf{P}_\infty ; \mathbf{V}_\infty$) d'un point quelconque de la surface de l'objet placé dans le deuxième écoulement et C_p le Coefficient de Pression de ce corps relevé dans ce deuxième écoulement ($\mathbf{P}_0 ; \mathbf{V}_0$) indépendant du premier.

Cette égalité vaut pour un point quelconque d'un corps.
Mais elle vaut également pour tous ses points.

Le C_x d'un corps étant l'intégrale sur toute sa surface S de la projection des forces de pression élémentaires existant à sa surface, on peut l'exprimer ainsi (par exemple pour un corps de révolution) :

$$C_{x\infty} = \int_0^S C_{p\infty} 2\pi r dr$$

... r et dr étant définis sur le schéma ci-dessous comme définissant la surface élémentaire rouge en forme de tranche de calotte sphérique rouge (c'est en effet l'anneau d'aire $2\pi r dr$, projection de cette tranche de calotte sur le plan normal à l'axe du corps, qui compte dans la sommation des efforts de pression) :



Si l'on remplace dans l'intégrale précédente $C_{p\infty}$ par sa valeur $n^2 C_p + C_{pc}$, on obtient :

$$C_{x\infty} = \int_0^S n^2 C_p 2\pi r dr + \int_0^S C_{pc} 2\pi r dr$$

Comme n^2 et C_{pc} , le Coefficient de Pression relevé au sommet de la colline en l'absence du corps sont des données constantes, on peut les sortir des intégrales :

$$C_{x\infty} = n^2 \int_0^S C_p 2\pi r dr + C_{pc} \int_0^S 2\pi r dr$$

Il ne reste plus qu'à observer que la première intégrale est celle donnant le C_x du corps en référence P_0 ; V_0 et que la deuxième intégrale est nulle.

On obtient alors :

$$C_{x\infty} = n^2 C_x$$

...c'est-à-dire que le C_x du corps en référence au vent de la plaine P_∞ ; V_∞ est **n^2 fois** celui mesuré localement dans le vent P_0 ; V_0 .

Ce résultat peut être jugé assez intuitif dans la mesure où l'écoulement sur le corps au sommet de la colline est bien soumis à une vitesse **n fois** plus forte que V_∞ , la vitesse du vent dans la plaine (du fait de l'effet venturi).

Cependant c'est la disparition de la deuxième intégrale ci-dessus qui a simplifié les choses : Le corps est immergé totalement dans une pression statique P_0 différente de P_∞ mais cette pression statique P_0 est constante sur toute la longueur du corps : les effets de cette Pression Statique P_0 s'annulent donc entre la face avant et la face arrière du corps.

Ce simple produit du C_x du corps isolé par n^2 ou la prise en compte d'une Pression dynamique locale **n^2 fois** plus forte (ce qui revient au même) est utilisé par Hoerner lorsqu'il s'intéresse à la traînée du rétroviseur d'une voiture, p. 249 de son ouvrage [Drag](#) (il prend une Pression Dynamique, à l'emplacement du rétroviseur, **1,6 fois** plus forte que la Pression Dynamique loin du corps)...

Notons cependant que dans beaucoup de cas, la Pression Statique locale (en l'absence du corps secondaire) évolue sur la longueur du corps secondaire : il se développe donc ce que les souffleurs appellent une *poussée hydrostatique*³⁸.

En tout état de cause, cependant, si l'on s'intéresse non pas à la valeur du C_x d'un corps mais à la valeur des seuls Coefficients de Pression $C_{p\infty}$, c'est bien l'égalité :

$$C_{p\infty} = n^2 C_p + C_{pc}$$

...qui devra être utilisée.

Conclusion sur la composition de deux écoulements :

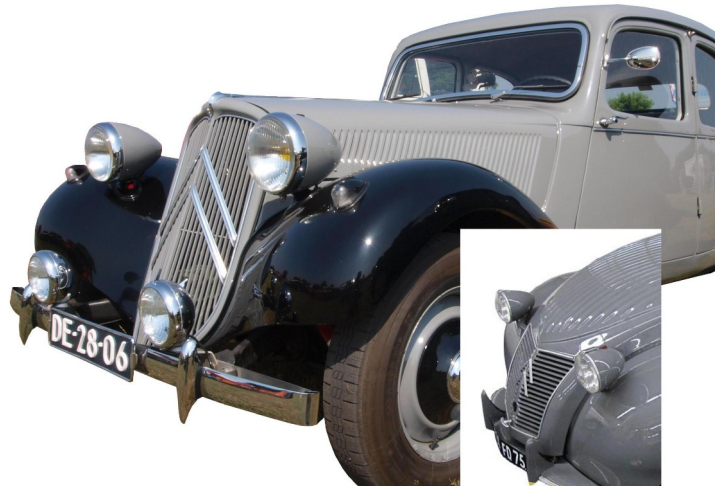
Dans le cas d'écoulements successifs et indépendants (comme dans notre exemple d'un venturi à l'intérieur duquel on place un disque, on peut donc bien utiliser la méthode de sommation des survitesses (survitesses établies indépendamment dans les deux systèmes) pour établir la valeur des Coefficients de Pression et de Vitesse autour d'un corps placé dans le premier écoulement.

Si le C_p du premier écoulement est suffisamment constant (spatialement parlant) dans la zone où l'on place le deuxième corps (à la place du disque de notre exemple), l'intégration des $C_{p\infty}$ autour de ce corps produira un $C_{x\infty}$ (en référence P_∞ ; V_∞) valant **$n^2 C_x$** . (soit **n^2 fois** celui mesuré localement dans le vent P_0 ; v_0).

³⁸ Si par exemple la Pression à l'emplacement de l'avant du corps secondaire (en l'absence de celui-ci) est plus forte que la pression à l'emplacement de son arrière (toujours en son absence), il sera poussé en arrière par ce jeu de pression et donc sa traînée sera augmentée...

Cette configuration (et l'indépendance des deux écoulements) n'est cependant pas la plus fréquente.

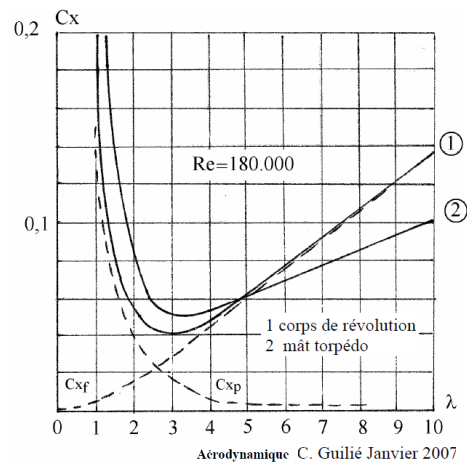
La méthode $C_{x\infty} = n^2 C_x$ énoncée à l'instant donne cependant des résultats instructifs dans des études du type « Trainée des phares d'une 2CV ou d'une Traction Avant » :



Source Wikipédia

Nous écrivions d'ailleurs dans notre texte « [Aérodynamique des Corps d'Eiffel](#) » :

« Les phares des célèbres Citroën présentent des élancements très courts (de l'ordre de **1,5**), mais si l'on se réfère au graphe classique :



...on doit admettre que cet élancement leur confèrerait malgré tout ³⁹ un C_x assez faible (de l'ordre de **0,08** ⁴⁰) s'il était correctement profilés (ce qui n'est pas le cas, le verre de ces phares étant trop plat, par exemple). Disons donc que les C_x est **0,1**.

Ce C_x est évidemment celui qu'ils auraient en tant que corps isolés, ce qui est loin d'être le cas :

³⁹ Comme on le voit sur la courbe, l'élancement optimal de corps fuselés 3D est autour de **3** (en Couche Limite turbulente).

⁴⁰ Ce C_x est donné par ledit graphe pour un Reynolds (que nous croyons diamétral) de **180 000**. Dans le cas d'un phare de **15 cm** de diamètre, ce Reynolds est atteint à **17 m/s** (soit **62 km/h**).

Pages 249 et 250 de son ouvrage [Drag](#), Hoerner relate ainsi les mesures de la Traînée due à la présence de phares sur les garde-boue avant. « L'existence de la survitesse occasionnée par le passage dans l'air de la partie avant du véhicule (calandre et avant des garde-boue) augmente la Pression dynamique locale s'appliquant sur les phares. »

Un premier calcul de traînée peut donc être effectué, comme nous l'avons dit plus haut pour le rétroviseur, en multipliant le C_x des phares par la Pression Dynamique locale.

Si l'on considère que le C_v au dessus des garde-boue vaut **1,3** et donc que la Pression dynamique en cet endroit est multiplié par $1,3^2 = 1,69$, on peut déjà dire que le C_x du phare (**0,1** en tant que corps isolé) est multiplié par **1,69**, ce qui donne **0,169**.

Au demeurant, un autre phénomène entre en ligne de compte pour la traînée de tels corps (phares à l'ancienne et rétroviseurs) : la Traînée d'interaction, à savoir l'action de la Traînée du phare sur l'écoulement le long de la voiture ; de telle sorte qu'Hoerner puisse écrire, p. 250 :

« Calculé sur la surface frontale des phares, le coefficient de traînée [dû à ces phares] est entre **2** et **4**. »

VI

VARIANTE ADIMENSIONNELLE DE L'ÉQUATION DE BERNOULLI

C'est assez contre-intuitif, mais l'équation de Bernoulli n'est jamais utilisée par les aérodynamiciens. Ils utilisent, par contre, le même Principe de Bernoulli, mais sous cette forme extraordinairement simple et concise :

$$C_p = 1 - C_v^2$$

Forme qui possède évidemment la réciproque :

$$C_v = \sqrt{1 - C_p}$$

Nous verrons, d'autre part, que contrairement à l'équation de Bernoulli, cette *variante adimensionnelle de l'équation de Bernoulli*, est valable en tout point d'un écoulement stationnaire⁴¹.

Démonstration de la variante adimensionnelle de l'équation de Bernoulli :

Appliquons l'équation de Bernoulli classique à deux points sur la même ligne de courant d'un écoulement, l'un de ces points étant un point quelconque et l'autre étant situé loin du corps (ses caractéristiques étant repérées par un indice ∞) :

$$\frac{1}{2}\rho V^2 + P + \rho g z = \frac{1}{2}\rho V_\infty^2 + P_\infty + \rho g z_\infty$$

Dans l'air, on peut négliger on peut négliger les termes $\rho g z$ et $\rho g z_\infty$ ⁴². Il reste :

$$\frac{1}{2}\rho V^2 + P = \frac{1}{2}\rho V_\infty^2 + P_\infty$$

...soit :

$$P - P_\infty = \frac{1}{2}\rho V_\infty^2 - \frac{1}{2}\rho V^2$$

Divisons les deux membres de l'égalité par la Pression Dynamique de l'écoulement, à savoir $\frac{1}{2}\rho V_\infty^2$:

$$\frac{P - P_\infty}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2} = 1 - \frac{V^2}{V_\infty^2}$$

Si l'on appelle C_p le premier quotient (pour *Coefficient adimensionnel de Pression*), soit :

⁴¹Un écoulement *stationnaire* est un écoulement dans lequel, en tous points, pression et vitesse ne varient pas avec le temps. Comme exemple d'écoulement stationnaire on peut donner l'écoulement dans une soufflerie lorsque le courant d'air se fait à vitesse constante. Autre exemple d'écoulement *stationnaire*, plus naturel : le vent que l'on peut ressentir sur une plage quand la vitesse de ce vent est constante (sans rafale ni baisse de vitesse).

⁴² Dans l'eau ces termes ne sont pas négligeables, mais considérer la combinaison $(P + \rho g z)$ comme le terme de pression permettrait de réaliser le calcul qui suit. C'est ce qui explique qu'on peut déterminer les caractéristiques d'un corps aussi bien en le plaçant dans l'écoulement d'air d'une soufflerie que dans l'écoulement d'eau d'un bassin hydraulique.

$$C_p = \frac{P - P_\infty}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2}$$

...et si l'on appelle C_v la racine carrée du deuxième quotient (C_v pour *Coefficient adimensionnel de Vitesse*), soit :

$$C_v = \frac{V}{V_\infty}$$

...on a bien :

$$C_p = 1 - C_v^2$$

...ce que nous désirions démontrer.

Contrairement à ce que leur libellé peut laisser penser, ces Coefficients adimensionnel de Pression et de Vitesse sont extrêmement intuitifs et représentent bien les pressions et les vitesses telles que mesurées et étudiées par les Mécaniciens des Fluides ; ceci explique pourquoi ils apparaissent dans tous les résultats d'essais en souffleries.

Le Coefficient de Pression C_p est, au point considéré, la surpression ou sous-pression relative (relative à la Pression Dynamique). Ce C_p peut varier depuis l'unité (au point d'arrêt du corps) à des valeurs négatives.

Le Coefficient de Vitesse C_v est, au point considéré, la vitesse relative (relative à la vitesse de l'écoulement loin du corps). Ce C_v peut varier de 0 au point d'arrêt à des valeurs au-dessus de l'unité.

Une chose importante à noter, à propos de cette variante adimensionnelle de l'équation de Bernoulli, c'est qu'elle est applicable en tout point de l'écoulement (en dehors de la Couche Limite⁴³), donc en **un seul point** pris au hasard. Ce fait peut sembler curieux puisque, dans son principe, l'équation de Bernoulli établit un lien entre les caractéristiques de **deux points** situés sur la même ligne de courant.

L'explication de cet apparent paradoxe est que C_p et C_v comportent dans [leur libellé](#) les références convenables aux caractéristiques d'un point situé à l'infini amont...

⁴³ « en dehors de la Couche Limite », comme on doit toujours le préciser lorsque l'on utilise le Principe de Bernoulli !

VII

ÉVOLUTION DE LA VITESSE LOCALE AU LONG D'UN CORPS PROFILÉ (MÉTHODE GRAPHIQUE POUR PASSER DE LA DISTRIBUTION DES VITESSES À LA DISTRIBUTION DES PRESSIONS)

Prenons la distribution des vitesses sur le dirigeable Akron :

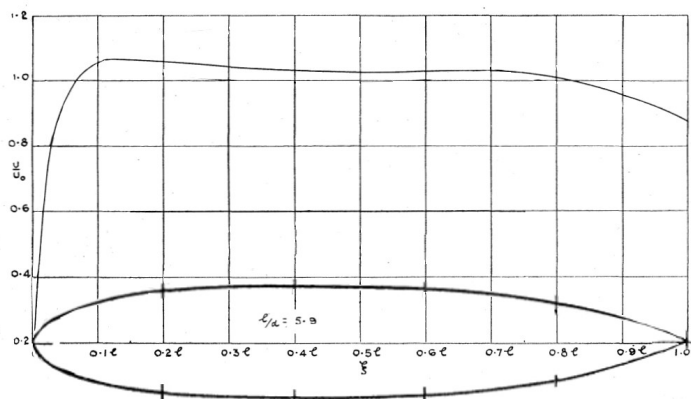


FIG. 2.—Velocity distributions for body of revolution of fineness 5.9 : 1 Akron

The Calculation of the Total
and Skin Friction Drags
of Bodies of Revolution
at Zero Incidence

By
A. D. YOUNG, B.A.

COMMUNICATED BY THE DIRECTOR OF
SCIENTIFIC RESEARCH, AIR MINISTRY

Reports and Memoranda No. 1874
27th April, 1939*

Measurements of flow in the boundary layer
of a 1/40th scale model of the U.S. airship "Akron".
H. B. Freeman N.A.C.A. Report 430 (1932).

La vitesse au point d'arrêt est nulle (ordonnée nulle non représentée ici car allant de soi). Elle retrouve une valeur supérieure à la vitesse du courant (quantifiée ici par l'unité) dès l'abscisse **0,06**.

Il y a donc bien survitesse sur une bonne partie du corps (depuis l'abscisse **0,06** jusqu'à l'abscisse **0,82**) :

Cependant, cette survitesse est modérée. Hoerner estime p. 301 de [Drag](#), que la survitesse existant le long des côtés du fuselage y augmente « la pression dynamique [locale] [...] d'un facteur 1,07. ».

Par *pression dynamique*, Hoerner veut signifier la Pression Dynamique $\frac{1}{2} \rho V_x^2$ que l'on mesurerait localement (en principe au-dessus de la Couche Limite⁴⁴) sur le fuselage du fait de la vitesse locale V_x à l'abscisse x (on peut effectivement mesurer localement cette vitesse V_x en déplaçant au long du corps un petit tube de Pitot).

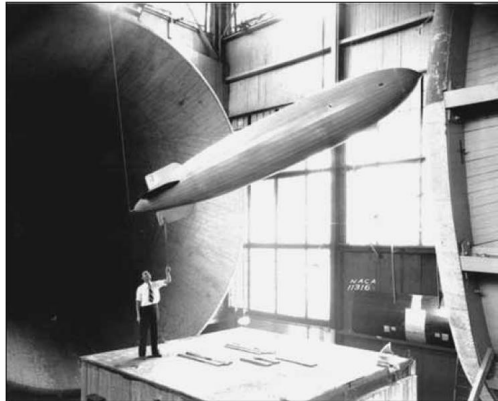
Acceptons pour vrai ce constat d'une augmentation de **7 %** de la Pression dynamique. Cette augmentation n'est pas liée au souffle de l'hélice éventuel sur ledit fuselage (il est important de le dire) : elle provient simplement de la distribution des vitesses sur le corps profilé que constitue un fuselage.

⁴⁴Nous écrivons « en principe au-dessus de la Couche Limite » parce que, par chance formidable, la pression existant au-dessus de la Couche Limite se conserve jusqu'à la paroi du corps (ici la paroi de la maquette du dirigeable où, justement, on a percé des petits trous afin d'y mesurer la pression).

La forme du dirigeable Akron étudié ci-dessus n'est pas très différente de celle d'un fuselage d'aéronef ; comme précisé sur l'image ci-dessus, son élanement est de **5,9**.

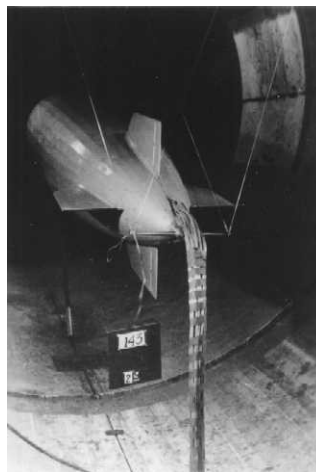
Cette distribution des vitesses n'a pas été relevée telle quelle par des mesures le long du corps. Il aurait fallu pour ce faire promener le long du modèle de dirigeable une petite sonde de Pitot juste au-dessus de sa Couche Limite (qui peut être très épaisse).

Il a été beaucoup plus facile de tirer cette courbe de distribution des vitesses de la distribution des pressions, mesurée à travers la Couche Limite grâce à de petits trous régulièrement disposés sur le corps ⁴⁵.



"USS Akron and USS Macon: An Engineering History of Fin Design" - new photo of ZRS model in the Langley wind tunnel, above

Sur cette très grande maquette (près de **6 m**) du dirigeable États-unien Akron ont été enregistrées pas moins de quatre cents mesures de pression à travers autant d'orifices affleurant à sa surface ; on remarque ci-dessous le faisceau de conduits transmettant la pression existant dans ces orifices :



Source Caltech : <http://windtunnel.caltech.edu/tenfoot/akron.jpg>

Ces mesures sont présentées par Hugh B. Freeman dans son rapport NACA N° 443 (voir aussi le rapport NACA 432).

⁴⁵ Il faut se souvenir que, par chance, la Pression de l'écoulement hors Couche Limite se transmet à travers la Couche Limite jusqu'à la surface du corps...

Voici ci-dessous la courbe de distribution des pressions que l'on obtient ainsi (courbe à marques rouges "0° pitch").

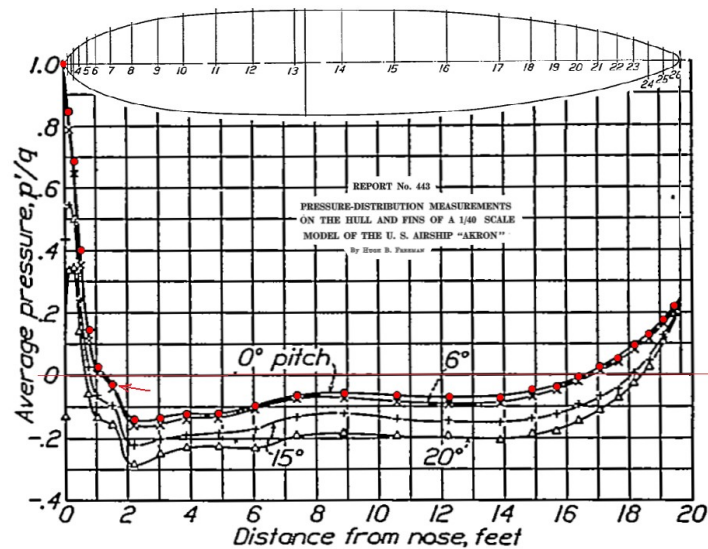


FIGURE 9.—Average pressures on bare hull of 1/40-scale model Akron for four angles of pitch

The range of Reynolds Numbers at which the tests were made varied from approximately 1,200,000 to 4,300,000. REPORT No. 432

(la petite sinuosité de cette courbe, indiquée par notre flèche rouge, est considérée par les auteurs du Rapport NACA comme un artefact et a été corrigée sur la [courbe de distribution des vitesses](#) de Young)

Cette distribution des pressions donne accès, nous le savons depuis Bernoulli, à la distribution des vitesses.

En effet, dès lors que l'on utilise pour exprimer les distributions de Pressions et de Vitesses les bons Coefficients adimensionnels (comme dans les deux graphes précédents qui traitent du dirigeable Akron), on peut appliquer l'équation de Bernoulli dans sa variante adimensionnelle :

$$C_p = 1 - C_v^2$$

...libellé où l'on reconnaît le Coefficient de Pression C_p et le Coefficient de Vitesse C_v .

En application de cette variante adimensionnelle de l'équation de Bernoulli, et moyennant une petite simplification mathématique, l'amateur peut facilement tirer le Coefficient de Vitesse C_v du Coefficient de Pression C_p et vice-versa :

On peut justifier la simplification mathématique en question en partant du principe que le coefficient de vitesse est peu différent de l'unité.

En effet, nous avons fait état plus haut de l'opinion d'Hoerner que la sur vitesse locale de l'écoulement (au-dessus de la Couche Limite) ne conduisait qu'à une augmentation de la Pression Dynamique locale (toujours au dessus de la Couche Limite) de l'ordre de 7% (soit une augmentation de vitesse locale de 3,4%).

À la fin de notre texte [FORMES FUSELÉES 2D & 3D DE TRAÎNÉE MINIMALE etc.](#) nous montrons qu'Hoerner sous-estime légèrement cette augmentation (nous trouvons plutôt une augmentation de la Pression Dynamique locale autour de **13%**, soit une augmentation de la vitesse locale de **6,3%**).

Mais qu'on prenne une augmentation de la vitesse locale de **3,4** ou de **6,3%**, on peut écrire cette vitesse locale :

$$V = V_{\infty} (1 + \varepsilon)$$

... ε pouvant prendre des valeurs allant de **-0,034** à **+0,034** ou de **-0,063** à **+0,063**.

...ou sous forme du Coefficient adimensionnel de Vitesse :

$$C_v = \frac{V}{V_{\infty}} = (1 + \varepsilon)$$

Plaçons ce Coefficient adimensionnel de Vitesse dans la [variante adimensionnelle](#) de l'équation de Bernoulli :

$$C_p = 1 - C_v^2 = 1 - (1 + \varepsilon)^2$$

Pour les faibles valeurs d' ε , il faut se souvenir que $(1 + \varepsilon)^2$ vaut $1 + 2\varepsilon$.

Par exemple pour $\varepsilon = \pm 0,034$, l'erreur n'est que de **0,11%** et pour $\varepsilon = \pm 0,063$, l'erreur n'est que de **0,4%**.

On peut donc écrire, à **1%** près (c-à-d tant que la survitesse le long du fuselage ne dépasse pas **10%** de V_{∞}) :

$$C_p = 1 - C_v^2 = -2\varepsilon$$

... ε étant le pourcentage de survitesse locale de l'écoulement (hors Couche Limite)

Cela explique que la distribution des pressions autour d'un corps fuselé (comme un fuselage ou un dirigeable) dessine, à un coefficient **2** près, la courbe inversée de la distribution des vitesses (ou vice-versa).

Ainsi on passera du Coefficient de Vitesse **1,06** au Coefficient de Pression en retirant **1** au Coefficient de Vitesse (ce qui donne ici **0,06**), en multipliant ce résultat par deux et en changeant son signe (ce qui donne un Coefficient de Pression de **-0,12**)...

Dans le sens inverse, on peut songer de même à tirer facilement le Coefficient de Vitesse C_v du Coefficient de Pression C_p .

Il suffit d'écrire le C_p dans la [variante adimensionnelle de l'équation de Bernoulli](#) sous la forme $C_p = \varepsilon$:

On obtient alors :

$$C_p = \varepsilon = 1 - C_v^2$$

...d'où l'on tire :

$$C_v = \sqrt{1 - \epsilon}$$

Or chacun sait que $\sqrt{1 - \epsilon}$ est très proche de $1 - \epsilon/2$.

Pour connaître le C_v correspondant au $C_p -0,12$, il suffit donc de diviser par deux le négatif du Coefficient de Pression C_p ($-0,12$, par exemple, devenant $0,06$)
→ et d'ajouter 1 au nombre ainsi obtenu (ce qui conduit au C_v $1,06$).

Dans ce dernier sens, (de C_p à C_v) cette conversion rapide conduit à une erreur (plus forte) de 3 % (pour des C_v extrêmes de $1,06$, soit des C_p extrêmes de $-0,12$).

Mettons à présent cette conversion en application par la **méthode graphique** :

Méthode graphique de passage du C_p au C_v :

En captant dans notre logiciel Word la forme de la courbe à marques rouges [ci-dessus](#) (qui est une distribution de pression) nous pouvons même, par un simple traitement d'image, dessiner la distribution de vitesse en faisant subir à la courbe un petit nombre de modifications successives. Voici, reportée sur la courbe de la distribution de vitesse d'origine, notre propre courbe de distribution de vitesse « calculée par simple traitement d'image » en bleu turquoise :

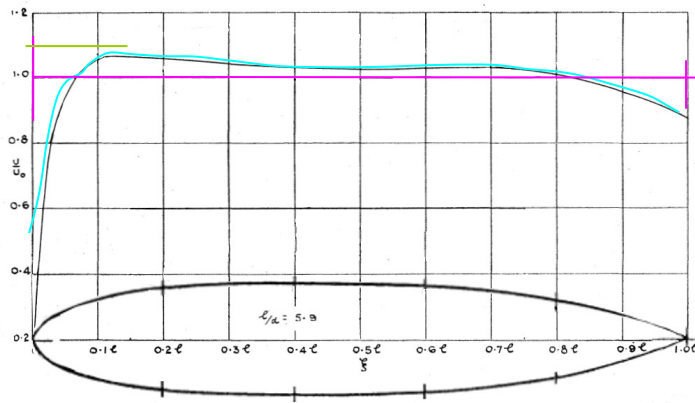


FIG. 2.—Velocity distributions for body of revolution of fineness 5.9:1 Akron

The Calculation of the Total and Skin Friction Drags of Bodies of Revolution at Zero Incidence

By
A. D. YOUNG, B.A.
COMMUNICATED BY THE DIRECTOR OF
SCIENTIFIC RESEARCH, AIR MINISTRY

Reports and Memoranda No. 1874
27th April, 1939*

Measurements of flow in the boundary layer of a 1/40th scale model of the U.S. airship "Akron".
H. B. Freeman N.A.C.A. Report 430 (1932).

Pour effectuer ce traitement d'image, nous avons capté la [courbe à marques rouges](#) avec l'axe horizontal de pression nulle (en fuchsia) et quelques autres repères de longueur et de hauteur, dont un segment horizontal vert captant [la pression à l'ordonnée -0.2](#)...

Nous avons ensuite transporté cet ensemble (groupé), en le retournant verticalement, sur ce [graphe où la distribution des vitesses](#) figure déjà (calculé numériquement par Young), et nous l'avons placé sur l'horizontale des vitesses unitaires (marquée 1.0) en réglant son échelle horizontale pour qu'elle honore et la longueur du dirigeable et son échelle verticale pour que notre segment horizontal vert

soit (provisoirement) à l'ordonnée **1.2** sans omettre, pour finir, de diviser l'échelle verticale du même ensemble par deux en repositionnant l'axe fuchsia à l'ordonnée **1.0**⁴⁶.

Le lecteur pourra apprécier que notre courbe turquoise recouvre suffisamment la courbe noire d'origine, spécialement dans la partie qui nous intéresse (en dehors de la zone du point d'arrêt où notre simplification mathématique ne peut plus être admise.

La petite sinuosité indiquée par une flèche rouge sur la [courbe de distribution des pressions](#) nous sert ici. Cette sinuosité est considérée par les auteurs du Rapport NACA comme un artefact et a été corrigée sur la [courbe de distribution des vitesses](#) de Young (elle se remarque évidemment sur notre [courbe turquoise](#) autour de l'abscisse **0,05**)...

(extrait du texte [FORMES FUSELÉES 2D & 3D DE TRAÎNÉE MINIMALE ET TRAITEMENT DES EXCROISSANCES ET CAVITÉS DIVERSES](#) rédigé pour le Colloque de Cachan 2016).

Bernard de [Go Mars !](#)
le **04/03/26**

BIBLIOGRAPHIE ET LIENS :

FLUID-DYNAMIC DRAG , S. F. HOERNER
HOERNER FLUID DYNAMICS , P.O. Box 21992 , Bakersfield, CA 93390
présenté souvent comme la bible de l'aérodynamique est disponible ici :

hoernerfdy@sbcglobal.net
<https://oscommerce.darcorp.com/>

Une traduction française de cet ouvrage, "Résistance à l'avancement dans les fluides", a été réalisée :
S. F. Hoerner, Gauthier-Villars éditeurs Paris 1965

Mémoire d'Henri Pitot présentant à l'Académie des Sciences sa « Description d'une Machine pour mesurer la vitesse des Eaux courantes, et le Sillage des Vaisseaux » :

<https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k35294.image.f543.langFR>

p. 363 de : « Histoire de l'Académie royale des sciences ... avec les mémoires de mathématique & de physique... tirés des registres de cette Académie »

LES TEXTES DE NOTRE PAGE :
« PHYSIQUE DE LA FUSÉE ET AÉRODYNAMIQUE GÉNÉRALE » :

<https://gomarsfusées.eu/gomars/physique.htm>

et en particulier :

LA PARTIE CACHÉE DE LA FORCE :
https://gomarsfusées.eu/gomars/part_cach_f.pdf

⁴⁶Du fait de la division par deux de l'échelle verticale, le segment horizontal vert se retrouve alors à l'ordonnée **1,1**.

« Modelling the Thrust Phase » de Dean Wheeler :

http://www.et.byu.edu/~wheeler/benchtop/pix/thrust_eqns.pdf

Le site du grand Dean :

<http://www2.et.byu.edu/~wheeler/benchtop/index.php>

Le texte sur la Théorie de la Tuyère de [Richard Nakka](#), traduit par Alexandre Burelle
[THÉORIE DES MOTEURS DE FUSÉE À PROPULSEUR SOLIDE](#) :

ou :

<http://www.nakka-rocketry.net/articles/theorie.pdf>

Le site de Richard Nakka :

<http://www.nakka-rocketry.net/>

Notre texte : LA FUSÉE EN VOL BALISTIQUE :

https://gomarsfusées.eu/gomars/la_fusee_en_vol_balistique7.doc

Notre texte : MONTÉE EN VITESSE D'ÉJECTION D'UNE FUSÉE À EAU :

https://gomarsfusées.eu/gomars/montee_v_eject.doc

Notre texte où est proposé une prise en compte du freinage atmosphérique, en additif à la fameuse formule de Tsiolkovski, et où est démontré l'insensibilité de cette formule aux changements de Débit massique :

AMENDEMENT ATMOSPHÉRIQUE À LA VITESSE DE TSIOLKOVSKI

https://gomarsfusées.eu/gomars/amendement_tsiolkovski.doc

Notre texte LA PROPULSION DE LA FUSÉE À EAU généralisant la formule de Tsiolkovski aux fusées à eau :

https://gomarsfusées.eu/gomars/pro_fao.pdf

...tous ces textes étant consultables sur la page [Physique de la fusée](#) :

<https://gomarsfusées.eu/gomars/physique.htm>

du site [Go Mars !](#) :

<https://gomarsfusées.eu/gomars/>

Le site d'Alain Juge et spécialement son texte "Principes" consacré à la propulsion de la fusée à eau :

<http://pagesperso-orange.fr/alain.juge/Francais/CadreFR.htm>

Et n'oublions pas les textes papiers d'un grand précurseur : Jean-Paul Soulard. Par exemple : "LA FUSÉE A EAU, pratique, approche théorique, mesures".

Nos textes étudiant une Mécanique des Fluides plus générale, comme :

LE C_x DE LA SPHÈRE

https://gomarsfusées.eu/gomars/cx_sphere.doc

LE REYNOLDS DES CORPS VOLANTS (NATURELS OU FAITS DE MAIN D'HOMME)

https://gomarsfusées.eu/gomars/reynolds_corps_volants.doc

et :

AÉRODYNAMIQUE DES CORPS D'EIFFEL

https://gomarsfusées.eu/gomars/aero_corps_d_eiffel.doc

ainsi que :

LA COUCHE LIMITE ET SON ÉQUATION INTÉGRALE DE VON KÁRMÁN

https://gomarsfusées.eu/gomars/equat_integ_karman.doc

ou encore :

LES MESURES DU C_x DE LA SPHÈRE PAR ISAAC NEWTON

https://gomarsfusées.eu/gomars/mesure_globe_newton.doc

INFLUENCE CONJUGUÉE DE LA TURBULENCE DE L'ÉCOULEMENT ET DE LA RUGOSITÉ DE LA SPHÈRE SUR SON REYNOLDS CRITIQUE

https://gomarsfusées.eu/gomars/cx_sphere.doc

NOTE SUR LE COEFFICIENT DE PRESSION AU CULOT DE LA SPHÈRE,

https://gomarsfusées.eu/gomars/cp_culot_sphere.doc

FORMES FUSELÉES 2D & 3D DE TRAÎNÉE MINIMALE ET TRAITEMENT DES EXCROISSANCES ET CAVITÉS DIVERSES (avec leur C_x)

https://gomarsfusées.eu/gomars/formes_fuselees_trainee_minimale.doc

PRESSURE-DISTRIBUTION MEASUREMENTS ON THE HULL AND FINS OF A 1/40-SCALE MODEL OF THE U. S. AIRSHIP "AKRON" by Hugh B. FREEMAN, NACA report N° 443

<https://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/19930091517.pdf>

FORCE MEASUREMENTS ON A 1/40-SCALE MODEL OF THE U. S. AIRSHIP "AKRON" By Hugh B. FREEMAN, NACA report N° 432

<https://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/19930091505.pdf>